7. 设A, B, AB都是n阶实对称阵, 证明: 若s是AB的一个特征值, 则存在A的特征值λ_0和B的特征值μ_0, 使得$s = \lambda_0\mu_0$.

证明 由第6题的结论知,A, B均可对角化.我们先给出如下引理

引理1 若矩阵A, B均可对角化,且$AB = BA$,则A, B可同时对角化.即存在一个可逆矩阵P,使得$P^{-1}AP, P^{-1}BP$均为对角矩阵.

引理的证明放在最后

回到原命题,由于AB是实对称矩阵,从而$AB = (AB)' = B'A' = BA$.因此A, B可交换,又由于A, B均可对角化.从而A, B可同时对角化.设$P^{-1}AP = \mathrm{diag}\{a_1, \cdots, a_n\}$, $P^{-1}BP = \mathrm{diag}\{b_1, \cdots, b_n\}$,从而$P^{-1}ABP = \mathrm{diag}\{a_1b_1, \cdots, a_nb_n\}$,因此$AB$的特征值为$a_1b_1, \cdots, a_nb_n$,从而原题得证.

最后给出引理的证明：

考虑一个线性空间,其两个线性变换所对应的矩阵为A, B.我们也用A, B表示这两个线性变换.考虑A的任一特征子空间W,由于W为B的不变子空间,从而$A|_W, B|_W$可对角化且可交换,如果对空间的维数进行归纳.则$A|_W, B|_W$在某组基下的矩阵表示为对角矩阵.考虑W取遍所有的A的特征子空间,则将每个特征子空间使得两个线性变换的矩阵表示均为对角矩阵的基拼起来,得到的一组基遍使得A, B在此基的表示下为对角矩阵.

最后还应注意当A和B均只有一个特征子空间的时候,归纳法是失效的(由于空间的维数没有减少).但此时结论是显然的,因为A, B只能为恒等变换I的常数倍. □