实数的十进表示

定义1.1 设$k \in \mathbb{N}_+$, $a_k \in \{0, 1, \cdots, 9\}$, 并且不管$N$多大,都存在$k > N$使得$a_k < 9$. 设$p \in \mathbb{Z}$. 称记号

$$\alpha := p + 0.a_1a_2a_3\cdots\cdots \tag{1.1}$$

为**实数**. 令$\alpha_n = p + 0.a_1\cdots a_n = p + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} \quad n \in \mathbb{N}_+$. 称比例数列

$$\widetilde{\alpha} := \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \tag{1.2}$$

为**与实数α对等的标准列**. 实数的全体记做$\mathbb{R}$.

注1.1 把实数与其表示视为一体, 就直呼其为实数. 这就像把姓名是张三的人与张三视为一体,可以说"张三是北京人",而不必说"名叫张三的人是北京人".

已知的比例数(rational numbers),用(1.1)或(1.2)的形式该当如何表示? 譬如,数0和数1该写成什么样呢?

定义1.2 若a为十进有限小数$a = p + 0.a_1\cdots a_m$,其中p为整数,$a_j \in \{0, \cdots, 9\}$,那么a的十进表示为

$$a = p + 0.a_1\cdots a_m0\cdots, \tag{1.3}$$

它的小数点后从第$m+1$位开始全是0,我们把这样的数叫做以0为循环节的小数.

定义1.2的规定与我们的常识一样.按照这个规定,我们可以写

$$0 = 0 + 0.00\cdots, \ 1 = 1 + 0.00\cdots. \tag{1.4}$$

那么，整数0所对等的标准列是每项都是0的常数列，整数1所对等的标准列是每项都是1的常数列.不仅如此, 每个十进有限小数$a = p + 0.a_1\cdots a_m$所对等的标准列本质都是常数列,此标准列从第m向开始往后,每项都是a本身.

理解(1.1)中的实数α的关键在于把它看成是(1.2)中与它对等的标准列$\widetilde{\alpha}$.当然，反过来，任意给定一个形如(1.2)的标准列$\widetilde{\alpha}$,也就确定了唯一一个与它对等的形如(1.1)的实

数α.现在,“实数”在我们脑子里,不仅可用(1.1)的记号表示,同时也可以用(1.2)的记号表示.记号(1.2)的重要用途是可用来规定实数之间的四则运算:加、减、乘、除.从而$\mathbb{R}$成为一个算术系统.

比例数之间的加、减、乘、除运算法则是熟知的. 自然地想到可以在形如(1.2)的标准列$\widetilde{\alpha} := \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$和$\widetilde{\beta} := \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$，对应的项$\alpha_n$和$\beta_n$之间进行所要做的运算, 运算出一个新的比例数列. 在大多数情况下它不是标准列.然而,作为加减乘除运算的结果,虽然不必再是标准列, 但却丝毫不失标准列的本质属性,即它们都是**基本列**.于是我们就可以按照这一特性,把它们回归成为标准列,并作为运算的最终结果.

> 比例数列收敛的概念 设给定一个比例数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. 如果不管正整数k多大,都找得到相应的正整数$N = N(k)$,使得只要号码$m, n > N$,就有$|a_m - a_n| < k^{-1}$,那么就说$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$是**基本列**.如果不管正整数k多大,都找得到相应的正整数$N = N(k)$,使得只要号码$n > N$,就有$|a_n| < k^{-1}$,那么就说$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$**收敛到零**.如果有比例数a 使得比例数列$\{a_n - a\}_{n=1}^{\infty}$收敛到零,就说$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛到$a$记作$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,或简单地$a_n \to a\,(n \to \infty)$.

这种叙述数列极限的语句,简称为$k^{-1} - N$语言,是我们的常识性语言.

很明显,根据定义1.2, **每个有限小数都是它所对等的标准列的极限**.此性质正是“实数的表示”的本性.后面在定义了实数间的“距离”之后, 我们就能证明此事.

明显的是,**收敛的数列必定是基本的.**也就是说,“基本”性,乃是收敛的必备属性. 上面定义的两个数列的“相加”、“相减”、“相乘”、“相除”诸运算的重要性质是,它们保持基本性.也就是说, 两个基本列经过诸项“相加”、“相减”、“相乘”、“相除(要附带条件)”所成的数列仍然是基本的. 为了说清这件事,先规定一些记号.

