

一、选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时，无穷小量 $\ln(1+x \tan x)$ 是 x 的几阶无穷小

- (A) 1; (B) 2; (C) $\frac{3}{2}$; (D) $\frac{1}{2}$

2. 设 $f(x) = e^{\sin \pi x}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2-x) - f(1)}{x-1} =$

- (A) π ; (B) $-\pi$; (C) e^π ; (D) $e^{-\pi}$

3. 微分方程 $y' + 2y = e^x$ 的通解为

- (A) ce^{-x} ; (B) $e^{-x} + c$; (C) $e^{-2x}(e^x + c)$; (D) $e^{2x}(e^{-x} + c)$

4. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}} (x+1)^n$ 的收敛域是

- (A) $[-2, 0]$; (B) $(-2, 0)$; (C) $[-2, 0)$; (D) $(-2, 0]$

5. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1} =$

- (A) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$; (B) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$; (C) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; (D) $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

6. 设 $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 0$, 则

- (A) $a=1$; (B) $a=-2$; (C) $a=-1$ 或 $a=2$; (D) $a=1$ 或 $a=-2$

二、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设 $y = \cos(\sqrt[3]{x^2+1})$, 则 $dy =$ _____

2. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + xf(x)}{x^3} = \frac{1}{3}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+f(x)}{x^2} =$ _____

3. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x + \cos^3 x) dx =$ _____

4. 设圆周 $C: x^2 + y^2 = a^2 (a > 0)$, 则 $\int_C (3x^2 + 2xy + 4y^2) ds =$ _____

5. 设 R^3 中的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 若向量组 $\beta_1 = \alpha_1 + \lambda\alpha_2, \beta_2 = 2\alpha_2 + \alpha_3,$

$\beta_3 = 2\alpha_3 - \lambda\alpha_1$ 线性相关, 则 $\lambda =$ _____

6. 设 A 为三阶实矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为线性无关的三维列向量, 且满足

$$A\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad A\alpha_2 = 2\alpha_2 + \alpha_3, \quad A\alpha_3 = 2\alpha_2 + 3\alpha_3,$$

若 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)B$, 则矩阵 $B =$ _____

三、计算题 (每小题 8 分, 共 40 分)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{(1 + \cos x)x^3}$

2. 计算二重积分 $\iint_D \max\{xy, 2\} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$

3. 设函数 $Z = f(x^2 \ln y, y \sin x)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。其中: $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数。

4. 设四阶线性方程组 $Ax = b$ 的三个解为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 且 $\alpha_1 = (1, 1, 1, 1)^T$,

$\alpha_2 + \alpha_3 = (2, 3, 4, 5)^T$, 如果矩阵 A 的秩 $r(A) = 3$, 求方程的通解

5. 设向量 $\alpha_1 = (2, 1, -3)^T, \alpha_2 = (1, -2, 3)^T, \alpha_3 = (8, -1, -3)^T$

(1) α_1, α_2 是否线性相关? (说明理由)

(2) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是否在一个平面上? 如果不是说明理由; 如果是写出他们之间的关系式

四、证明题 (每小题 6 分, 共 12 分)

1. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $g'(x) \neq 0$, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得:

$$\frac{f(\xi) - f(a)}{g(b) - g(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

2. 设 A 为 n 阶方阵, E 是可逆阵, 且 $A^2 - 5A + 6E = 0$, 证明 $A + E$ 可逆。

五、应用题 (本题 12 分)

设曲线 $y = \sqrt{x-2}$, 求 (1) 曲线经过点 $(1, 0)$ 的切线方程; (2) 曲线、切线及 x 轴所围的平面图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积。