5. 设A为n阶方阵,证明:若下列条件之一成立,则矩阵方程$AX+XA=X$只有零解.

(1) A为幂零阵,即存在正整数m,使得$A^m=0$;

(2) A中所有元素都为1;

(3) A的特征值全为偶数;

(4) A中所有特征值的模长都小于$\frac{1}{2}$.

证明 (1) 假设$A^m=0$,为了得到$X=0$,我们将原式两边同时左乘A^{m-1}得$A^mX+A^{m-1}XA=A^{m-1}X$,即$A^{m-1}X(A-I)=0$,由于A幂零,故$A-I$可逆(由于A特征值均为0).因此$A^{m-1}X=0$,同理$XA^{m-1}=0$.

注意到此时我们从$A^mX=0,XA^m=0$推出了$A^{m-1}X=0,XA^{m-1}=0$,因此自然的用$m-1$代替m,得到$A^{m-2}X=0,XA^{m-2}=0$,不断这样下去,便有$X=0$. (也可以说是利用归纳法)

(2) 当A的所有元素均为1时,利用矩阵乘法的表达式,式子$AX+XA=X$可以叙述为:X的每个元素等于其所在的行与所在的列的元素之和.于是,我们把X中所有元素加起来.一方面,它等于X中所有元素的和,另一方面,它又等于X中所有元素的n倍(每行每列被加了n次).因此X的元素和为0.再固定X的某一行,将X中这一行的数相加,那么这个和等于n倍这行的和加上X中所有元素的和.即X中每行的和为0,每列的和也为0.最后,再利用X中每个元素等于其所在行与所在列的元素之和,得到$X=0$.

(3) 由A的特征值全为偶数,即A的最小多项式全为偶根,记A的最小多项式为$\prod\limits_{i=1}^{k}(x-a_i)$,其中$a_i$可以相同.

由$AX+XA=X$,得到$(A-a_kI)X+X(A-a_kI)=(1-2a_k)X$,两边右乘$\prod\limits_{i=1}^{k-1}(A-a_iI)$,得到

$$(A-a_kI)X\prod_{i=1}^{k-1}(A-a_iI)=(1-2a_k)X\prod_{i=1}^{k-1}(A-a_iI)\Longrightarrow(A+(a_k-1)I)X\prod_{i=1}^{k-1}(A-a_iI)=0$$

而由于$-(a_k-1)$为奇数,不是A的特征值,从而$A+(a_k-1)I$可逆,因此$X\prod\limits_{i=1}^{k-1}(A-a_iI)=0$,类似地$\left(\prod\limits_{i=1}^{k-1}(A-a_iI)\right)X=0$,这样我们相当于“消去”了$(A-a_kI)$,那么类似地也可以“消去”$(A-a_{k-1}I)$,不断这样下去便得到$X=0$.(也可以说是对一次因子的个数进行归纳)

(4) 利用与上问类似的方法,记A的最小多项式为$\prod\limits_{i=1}^{k}(x-z_i)$,其中$z_i$可以相同并且$|z_i|<\frac{1}{2}$.

由$AX+XA=X$,得到$(A-z_kI)X+X(A-z_kI)=(1-2z_k)X$,两边右乘$\prod\limits_{i=1}^{k-1}(A-z_iI)$,得到

$$(A-z_kI)X\prod_{i=1}^{k-1}(A-z_iI)=(1-2z_k)X\prod_{i=1}^{k-1}(A-z_iI)\Longrightarrow(A+(z_k-1)I)X\prod_{i=1}^{k-1}(A-z_iI)=0$$

同样地,由于$|1-z_k|>\frac{1}{2}$,因此不是特征值,从而$A+(z_k-1)I$可逆.剩下的方法和上道题完全相同. □

注 为了给出第(2)问的一种更加“代数”化的证明,现叙述如下:设X的第i行第j列的元素为x_{ij},从而有

$$x_{ij}=\sum_{k=1}^{n}(x_{ik}+x_{kj}) \tag{1}$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(x_{ik}+x_{kj})=n\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}$$

因此,

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=0$$

再根据(1)式,

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(x_{ik}+x_{kj})=n\sum_{i=1}^{n}x_{ij}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=n\sum_{i=1}^{n}x_{ij}$$

从而对任意j,$\sum\limits_{i=1}^{n}x_{ij}=0$,同理,对任意$i$,$\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=0$,再由(1)式,得$x_{ij}=0$,因此$X=0$.