6 重积分的变量替换

注 该文中, 可测函数在不加修饰的情况下恒指 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 可测函数.

重积分变量替换公式及其证明是困扰我多年的一个问题, 关于问题的严格叙述与证明对于不同的书有不同的描述, 且很多书都以口胡为主. 诚然, 在 Riemann 积分的框架下, 并不方便给出变量替换公式的严格描述与证明. 最大的困难在于开集上的积分定义五花八门. 但是, 在 Lebesgue 积分的框架下, 整个命题将变得清晰, 证明也严格. 今对此做出整理.

6.1 变量替换公式

定理 1 (重积分变量替换公式) 设 $U,V \subset \mathbb{R}^n$ 是开集,$T: U \to T(U) = V$ 是一个 C^1 同胚.f 是 $T(U)$ 上的可积函数或非负可测函数, 则 $(f \circ T) \cdot |J(T)|$ 在 U 上可积或非负可测, 且

$$\int_{T(U)} f \,\mathrm{d}m = \int_U (f \circ T) \cdot |JT| \,\mathrm{d}m$$

其中,C^1 同胚是指 $f: U \to V$ 是同胚, 且 f 和 f^{-1} 均为 C^1 映射.$JT(x)$ 代表 T 在 x 处的 Jacobi 行列式.$\mathrm{d}m$ 代表 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度.

6.2 证明前的几点说明

1. 该公式可以简记为 $\mathrm{d}(T^*m) = |J(T)| \,\mathrm{d}m$. 具体描述见后

2. 证明过程中需要用到如下结论.

   命题 1 设 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 可积或非负可测,$T \in L(\mathbb{R}^n)$ 为一线性变换, 则 $f \circ T$ 可积或非负可测, 且

   $$\int f \,\mathrm{d}m = \int (f \circ T) |\det T| \,\mathrm{d}m$$

   特别地, 对于可测集 $A \subset \mathbb{R}^n$,$T(A)$ 可测, 且 $m(T(A)) = |\det T| m(A)$

   该命题可视为定理的特殊情况, 但原定理证明依赖此命题.

   命题 2 $U,V \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, 设 $f: U \to V$ 是 C^1 的, 则 f 将零测集映为零测集.

6.3 重积分变量替换公式的证明

我们用不同的方法给出两个证明, 参考文献分别为 GTM142 和 Folland. 两个证明异曲同工, 都是通过由特殊到一般的过程.

6.3.1 证明 1

分四部分进行. 四部分的证明彼此独立.

第一步是最精细最本质的一步, 后面三步基本上可以称之为抽象废话, 就是各种实变函数理论的精彩应用.

第一步 先证明, 对于闭长方体 $R \subset U$, 有

$$m(T(R)) = \int_R |JT| \,\mathrm{d}m$$

即对于长方体的特征函数, 该命题成立.

证明 思路如下: 由于 $T:C^1$, 故 T 局部约为线性映射, 故局部上可用命题 1, 对误差进行相应的估计即可.

由于 T 为 C^1 映射, 故对于 $a\in R$, 有

$$T(x)=T(a)+DT(x-a)+\varphi_a(x-a)$$

其中 φ_a 为高阶小量. 具体地, 任意 ε, 存在 δ, 使得只要 $x,a\in R,|x-a|<\delta$, 就有 $|\varphi_a(x-a)|<\varepsilon|x-a|$

将 R 划分为直径不超过 δ 的 N 个小长方体 $\{R_i\}_{i=1}^n$. 对于某个固定的小闭长方体 R_j, 记中心为 a_j, 则对 $x\in R_j$

$$T(x)=T(a)+DT(x-a_j)+\varphi(x-a_j) \tag{1}$$

经过平移, 我们的核心问题可以转化为, 设 L 是一可逆线性变换, 且 $T(x)=Lx+\varphi(x)$,$\varphi(x)\le\varepsilon|x|$,$T(0)=0$, 要估计 $T(R)$, 其中 R 是一个以 0 为中心的长方形. 由于 $L^{-1}T(x)=x+L^{-1}\varphi(x)$, 我们可以认为 $S:=L^{-1}T$ 离恒同映射很接近. 记 $C=\|L^{-1}\|$, 则 $|L^{-1}\varphi(x)|\le\varepsilon\|L^{-1}\||x|=\varepsilon C|x|$, 因此我们知道 $(1-C\varepsilon)R\subset T(R)\subset(1+\varepsilon C)R$, 从而

$$(1-\varepsilon C)^n m(R)\le m(L^{-1}T(R))\le(1+\varepsilon C)^n m(R)$$

即

$$|\det L|(1-\varepsilon C)^n m(R)\le m(T(R))\le|\det L|(1+\varepsilon C)^n m(R)$$

由于 $\|DT^{-1}\|$ 在 T 上有最大值 M, 从而由 1和刚才的讨论知, 对于每个 R_j 有

$$|\det DT(a_j)|(1-\varepsilon M)^n m(R_j)\le m(T(R_j))\le|\det DT(a_j)|(1+\varepsilon M)^n m(R_j)$$

由命题 2,R_j 重叠部分像零测, 故 $m(T(R))=\sum m(T(R_j))$, 将上式求和, 知随着 $\varepsilon\to 0$, 上式约可记为

$$\sum_{j=1}^N|\det DT(a_j)|m(R_j)\le m(T(R))\le\sum_{j=1}^N|\det DT(a_j)|m(R_j)$$

而左边即趋于 $\int_R|JT|\,\mathrm{d}m$(Riemann 和), 即得证. 上式关于小量的估计是平凡的. □

第二步 对于 $T(R)$ 上的连续函数 $g:T(R)\to\mathbb{R}$, 有

$$\int_{T(R)}g\,\mathrm{d}m=\int_R(g\circ T)|JT|\,\mathrm{d}m$$

证明 由 g 在 $T(R)$ 上一致连续与 T 在 R 上一致连续, 知可将 R 分为若干小闭长方形 R_j, 使得 g 在 $T(R_j)$ 的振幅小于 ε. 设在 R_j 上,$m_j\le g\le m_j+\varepsilon$ 从而由第一步知

$$(m+\varepsilon)\int_{R_j}|JT|\ge\int_{T(R_j)}g\ge m\int_{R_j}|JT|$$

求和后令 $\varepsilon\to 0$ 即得. □

第三步 对于 $T(R)$ 上的可积或非负可测 $f:T(R)\to\mathbb{R}$, 有 $(g\circ T)|JT|$ 可积或非负可测, 且

$$\int_{T(R)}g\,\mathrm{d}m=\int_R(g\circ T)|JT|\,\mathrm{d}m$$

证明 先讨论 f 可积. 令 $g_n\in C_c(U)$ 为 U 上紧支集连续函数, 满足 $g_n\xrightarrow{\text{a.e.},L^1}f$. 故此时 $(g_n\circ T)|JT|\xrightarrow{\text{a.e.}}(f\circ T)|JT|$, 且由第二步, 知 $(g_n\circ T)|JT|$ 为 $L^1(R)$ 中 Cauchy 列, 从而 $(g_n\circ T)|JT|\xrightarrow{L^1}(f\circ T)|JT|$, 由此

$$\int_R(f\circ T)|JT|=\lim\int_R(g_n\circ T)|JT|=\lim\int_{T(R)}g_n=\int_{T(R)}f$$

若 f 为非负函数, 则将 f 记为可积简单函数的极限用单调收敛定理即得. □

第四步 证明原命题

证明 设 $U = \cup R_j$ 为可数个闭长方体的并集. 在每个长方体上由第三步, 再结合控制收敛定理或单调收敛定理即得. $\square$

6.4 几点附录