1. 设A是n阶对合阵,即$A^2=I_n$,证明:$n-\mathrm{tr}(A)$为偶数, 并且$\mathrm{tr}(A)=n$的充要条件是$A=I_n$.

证明　下面给出利用不同知识的两种证明

证明1: 首先我们利用特征值给出一个简单的证明.

由于对合矩阵的特征值一定为1或者-1,而$\mathrm{tr}(A)$为所有特征值之和,从而$n-\mathrm{tr}(A)\equiv 2n(\mathrm{mod}2)$,从而$n-\mathrm{tr}(A)$为偶数.

而当$\mathrm{tr}(A)=n$时,所有特征值均为1.从而没有-1这个特征值,于是$A+I$可逆.于是由于$(A+I)(A-I)=0\Rightarrow A-I=0$，从而$A=I$,而当$A=I$时显然$\mathrm{tr}(A)=n$

证明2: 下面不利用特征值给出一个证明：

我们知道相似的矩阵具有相同的迹,因此我们只需要找一个与A相似的矩阵,使得我们容易讨论A的迹,那么整个问题就水落石出了.而我们知道相似矩阵就是同一个线性变换在不同基下的矩阵表示,因此,我们的问题转化为对于一个对合变换T找一组基,使得T在这组基下的矩阵表示尽量简单.下面给出完整的证明.

首先我们有如下熟知的引理

引理1　设V是一个n维线性空间,T是V上的一个对合变换.则

$$V=\mathrm{Ker}(T-I)\oplus\mathrm{Ker}(T+I)$$

其中,I代表空间V上的恒同变换.

引理的证明放在最后.下面回到原命题

设V是一个任意n向量空间,任取V的一组基,考虑线性变换T,使得T在这组基下的矩阵表示为A.

由引理,取$\mathrm{Ker}(T-I)$的一组基$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_k\}$,$\mathrm{Ker}(T+I)$的一组基$\{\beta_1,\cdots,\beta_{n-k}\}$,从而它们构成全空间一组基. 而由于$\alpha_i\in\mathrm{Ker}(T-I)\Longrightarrow(T-I)\alpha_i=0\Longrightarrow T\alpha_i=\alpha_i$,同理$T\beta_i=-\beta_i$.

从而T在这组基下的矩阵表示为

$$B=\begin{pmatrix}I_k & 0\\ 0 & -I_{n-k}\end{pmatrix}$$

从而,我们知道$A\sim B\Longrightarrow\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)=k-(n-k)=-n+2k$ 从而$n-\mathrm{tr}(A)=2(n-k)$为偶数.从而前一半命题得证.

下面考虑后一半命题,当$\mathrm{tr}(A)=n$当且仅当$-n+2k=n\Longrightarrow k=n$,于是$\mathrm{Ker}(T-I)=V$,这时$T$为恒等变换，故$A=I_n$

最后给出引理的证明；

引理的证明：我们先证明$\mathrm{Ker}(T-I)\cap\mathrm{Ker}(T+I)=\{0\}$,事实上,设$\alpha\in\mathrm{Ker}(T-I),\alpha\in\mathrm{Ker}(T+I)\Rightarrow(T-I)\alpha=0,(T+I)\alpha=0\Rightarrow\Rightarrow 2I\alpha=0\Rightarrow 2\alpha=0\Rightarrow\alpha=0$

再证明$\mathrm{Ker}(T-I)+\mathrm{Ker}(T+I)=V$, 事实上,对于每个$\alpha\in V$,我们有$\alpha=\dfrac{1}{2}((T+I)\alpha-(T-I)\alpha)$,而$\dfrac{1}{2}(T+I)\alpha\in\mathrm{Ker}(T-I),\dfrac{1}{2}(T-I)\alpha\in\mathrm{Ker}(T+I)$.从而$\alpha\in\mathrm{Ker}(T-I)+\mathrm{Ker}(T+I)$.这样就证明了引理 □

注　事实上，在引理的证明中,我们承认了$2\alpha=0\Longrightarrow\alpha=0$,这对于特征不为2的域都是成立的.