众生之门 题解

xiaolilsq

2024 年 2 月 1 日

得分数据分析

得分	5	13	15	23	30	100
人数	1	17	1	2	4	1

子任务编号	1	2	3	4	5	6	7
通过人数	26	24	5	1	1	3	1

题解：调整法全对了！构造全错了！

题意

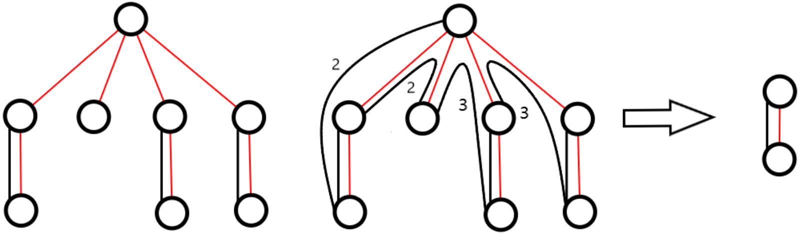
给定一棵 n 个点的树，记 $\operatorname{dist}(u,v)$ 表示 u 和 v 之间简单路径的边数，再给定 s,t，要求你找到一个 1 到 n 的排列 $p_1,p_2,\ldots,p_n$ 满足 $p_1=s,p_n=t$ 且 $\bigoplus_{i=1}^{n-1}\operatorname{dist}(p_i,p_{i+1})$ 尽量小，这里的 $\oplus$ 表示的是按位异或。如果有多种方案你只需要输出其中一种即可。
要求做到 $O(n)$。

一些简单的观察

我们总可以构造一个排列使得 $\forall 1 \le i < n$ 有 $\operatorname{dist}(p_i, p_{i+1}) \le 3$，所以答案必然小于等于 3。同时答案的最低位会被 $\operatorname{dist}(s, t)$ 的奇偶性唯一确定，所以我们只需要考虑答案的倒数第二位。
如果我们构造的排列存在一个结构可以决定让当前答案是否异或 2，那么总是可以通过这个结构做到最优。

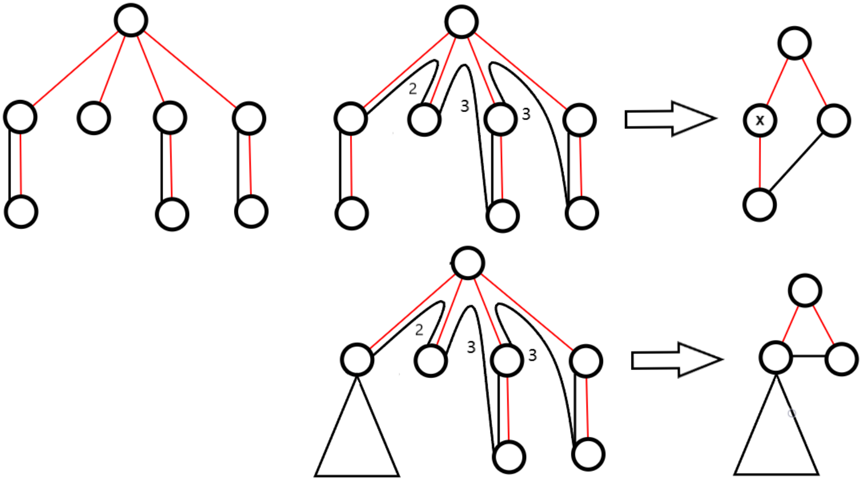
一些简单的观察

具体来说，我们可以把一棵子树连成这样一条链，满足从子树的根开始，从根的某个儿子或者根自身结束，并且走过的所有路径长度都小于等于 3。如下图归纳即可。我们可以称这种结构为“子树链”。



