APIO2017 商旅

题目描述

一个图有N个点M条单向边，每条边有其固定的长度（时间消耗）

有K中物品，在每个点可以买或者卖某些物品，不同的点价格可能不同，同一时间只能保留一个物品在身上

问盈利效率最高的环的效率是多少

$1 \leq N \leq 100$

$1 \leq M \leq 9900$

$1 \leq K \leq 1000$

子任务一

特点：只能在1号点买入物品

预处理出从1号点到其他点的最短路和其他点到1号点的最短路

枚举在1号点买哪种物品，再枚举在哪个点卖出，根据预处理的最短路计算出盈利效率，选择最大的一种方案

时间复杂度：$\boldsymbol{O(N*K)}$

子任务二

特点：$N \leq 50, K \leq 50$,每条边的时间消耗均为1

首先来说，最优情况每条边最多只会经过一次

由于点数和物品数量很小，边的长度也很小，所以可以全部记录状态中

枚举起点s，定义状态$dp[u][w][m]$：

当前走到了点u，已经走过的w条边，当前背包中的物品编号为m($m = 0$表示没有物品)

转移的时候分情况讨论

时间复杂度：$O(50^4)$

子任务三

特点：任何节点均可以买卖任何物品，并且同一物品在同一节点上的买价和卖价相同

子任务四

特点：无

$$\mathbf{ans} = \mathbf{max}\left\{\frac{\text{总收益}}{\text{总时长}}\right\}$$

子任务四

考虑二分答案，即对于一个给定的获利效率$\boldsymbol{k}$，判断能不能达到：

$$\boldsymbol{max}\left\{\frac{\text{总收益}}{\text{总时长}}\right\} \geq \boldsymbol{k}?$$

$$\text{总收益} - \text{总时长} * \boldsymbol{k} \geq \boldsymbol{0}?$$

相当于说，能否找到一个环路使得总收益减总时长的$\boldsymbol{k}$倍大于等于$\boldsymbol{0}$

子任务四

为了将情况一般化，我们可以假象有一个特殊的物品，该物品在每个点的售价都是$\mathbf{0}$

这样，我们就可以认为在路途中任何时刻均至少有一个物品

考虑最优情况，一定是从某个点出发，卖了某个物品，然后走到另一个点卖出，在买新的物品，继续走，最后回到出发点

$$\boldsymbol{P1} \rightarrow \boldsymbol{P2} \rightarrow \boldsymbol{P3} \rightarrow \cdots \rightarrow \boldsymbol{Pk} \rightarrow \boldsymbol{P1}$$

在$\boldsymbol{P1}$买某个物品然后在$\boldsymbol{P2}$卖掉，在$\boldsymbol{P2}$买某个物品在$\boldsymbol{P3}$卖掉，以此类推

所以，我们可以建一个新图，任意两个点$\boldsymbol{i}$到$\boldsymbol{j}$之间有一条有向边

边权为在第$\boldsymbol{i}$个点买一个物品，在$\boldsymbol{j}$号点卖出物品，走这样一段路的最小值

判断在新图上有没有权值非负的环即可

子任务四

预处理:$\boldsymbol{w[i][j]}$ = 在第$\boldsymbol{i}$个节点购买某个物品然后再第$\boldsymbol{j}$个节点卖出的最大获利

预处理:$\boldsymbol{d[i][j]}$ = 从节点$\boldsymbol{i}$到节点$\boldsymbol{j}$个最小时间消耗

对于需要判断的$\boldsymbol{k}$:

$$\boldsymbol{dis[i][j] = w[i][j] - d[i][j] * k}$$

在对$\boldsymbol{dis}$**数组跑一边Floyd即可**

时间复杂度：$\boldsymbol{O(N\text{^}2 * K + N\text{^}3 * log(ans))}$