设$\widetilde{f} := \{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\widetilde{g} =: \{g(n)\}_{n=1}^{\infty}$,是比例数列(随便怎样的比例数列).规定它们的和以及乘积分别为$\widetilde{f} + \widetilde{g} := \{f(n) + g(n)\}_{n=1}^{\infty}$ 以及 $\widetilde{f}\widetilde{g} := \{f(n)g(n)\}_{n=1}^{\infty}$. 规定$\widetilde{f}$减去$\widetilde{g}$的差为$-\widetilde{f} := \{-f(n)\}_{n=1}^{\infty}$.

如果对于一切n都有$f(n)\mathbb{N}_+e0$,那么规定$(\widetilde{f})^{-1} := \{\big(f(n)\big)^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$.如果存在$N \in \mathbb{N}_+$使得$f(N)=0$而当$n>N$时,$f(n)\mathbb{N}_+e0$,那么规定$(\widetilde{f})^{-1} := \{\big(f(n+N)\big)^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$.在这两种情况下，规定$\widetilde{g}$除以$\widetilde{f}$的商为$\widetilde{g}(\widetilde{f})^{-1}$.

应该注意，如果$\widetilde{f}$是标准列，而$f(n)$不全为零，那么必定存在正整数k和m,使得只要$n>m$就必有$|f(n)|>k^{-1}$. 此事在定义实数的倒数时要用到.请作为习题予以证明.

我们有下面的定理.

定理1.1　任给基本列$\widetilde{f}$, $\widetilde{g}$. 那么

(a) 和$\widetilde{f}+\widetilde{g}$ 积$\widetilde{f}\widetilde{g}$,以及差$-\widetilde{f}$都是基本列.

(b) 如果存在正整数k和m,使得当$n>m$时$|f(n)|>k^{-1}$,那么$(\widetilde{f})^{-1}$仍是基本列,从而商$\widetilde{g}(\widetilde{f})^{-1}$也是基本列.

不同的两个基本列,如果都收敛到同一个数(在建立实数的表示之前,只谈比例数),它们有什么关系呢? 它们的“差”,即逐项相减所成的数列,必定收敛到零.这是很重要的.这导致下面的概念.

<u>比例数列等价的概念</u> 设$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$和$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$是两个比例数列.如果数列$\{a_n-b_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛到零,就说$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$和$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ **等价**.

如果仅着眼于收敛的结果的话,彼此等价的基本列实在都是同一个东西.这是“等价”的内在涵义. 下述定理对于规定实数的算术运算具有桥梁的作用.

定理1.2　任给一个比例数的基本列,存在唯一一个标准列与之等价.

现在,借助于标准列,我们就可以精确地规定实数的算术运算.

定义1.3 (实数的四则运算)　设$\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$都是标准列. 规定实数α与实数β的和、差以及乘积分别为与$\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta}$、$\widetilde{\alpha}-\widetilde{\beta}$ 以及$\widetilde{f}\widetilde{g}$等价的标准列所对等的实数，分别记作$\alpha+\beta$,$\alpha-\beta$ 以

及$\alpha\beta$. 如果$\alpha\mathbb{N}_+e0$(也就是说,(1.1)中的a_n不全为零), 那么把与$(\widetilde{\alpha})^{-1}$等价的标准列所对等的实数记作$\alpha^{-1}$,叫做$\alpha$的**倒数**. 规定$\alpha^{-1}\beta$为$\beta$与$\alpha$的商,也记作$\dfrac{\beta}{\alpha}$.

我们已经知道的比例数的全体$\mathbb{Q}$是这样一个算术系统,其中0和1是两个特殊的元素,任何数加上0都不变,任何数乘以1也不变, 任何数乘以0都得0. 四则运算还满足交换律、结合律、分配律;关于加法的"逆元素(负数)"概念，关于乘法的"逆元素(非零数的倒数)"的概念，也都是我们熟知的. 在代数学中这样的算术系统叫做"域".

现在我们已经由定义1.1 规定了实数的表示. 并由定义1.3进一步，规定了实数的四则运算,从而$\mathbb{R}$成为一个与$\mathbb{Q}$一样的算术系统. 其中,任何数加上$0+0.00\cdots$都不变,任何数乘以$1+0.00\cdots$也不变, 任何数乘以$0+0.00\cdots$都得$0+0.00\cdots$.由此,从算术运算的角度来看,定义1.2是完全恰当的. 同样容易看到,对于有限小数的算术运算, 定义1.3规定的算法也是与熟知的算法完全一致的.

