8. 设n阶实方阵$A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & & & & \\ 1 & a_2 & 1 & & & \\ & 1 & a_3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & a_{n-1} & 1 \\ & & & & 1 & a_n \end{pmatrix}$

'

(1) 求证: A有n个互不相同的特征值;

(2) 试求实线性空间$C(A) = \{B \in M_n(\mathbb{R}) \mid AB = BA\}$的维数.

证明 (1) 由第6题知,A可对角化.因此A的每个特征值的代数重数等于几何重数.如果我们能证明每个特征值的几何重数为1,则可推出有n个互不相同的特征值.

事实上,设λ为A的一个特征值,而设$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$为$\lambda$所对应的一个特征向量.从而

$$\begin{pmatrix} \lambda - a_1 & -1 & & & & \\ -1 & \lambda - a_2 & -1 & & & \\ & -1 & \lambda - a_3 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & \lambda - a_{n-1} & -1 \\ & & & & -1 & \lambda - a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

因此

$$\begin{cases} x_2 = (\lambda - a_1)x_1 \\ x_3 = (\lambda - a_2)x_2 - x_2 \\ \quad \vdots \\ x_n = (\lambda - a_{n-1})x_{n-1} - x_{n-2} \end{cases}$$

因此,一旦x_1确定整个特征向量遍随之唯一确定.因此,每个特征子空间的维数均为1,原命题得证.

(2) 由于A的特征值互不相同,从而存在可逆矩阵P,使得$P^{-1}\mathrm{diag}\{d_1, \cdots, d_n\}P$,其中$d_1, \cdots, d_n$互不相同.从而如果$B \in C(A)$,$B$必然形如$P^{-1}DP$,其中$D$是一个对角矩阵.因此,容易验证$P^{-1}E_{11}P, \cdots P^{-1}E_{nn}P$为$C(A)$的一组基,其中$E_{ij}$为只有第$i$行第$j$列为1,其余均为0的基本矩阵.从而$\dim C(A) = n$.

□