一些简单的观察

除此之外我们还可以构造出两种很有用的结构：一种是连接了子树所有后代的“后代链”；另一种是仅保留了一个儿子的子树，其余子树都和这个儿子连接起来的“儿子链”。



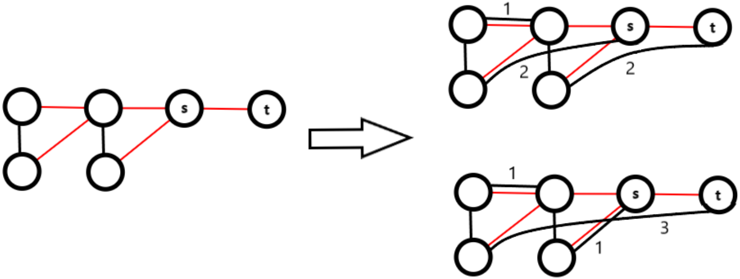
一些简单的观察

通过以上观察我们可以很简单地把 s 到 t 全部连接起来，并且容易发现 $\operatorname{dist}(s,t)$ 较大的可以通过这种连接方式归约到更小的结构，所以我们按照 $\operatorname{dist}(s,t)$ 从小到大构造。

$\mathrm{dist}(s, t) = 1$

s, t 无本质区别，不妨假设 s 这边子树深度不浅于 t 这边子树深度。
先看 t 为叶子的情况：

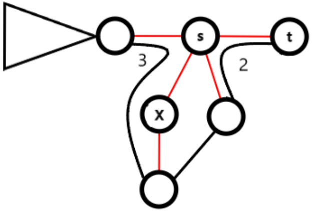
- 若 s 这边深度小于等于 1，图为菊花，容易发现答案唯一。
- 若 s 这边深度等于 2，构造儿子链结构，手玩出两种异或为 2 的不同连接方案。如下图。



$\mathrm{dist}(s, t) = 1$

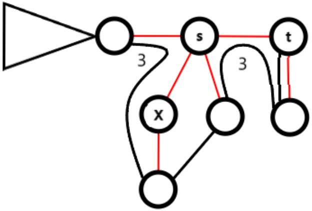
先看 t 为叶子的情况：

- 若 s 这边深度大于 2，不断通过后代链结构把 t 连接到 s 的最长链儿子位置，重复此操作归约到 s 深度恰为 2。如下图。



$\mathrm{dist}(s, t) = 1$

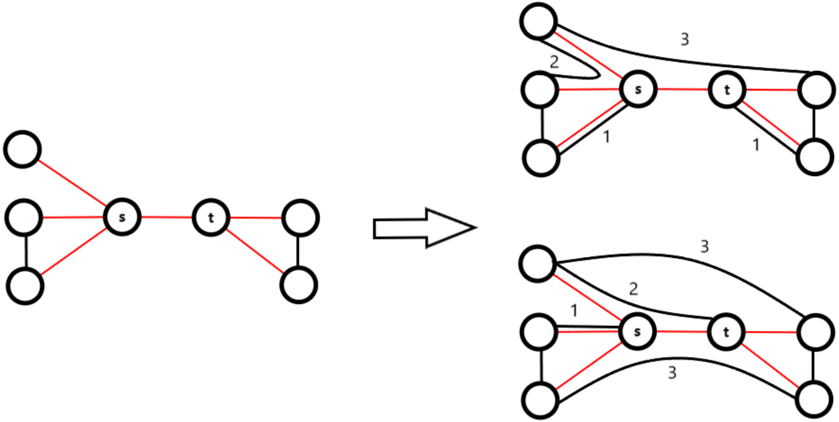
事实上，上面的归约并不需要 t 为叶子的条件，当 s 深度大于 2 时，只需要加上 t 这边的子树链，t 不为叶子也可以归约到“s 这边深度等于 2 且 t 为叶子”的情况。如下图。



于是 $\mathrm{dist}(s, t) = 1$ 且 s 深度大于 2 我们也做完了。通过 s, t 两边子树不同深度的区分，我们只剩下三种情况 $1-1, 2-1, 2-2$。

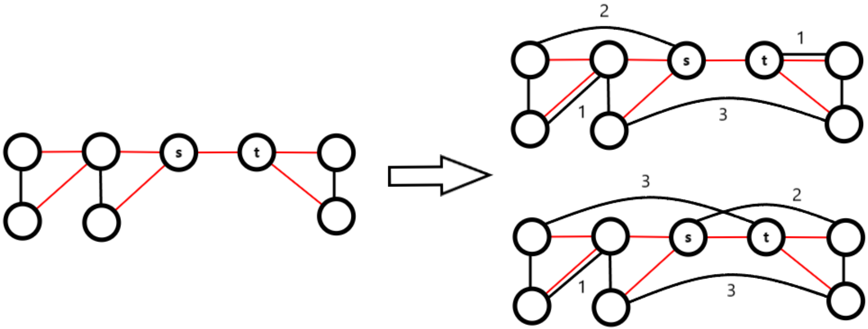
$\text{dist}(s, t) = 1$

先看 $1-1$，如果 s 和 t 都只有恰好一个儿子，那么图为四个点的链，答案唯一。
如果有一个有多于一个儿子，不妨假设 s 有至少两个儿子，任取 s 的一个儿子，把其它儿子连成儿子链，把 t 的所有儿子连成儿子链，手玩出两种异或为 2 的不同连接方案。如下图。



