4. 设$A=(a_{ij})$ 为n阶复矩阵, 证明: 存在正数δ, 使得对任意的$s\in(0,\delta)$,下列矩阵均可对角化:

$$A(s)=\begin{pmatrix} a_{11}+s & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+s^2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}+s^n \end{pmatrix}.$$

证明　由于如果一个矩阵的特征多项式在复数域内无重根,则它一定可以对角化.因此,我们去证明,存在δ,使得任意的$s\in(0,\delta)$该矩阵的特征多项式无重根.我们知道特征多项式即

$$\begin{vmatrix} \lambda-a_{11}-s & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22}-s^2 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}-s^n \end{vmatrix}.$$

而判断一个多项式是否有重根可以从这个多项式的判别式是否为0看出.而由于$|\lambda I-A(s)|$的判别式是一个关于其系数的一个多项式,也就是关于矩阵元的多项式,同时就自然是关于s的多项式$P(s)$.那么,只要这个多项式不是0多项式,故零点个数有限.从而δ就一定存在.

那么问题转化为去证明$P(s)$不是零多项式,只需找一个s使得$P(s)\neq 0$即可.即找一个s使得$|\lambda I-A(s)|$无重根即可.我们注意到当s特别大时,由特征值的估计定理知,特征值都落在下列圆盘中.

$$|z-a_{kk}-s^k|\leq\sum_{i\neq k}|a_{ki}|(k=1,2,\cdots,n)$$

而当s足够大时,由于右边为定值,这些圆盘必有n个连通分支,即n个互不相同的特征值.

从而原命题得证. □