10. 设V是数域$\mathbb{K}$上的n维线性空间,φ是V上的线性变换,证明：φ的极小多项式在$\mathbb{K}$上不可约的充分必要条件是对于任意φ的不变子空间φ,存在φ的不变子空间W,使得$V=U\oplus W$

证明 一方面,若对于φ的任意不变子空间均存在不变补空间.首先,我们证明：对于$g\in\mathbb{K}[x]$,$g(\varphi)=0\iff g=0$. 事实上,设$g^l(\varphi)=0$,考虑$\mathrm{Ker}(g^{l-1})(\varphi)\subsetneq V$,其存在不变补空间$W$.对$\beta\in W$,考虑$g(\varphi)(\beta)$.由于$g^{l-1}(\varphi)(g(\varphi))(\beta)=0$,从而$g(\varphi)\beta\in\mathrm{Ker}\,g^{l-1}(\varphi)\cap W=0$.从而$W\subseteq\mathrm{Ker}(g(\varphi))\subseteq\mathrm{Ker}(g^{l-1}(\varphi))\iff W=0$, 于是$g^{l-1}(\varphi)=0$.因此只能$l=1$.

因此,设φ的最小多项式为$p_1^{l_1}(x)p_2^{l_2}(x)\cdots p_s^{l_s}(x)$,考虑$p_1(\varphi)p_2(\varphi)\cdots p_k(\varphi)$为幂零变换,由上述结论知其为0,从而$\varphi$的最小多项式没有重因式.

另一方面,设φ的最小多项式无重因式,设为$p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)$,由准素分解定理

$$V=\mathrm{Ker}(p_1(\varphi))\oplus\cdots\oplus\mathrm{Ker}(p_s(\varphi))$$

记$W_i=\mathrm{Ker}(p_i(\varphi))$由准素分解的性质(见博文《小短文3-线性变换的相似标准型》),对于不变子空间U,有

$$U=(W_1\cap U)\oplus(W_2\cap U)\cdots\oplus(W_s\cap U)$$

因为,我们只需证明对于每个$W_i\cap U$在W_i中均有不变补空间即可.记$\varphi_i=\varphi|_{W_i}$,其最小多项式为$p_i(x)$,由于$\mathbb{K}[\varphi]$构成一域，可将W_i看成其上的线性空间,由于$U\varphi-$不变,故$U\cap W_i$为W_i看做域$\mathbb{K}[\varphi]$上线性空间的子空间,取其在$(W_i)_{\mathbb{K}[\varphi]}$上的补空间即满足条件. □

注 (i) 这样的线性变换φ称作是**半单**(semi-simple)的

(ii) 后半部分的本质是将V看成环$\mathbb{K}[x]/(p_i(x))$上的模,由于p_i素,故其为一域.而其任意子空间就是$\varphi-$不变子空间.

(iii) 后半部分还可以如下证明：

称不变子空间U为$\varphi-$**可容的**(admissible),如果对于任意$\beta\in V$,若$f(\varphi)\beta\in U$,则存在$\alpha\in U$使得$f(\varphi)\alpha\in U$.利用循环分解定理的推广(见Hoffman《linear algebra》),$U\varphi-$可容,等价于U存在不变补空间.于是,给出了判断是否存在不变补空间的判定方法.