3. 设$A_1,\cdots,A_n\in M_n(\mathbb{K}),g(x)\in\mathbb{K}[x]$,使得$g(A_1),\cdots,g(A_n)$都是非异阵.证明:存在$h(x)\in\mathbb{K}[x]$,使得$g(A_i)^{-1}=h(A_i)$对所有的$1\leq i\leq m$都成立.

证明 首先我们说明：对于可逆矩阵$X\in M_n(\mathbb{K})$,存在一个常数项非零的多项式$P(x)\in\mathbb{K}[x]$使得$P(X)=0$.

事实上,由于$X^{n^2},X^{n^2-1},\cdots,X,I$在$K$中线性相关($n$阶矩阵构成的线性空间的维数为$n^2$),从而存在常数$a_{n^2},\cdots,a_1,a_0$使得$a_{n^2}X^{n^2}+\cdots+a_1X+a_0I=0$.设$k$为$a_k\neq0$的最小下标,从而$X^k(a_{n^2}X^{n^2-k}+\cdots+a_k)=0$,由于$X$非异,从而$a_{n^2}X^{n^2-k}+\cdots+a_k=0$.从而命题得证.下面回到原命题.

由上述命题知,存在常数项非0的多项式$f_1(x),\cdots,f_m(x)$使得$f_1(g(A_1))=0,\cdots,f_m(g(A_m))=0$.令$F(x)=f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x)$, 从而对于任意$i,F(g(A_i))=0$.设$F(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots a_1x+a_0(a_0\neq0)$,于是$F(g(A_i))=a_kg(A_i)^k+a_{k-1}g(A_i)^{k-1}+\cdots a_1g(A_i)+a_0I=0$,从而

$$a_kg(A_i)^{k-1}+a_{k-1}g(A_i)^{k-2}+\cdots+a_1=-a_0(g(A_i))^{-1}(1\leq i\leq m)$$

于是,令$h(x)=-\dfrac{F(g(x))-a_0}{a_0g(x)}$满足条件. □