14. 设$a_1,\cdots,a_n$是n个互异的正实数,试用两种方法证明:n阶实对称阵$A=(a_{ij})$是正定阵,其中$a_{ij}=\dfrac{1}{a_i+a_j}$

证明 **证法一:** 由正定的定义,只需证明对于任意的$x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{R}$不全为0,$\sum\limits_{i,j}\dfrac{x_ix_j}{a_i+a_j}>0.$

令$f(x)=\sum\limits_{i,j}\dfrac{x_ix_j}{a_i+a_j}x^{a_i+a_j}$.故$f'(x)=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_ix^{a_i}\right)^2>0(x>0)$,故$f(1)>f(0)=0$.从而得证.

证法二: 在$C[0,1]$上定义内积$(f(x),g(x))=\displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$,上述矩阵则满足$a_{ij}=(x^{a_i},x^{a_j})$,为一组线性无关向量内积的矩阵,从而正定.

证法三: 事实上,A及其顺序主子式的行列式可求出,具体值见白皮书第一章,因此正定. □