ZOJ 3415 Zhou Yu

http://acm.zju.edu.cn/onlinejudge/showProblem.do?problemCode=3415

对于固定的 m 种花色，设血为 n 滴的时候的期望值为 $e(n)$

根据判定树，容易有：

$$e(n)=\frac{1}{m}\cdot e(n)+\frac{m-1}{m}\cdot e(n-1)+1 \qquad \cdots \quad 1$$

$$e(n-1)=\frac{1}{m}\cdot e(n)+\frac{m-1}{m}\cdot e(n-2)+1 \qquad \cdots \quad 2$$

$$\vdots$$

$$e(2)=\frac{1}{m}\cdot e(3)+\frac{m-1}{m}\cdot e(1)+1$$

$$e(1)=\frac{1}{m}\cdot e(2)+\frac{m-1}{m}\cdot e(0)+1 \qquad \cdots \quad 3$$

$$e(0)=0$$

由 1 式得：

$$\begin{aligned}e(n)&=e(n-1)+\frac{m}{m-1}\\&=e(n-1)+m\cdot\left[\left(\frac{1}{m-1}\right)^1\right]\end{aligned}$$

把 1 式代入 2 式，得：

$$e(n-1)=\frac{1}{m}\cdot\left[e(n-1)+\frac{m}{m-1}\right]+\frac{m-1}{m}\cdot e(n-2)+1$$

化简，得：

$$\begin{aligned}e(n-1)&=e(n-2)+\left(\frac{m}{m-1}\cdot\frac{1}{m}+1\right)\cdot\frac{m}{m-1}\\&=e(n-2)+\left(\frac{1}{m}\right)^1\cdot\left(\frac{m}{m-1}\right)^2+\left(\frac{1}{m}\right)^0\cdot\left(\frac{m}{m-1}\right)^1\\&=e(n-2)+m\cdot\left(\frac{1}{m-1}\right)^2+m\cdot\left(\frac{1}{m-1}\right)^1\\&=e(n-2)+m\cdot\left[\left(\frac{1}{m-m}\right)^1+\left(\frac{1}{m-1}\right)^2\right]\end{aligned}$$

根据这种代入规律，可得 3 式可以化简为：

$$e(1)=e(0)+m\cdot\left[\left(\frac{1}{m-1}\right)^{1}+\left(\frac{1}{m-1}\right)^{2}+\cdots+\left(\frac{1}{m-1}\right)^{n}\right]$$

设 $e(i)=e(i-1)+g(n+1-i)$，即有：

$$g(1)=m\cdot\left[\left(\frac{1}{m-1}\right)^{1}\right]$$

$$g(2)=m\cdot\left[\left(\frac{1}{m-1}\right)^{1}+\left(\frac{1}{m-1}\right)^{2}\right]$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}g(n)&=m\cdot\left[\left(\frac{1}{m-1}\right)^{1}+\left(\frac{1}{m-1}\right)^{2}+\cdots+\left(\frac{1}{m-1}\right)^{n}\right]\\&=m\cdot\frac{\left(\frac{1}{m-1}\right)^{1}\cdot\left[1-\left(\frac{1}{m-1}\right)^{n}\right]}{1-\left(\frac{1}{m-1}\right)}\qquad\cdots\quad m\neq 2\\&=\frac{m}{m-2}\cdot\left[1-\left(\frac{1}{m-1}\right)^{n}\right]\end{aligned}$$

当 $m=2$ 时，$g(n)$ 退化成：

$$g(n)=m\cdot\left[1^{1}+1^{2}+\cdots+1^{n}\right]=m\cdot n$$

因为 $e(0)=0$，所以：

$$\begin{aligned}e(1)&=g(n)\\e(2)&=g(n)+g(n-1)\\&\vdots\\e(n)&=g(n)+g(n-1)+\cdots+g(1)\\&=\sum_{i=1}^{n}g(i)\end{aligned}$$

当 $m \neq 2$ 时，有：

$$
\begin{aligned}
e(n) &= \sum_{i=1}^{n} g(i) \\
&= \frac{m}{m-2}\cdot\left[1-\left(\frac{1}{m-1}\right)^{1}\right]+\frac{m}{m-2}\cdot\left[1-\left(\frac{1}{m-1}\right)^{2}\right]+\cdots+\frac{m}{m-2}\cdot\left[1-\left(\frac{1}{m-1}\right)^{n}\right] \\
&= \frac{m}{m-2}\cdot\left\{\left[1-\left(\frac{1}{m-1}\right)^{1}\right]+\left[1-\left(\frac{1}{m-1}\right)^{2}\right]+\cdots+\left[1-\left(\frac{1}{m-1}\right)^{n}\right]\right\} \\
&= \frac{m}{m-2}\cdot\left\{n-\left[\left(\frac{1}{m-1}\right)^{1}+\left(\frac{1}{m-1}\right)^{2}+\cdots+\left(\frac{1}{m-1}\right)^{n}\right]\right\} \\
&= \frac{m}{m-2}\cdot\left\{n-\frac{\left(\frac{1}{m-1}\right)^{1}\cdot\left[1-\left(\frac{1}{m-1}\right)^{n}\right]}{1-\left(\frac{1}{m-1}\right)}\right\} \\
&= \frac{m}{(m-2)^{2}}\cdot\left[\left(\frac{1}{m-1}\right)^{n}+n\cdot(m-2)-1\right]
\end{aligned}
$$

当 $m = 2$ 时，有：

$$
\begin{aligned}
e(n) &= \sum_{i=1}^{n} g(i) \\
&= m\cdot 1+m\cdot 2+\cdots+m\cdot n \\
&= m\cdot(1+2+\cdots+n) \\
&= m\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2} \\
&= 2\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2} \qquad \cdots \quad (m=2) \\
&= n\cdot(n+1)
\end{aligned}
$$

综上所述，得公式：

$$
e(n)=\begin{cases} n\cdot(n+1) & m=2 \\ \dfrac{m}{(m-2)^{2}}\cdot\left[\left(\dfrac{1}{m-1}\right)^{n}+n\cdot(m-2)-1\right] & m\neq 2 \end{cases}
$$