2. 设方阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a & 0 \\ a-2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$可对角化,求$a$的值.

解 计算可知$\det(\lambda I-A)=\lambda(\lambda-1)^2(\lambda-a)$ 若$a\neq 1$,则根据可对角化的条件知$\operatorname{rank}(I-A)=2$,而

$$I-A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & -a & 0 \\ 2-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

从而后三排应当线性相关.此时只能有$a=2$

若$a=1$,则应有$\operatorname{rank}(I-A)=1$,由上面知也不满足条件.从而$a=2$

$\square$