《常微分方程教程》[1]习题2.4.1,(4)

叶卢庆
杭州师范大学理学院,学 号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 11. 16

习题 (2.4.1,(4)). 求解下列微分方程:

$$y' = x^3y^3 - xy.$$

解. 即为
$$\frac{dy}{dx} = x^3y^3 - xy.$$
这是个 Bernoulli 方程.当 $y \neq 0$ 时,两边同时除以 y^3,可得
$$\frac{1}{y^3}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{y^2}x - x^3 = 0.$$
令 $z = y^{-2}$,则
$$\frac{dz}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx},$$
因此
$$\frac{dz}{dx} - 2zx + 2x^3 = 0.$$
这是个关于 z, x 的一阶线性方程.可化为
$$dz + (2x^3 - 2zx)dx = 0.$$
乘以积分因子 $u(x)$,则
$$udz + u(2x^3 - 2zx)dx = 0.$$
令
$$\frac{du}{dx} = -2xu,$$

不妨令 $u=e^{\int -2xdx}$.因此我们得到恰当方程

$$e^{\int -2xdx}dz+e^{\int -2xdx}(2x^3-2zx)dx=0.$$

其中两个 $e^{\int -2xdx}$ 是同一个函数.设存在二元函数 $\phi(x,y)$ 使得

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=e^{\int -2xdx}\Rightarrow \phi=ze^{\int -2xdx}+f(x).$$

因此

$$-2xze^{\int -2xdx}+f'(x)=e^{\int -2xdx}(2x^3-2zx).$$

可得

$$f'(x)=2x^3e^{\int -2xdx}\Rightarrow f(x)=-x^2e^{\int -2xdx}-e^{\int -2xdx}+C.$$

因此可得通积分为

$$\phi\equiv ze^{\int -2xdx}-x^2e^{\int -2xdx}-e^{\int -2xdx}+C=0.$$

其中三个 $e^{\int -2xdx}$ 都是同一个函数.将 $z=y^{-2}$ 代入,可得

$$\frac{e^{\int -2xdx}}{y^2}-x^2e^{\int -2xdx}-e^{\int -2xdx}+C=0.$$

其中三个 $e^{\int -2xdx}$ 都是同一个函数.不妨设 $\int -2xdx=-x^2+D$,因 此可得

$$\frac{e^{-x^2}}{y^2}-x^2e^{-x^2}-e^{-x^2}+C'=0.$$

而当 $y=0$ 时,可得曲线为 $y=0$. $\square$

参考文献

1. 李承治. 丁同仁. 常微分方程教程. 高等教育出版社, 2th edition, 2004.