13. 设AB均为n阶半正定实对称阵,满足$\mathrm{tr}(AB)=0$.求证$\mathrm{tr}(AB)=0$

证明　由于A半正定,设$P'AP=C=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,设$D=P^{-1}BP'^{-1}=\begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix}$,从而$\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(P'ABP'^{-1})=\mathrm{tr}(CD)=\mathrm{tr}\begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,从而$\mathrm{tr}\,D_1=0$,又由于$B$半正定,从而$D_1$半正定,因此$D_1$对角元非负.从而$D_1=0$,从而$D_2=D_3=0$,从而$CD=0$,因此$AB=0$ □

注　其中用到了半正定矩阵如下性质：若$a_{ii}=0$,则对任意$j,a_{ij}=a_{ji}=0$,证明是容易的.