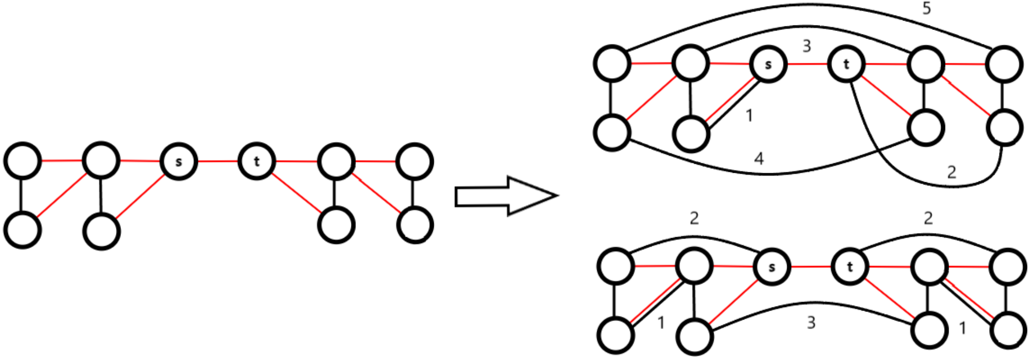
$\operatorname{dist}(s,t)=1$

然后是 $2-1$，同样是构造儿子链手玩。如下图。



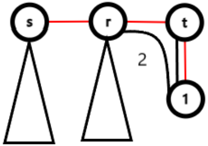
$\mathrm{dist}(s, t) = 1$

最后是 $2-2$，同样是构造儿子链手玩。如下图。



$\mathrm{dist}(s, t) = 2$

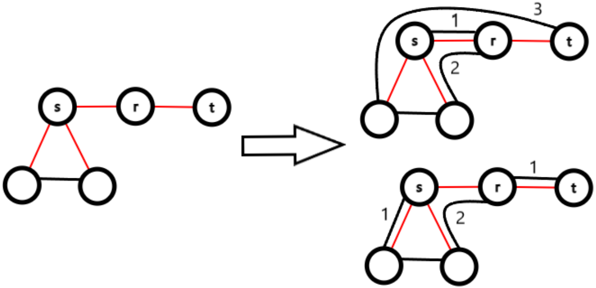
在构造 $\mathrm{dist}(s, t) = 2$ 之前，我们先回忆一下，在 $\mathrm{dist}(s, t) = 1$ 的所有情况中，只有菊花和四个点的链有可能取不到最优，其它情况都能取到最优。
$\mathrm{dist}(s, t) = 2$ 就有三个结点，分别设为 s, r, t，如果其中任意一个深度大于等于 2，我们就可以通过 s 或 t 其中一个的子树链再连到 r，从而归约到一种一定可以取到最优的 $\mathrm{dist}(s, t) = 1$ 情形。



所以我们只需要考虑每个子树深度小于等于 1 的情况。同样地，根据深度不同，分为 $0-0-0, 0-1-0, 1-0-0, 1-1-0, 1-0-1, 1-1-1$ 六种情形。

