12. 设A为n阶正定对称阵,B为n阶实方阵,使得$\begin{pmatrix} A & B' \\ B & A^{-1} \end{pmatrix}$为半正定阵.证明$B$的特征值都落在复平面内的单位圆内.

证明　由A正定,故存在可逆矩阵C,使得$C'AC = I_n$,因此$C^{-1}A^{-1}C'^{-1} = I_n$考虑

$$\begin{pmatrix} C' & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B' \\ B & A^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C'^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C'AC & C'B'(C^{-1})' \\ C^{-1}BC & C^{-1}A(C')^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & P' \\ P & I_n \end{pmatrix}$$

其中$P = C^{-1}BC$.从而上述矩阵也半正定,其作为Hermite矩阵也正定,因此对于任意$X, Y \in \mathbb{C}^n$, $X^*X + Y^*Y + 2\mathrm{Re}(Y^*(C^{-1}BC)X) \geq 0$.

若B有模长大于1的特征值λ_0,设$B\alpha = \lambda_0\alpha$,取$X = C^{-1}\alpha$,从而$Y^*(C^{-1}BC)X = \lambda_0 Y^*X$.因此,有对于任意$Y \in \mathbb{C}^n$,均有$X^*X + Y^*Y + \lambda_0 Y^*X \geq 0$.设$X = C^{-1}\alpha = (x_1, \cdots, x_n)'$已知,对于$Y = (y_1, \cdots, y_n)'$,从而有

$$\sum_{i=1}^{n}(|x_i|^2 + |y_i|^2) + 2\mathrm{Re}(\lambda_0 \sum_{i=1}^{n} \overline{y_i}x_i) \geq 0$$

取$y_i = -|x_i|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_i}$,其中调整$\theta_i$使得$2\mathrm{Re}(\lambda_0\overline{y_i}x_i) = -2|\lambda_0\overline{y_i}x_i|$(即使得$\lambda_0\overline{y_i}x_i$的辐角为$\pi$,$\theta$总是存在的),代入,即得

$$2(1 - |\lambda_0|)\sum_{i=1}^{n}|x_i^2| \geq 0$$

显然矛盾，从而原命题得证. $\square$