11. 设$f(z)$是收敛半径为$+\infty$的复幂级数.$A\in M_n(\mathbb{C})$,$g(\lambda)=\det(f(\lambda)I_n-f(A))$,证明:$g(A)=0$

证明 利用上三角化容易给出一个证明,这里利用另一个方法给出一个其他的证明.

设H为所有收敛半径为$+\infty$的复幂级数构成的集合.取向量空间V和线性变换φ,且A为φ的矩阵表示,对于$h(\lambda)\in H$,定义乘法$h(\lambda)\cdot\alpha=h(\varphi)\alpha$.类似地我们可以引入幂级数构成的矩阵与向量的形式矩阵乘法.

从而,设$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$是$V$的一组基,于是

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)f(\varphi)=(f(\varphi)\alpha_1,\cdots,f(\varphi)\alpha_n))=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\mathrm{diag}\{f(\lambda),f(\lambda),\cdots,f(\lambda)\}.$$

从而$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)(f(\lambda)I_n-f(\varphi))=(0,0,\cdots,0)$. 取$f(\lambda)I_n-f(A)$的伴随矩阵$B$,将上式两端乘$B$,得

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\det(f(\lambda)I_n-f(A))I_n=(0,0,\cdots,0)\Rightarrow(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)g(\varphi)=0$$

从而,$g(\varphi)$在一组基下的作用为0,于是$g(\varphi)=0$ $\square$