$\mathrm{dist}(s, t) = 2$

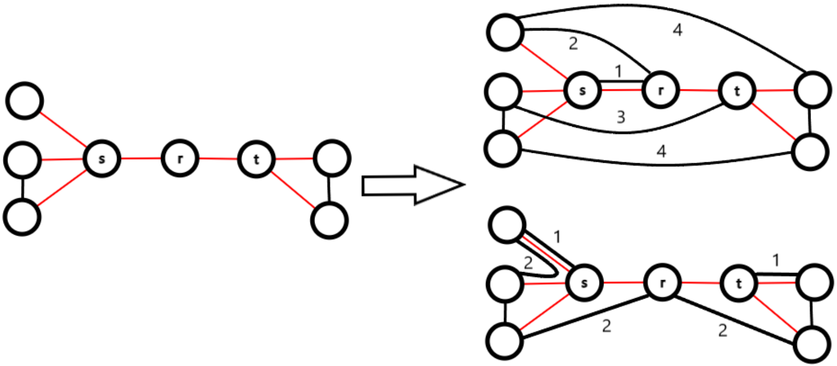
$0-0-0$ 和 $0-1-0$ 都是以 r 为根的菊花，容易证明答案唯一。
$1-0-0$ 构造 s 的儿子链，然后手玩出两种方案。



$1-1-0$，直接让 t 连接 r 的儿子链，立即归约到 $1-0-0$ 的情况。

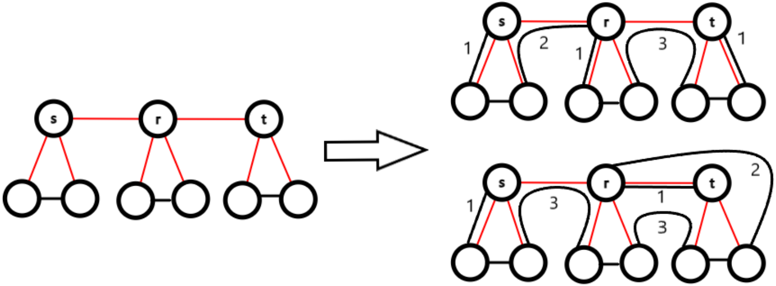
$\mathrm{dist}(s, t) = 2$

$1-0-1$ 的情况和 $1-1$ 的情况类似，如果 s, t 都只有一个儿子，那么答案显然唯一。
如果 s 有至少两个儿子，除了 s 任意一个儿子外构造儿子链，t 构造儿子链，然后手玩出两种方案。



$\mathrm{dist}(s, t) = 2$

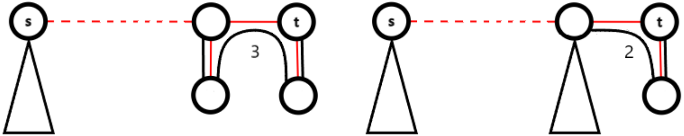
只剩下 $1-1-1$ 的情况，构造 s, r, t 的儿子链，然后手玩出两种方案。



$\mathrm{dist}(s, t) > 2$

考虑归约到 $\mathrm{dist}(s, t) = 2$ 的情形，由上面的讨论得知我们只要归约到的 s 或者 t 为叶子那么就一定可以取到最优值。

我们可以通过构造 t 的子树链和 t 前面结点的子树链，再把它们连接起来，让 $\mathrm{dist}(s, t)$ 减一，同时强迫 t 成为叶子（方法 1）。当然我们可以只构造 t 的子树链，然后和 t 前面结点连接起来，让让 $\mathrm{dist}(s, t)$ 减一，同时保留 t 子树为 t 前面结点的子树（方法 2）。



如果 s, t 其中存在一个有至少一个叶子，那么就用方法 1 不断地把另一个靠过去。

如果 s, t 都为叶子，并且 s 到 t 的链中存在一个点有至少一个儿子，那么就把靠的近的用方法 2 走到该点，靠得远的距离该点至少为 2，使用方法 1 直到距离恰好为 2 即可。

否则说明为 s 到 t 的链，这是平凡的。

其它东西

可以尝试乱搞，通过一些方法归约到点数较少的情况，然后状压 dp。
看完全篇容易发现没有使用距离大于 5 的长度，根据这个树形 dp 是否可行？事实上用到 $4,5$ 的长度都是很少的情况。
如果觉得这题太简单，可以想想一般无向连通图上可以做吗。
可能相关的题目（?）：[POI2013] MUL-Multidrink
~~为什么这题是找 the square of a tree 上的哈密顿路径？因为从今天这道题可以看出 the cube of a tree 上的哈密顿路径总是存在。~~
~~今天这题英文名为 livingac 是因为“众生之门”的英文是 Living All Creatures，当然也可以理解为祝福大家全都 AC。~~

感谢聆听！
祝大家新年快乐！