18. 设A为n阶复矩阵, $\lambda_1 \le \cdots \le \lambda_n$是$-\dfrac{\mathrm{i}}{2}(A-\overline{A}')$的全体特征值, 证明: 对$A$的任一特征值$\lambda$, 有$\lambda_1 \le \operatorname{Im}\lambda \le \lambda_n$.

证明 先证明如下引理:

引理1 设AHermite,则A的对角元与特征值均为实数,且对角元均在最小特征值和最大特征值之间.

证明 显然A对角元与特征值是实数.且A酉相似于对角矩阵$D=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}, \lambda_1 \le \cdots \le \lambda_n$.
从而$A-\lambda_1 I$半正定,因此A对角元均不小于λ_1,$A-\lambda_n I$半负定,从而对角元均不超过λ_n □

回到原题,设U酉,使得$U^{-1}AU$上三角,对角元为特征值,而$\overline{U^{-1}AU}'=U^{-1}\overline{A}'U$下三角.于是
$U^{-1}\left(-\dfrac{\mathrm{i}}{2}(A-\overline{A}')\right)U$的对角元均为$-\dfrac{\mathrm{i}}{2}(\lambda-\overline{\lambda})=\mathrm{Im}\lambda$, 由引理即得原结论.

□