定义1.2并没有对于全部比例数规定十进表示.后面在讨论不以0为循环节的循环小数时我们就会把一切比例数表示出来,并且说明定义1.3规定的算法与$\mathbb{Q}$中的熟知的算法完全一致.

定义1.4 (实数的大小)　给定实数$r=p+0.a_1a_2a_3\cdots$,其中$p\in\mathbb{Z}$. 如果$p\geq 0$ 而p以及诸a_n不全是零,则称r为正数,记做$r>0$; 如果$p<0$,则称r为负数,记做$r<0$.若实数a,b满足$a-b>0$,则说a大于b记做$a>b$, 或说b小于a记做$b<a$.把"不大于"记做"$\leq$","不小于"记做"$\geq$".

定义1.5 (实数的绝对值)　设r为实数.令

$$|r|=\begin{cases} r, & 若\ r\geq 0,\\ -r, & 若\ r<0.\end{cases}$$

称$|r|$为r的**绝对值**.两个实数的差的绝对值叫做它们之间的**距离**.

例1.1　设实数

$$\alpha=0.a_1a_2a_3\cdots,\qquad \beta=0.b_1b_2b_3\cdots.$$

如果存在一个数$k \in \mathbb{N}_+$,使得$a_k < b_k$,而当$j < k$时$a_j = b_j$.那么$\alpha < \beta$.

例1.2 根据例1.1,如果实数$\alpha = 0.\overbrace{0\cdots0}^{\text{n个}}a_{n+1}a_{n+2}\cdots$ 那么

$$0 \leq \alpha < 0.\overbrace{0\cdots0}^{\text{n-1个}}100\cdots = 10^{-n}.$$

于是我们说,α与0的距离小于10^{-n}.

定义1.6 (实数列的收敛) 设$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$是一个实数列, a是一个实数. 如果对于任给的$\varepsilon > 0$,总找得到$N \in \mathbb{N}_+$, 使得只要$n > N\ (n \in \mathbb{N}_+)$,就有$|a_n - a| < \varepsilon$, 即$a_n$与$a$的距离小于$\varepsilon$, 那么就说数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛到$a$,记做

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

在实数范围内,作为定义,一个数列如果不收敛,就叫做是发散的.

下述定理是重要的,它说出了实数的表示(定义1.1)的实质.

定理1.3 设$\widetilde{\alpha} = \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$是一个标准列(见(1.2)). 那么实数$\alpha$(见(1.1))是这个数列的极限,即

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n.$$

证 记$\delta_n = \alpha - \alpha_n$. 根据定义1.3,当$n > 2$时

$$\delta_n = 0.0\cdots0a_{n+1}a_{n+2}\cdots\cdots.$$

于是根据例2, $0 \leq \delta_n \leq 10^{-n}$. 于是我们断定$\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$, 即$\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$. □

请使用定理1.3,作为习题证明:循环小数是比例数(的表示),不循环小数不是比例数.简称非比例数为非比数.

注1.2 比例数的英文写法是rational number,过去被翻译成“有理数”,不妥.相应地, irrational number被译为“无理数”也不妥.

定理1.4 $\mathbb{R}$是完备的,就是说,$\mathbb{R}$中的基本列一定收敛.

证 设$\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$是$\mathbb{R}$中的基本列.把实数$f(n)$写成十进小数

$$f(n) = m_n + 0.a_1^n a_2^n a_3^n \cdots, \quad m_n \in \mathbb{Z}, \ \ a_k^n \in \{0, 1 \cdots, 9\}, \ k \in \mathbb{N}_+.$$

令比例数

$$g(n) = m_n + 0.a_1^n a_2^n a_3^n \cdots a_n^n, \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

按定义1.3和定义1.4,

$$0 \le f(n) - g(n) < 10^{-n}.$$

于是,比例数列$\{g(n)\}_{n=1}^{\infty}$ 与数列$\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$等价.把与$\{g(n)\}_{n=1}^{\infty}$等价的标准列记做$\widetilde{h} = \{h(n)\}_{n=1}^{\infty}$, 把与$\widetilde{h}$对等的实数记为$h$.根据定理1.3

$$\lim_{n\to\infty} h(n) = h.$$

从而,与$\widetilde{h}$等价的实数列$\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$收敛到$h \in \mathbb{R}$. □

根据定理1.4, 一个数列收敛的充分必要条件为它是基本列.这就是在实数域中数列收敛的Cauchy准则.