15. 设A为n阶正定实对称阵,$x=(x_1,\cdots,x_n)'$, $f(x)=x'Ax$为对应的实二次型.设去掉的第i行和第i列后的主子阵为A_i.证明:$f(x)$在$x_i=1$的条件下的最小值为$\dfrac{|A|}{|A_i|}$

证明 不失对称性,不妨设$i=n$,设$A=\begin{pmatrix}A_n & B\\ B' & c\end{pmatrix}$.则$A_n$正定,设$P'A_nP=I$.

从而$(\boldsymbol{x}',1)A\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{x}P'^{-1},1)\begin{pmatrix}P & 0\\0 & 1\end{pmatrix}'A\begin{pmatrix}P & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P^{-1}\boldsymbol{x}\\1\end{pmatrix}$,其中$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{n-1}$,记$\boldsymbol{y}=P^{-1}\boldsymbol{x}$,从而上式等于

$$(\boldsymbol{y}',1)\begin{pmatrix}P & 0\\0 & 1\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}A_n & B\\B' & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}\\1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{y},1)\begin{pmatrix}I & P'B\\B'P & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}\\1\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n-1}(y_i^2+2(P'B)_iy_i)+c$$

从而最小值为$c-\sum(P'B)_i^2=c-B'PP'B=c-B'A_n^{-1}B$,下面证明

$$c-B'A^{-1}B=\frac{\det\begin{pmatrix}A_n & B\\B' & c\end{pmatrix}}{\det A_n}=\frac{\det A}{\det A_n}$$

事实上,设$Q^{-1}A_nQ=D$,Q正交,$D=\mathrm{diag}\{d_1,\cdots,d_{n-1}\}$对角,从而$\det A=d_1\cdots d_{n-1}$,而

$$\det\begin{pmatrix}A_n & B\\B' & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q^{-1} & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_n & B\\B' & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}D & QB\\B'Q^{-1} & c\end{pmatrix}$$

而由于D对角,设$B'Q^{-1}=(b_1,\cdots,b_{n-1})$,将第$k$行的若干倍加到最后一行使上述矩阵上三角,知上述矩阵的行列式为

$$\left(c-\frac{b_1^2}{d_1}-\cdots-\frac{b_{n-1}^2}{d_{n-1}}\right)d_1\cdots d_{n-1}=(c-(B'Q^{-1})D^{-1}(QB))\det A=(c-B'A_n^{-1}B)\det A$$

于是原命题得证. □