1. 设A是n阶对合阵,即$A^2=I_n$,证明:$n-\mathrm{tr}(A)$为偶数, 并且$\mathrm{tr}(A)=n$的充要条件是$A=I_n$.

证明　下面给出利用不同知识的两种证明

证明1: 首先我们利用特征值给出一个简单的证明.

由于对合矩阵的特征值一定为1或者-1,而$\mathrm{tr}(A)$为所有特征值之和,从而$n-\mathrm{tr}(A)\equiv 2n(\mathrm{mod}2)$,从而$n-\mathrm{tr}(A)$为偶数.

而当$\mathrm{tr}(A)=n$时,所有特征值均为1.从而没有-1这个特征值,于是$A+I$可逆.于是由于$(A+I)(A-I)=0\Rightarrow A-I=0$，从而$A=I$,而当$A=I$时显然$\mathrm{tr}(A)=n$

证明2: 下面不利用特征值给出一个证明：

我们知道相似的矩阵具有相同的迹,因此我们只需要找一个与A相似的矩阵,使得我们容易讨论A的迹,那么整个问题就水落石出了.而我们知道相似矩阵就是同一个线性变换在不同基下的矩阵表示,因此,我们的问题转化为对于一个对合变换T找一组基,使得T在这组基下的矩阵表示尽量简单.下面给出完整的证明.

首先我们有如下熟知的引理

引理1　设V是一个n维线性空间,T是V上的一个对合变换.则

$$V=\mathrm{Ker}(T-I)\oplus\mathrm{Ker}(T+I)$$

其中,I代表空间V上的恒同变换.

引理的证明放在最后.下面回到原命题

设V是一个任意n向量空间,任取V的一组基,考虑线性变换T,使得T在这组基下的矩阵表示为A.

由引理,取$\mathrm{Ker}(T-I)$的一组基$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_k\}$,$\mathrm{Ker}(T+I)$的一组基$\{\beta_1,\cdots,\beta_{n-k}\}$,从而它们构成全空间一组基. 而由于$\alpha_i\in\mathrm{Ker}(T-I)\Longrightarrow(T-I)\alpha_i=0\Longrightarrow T\alpha_i=\alpha_i$,同理$T\beta_i=-\beta_i$.

从而T在这组基下的矩阵表示为

$$B=\begin{pmatrix}I_k & 0\\ 0 & -I_{n-k}\end{pmatrix}$$

从而,我们知道$A\sim B\Longrightarrow\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)=k-(n-k)=-n+2k$ 从而$n-\mathrm{tr}(A)=2(n-k)$为偶数.从而前一半命题得证.

下面考虑后一半命题,当$\mathrm{tr}(A)=n$当且仅当$-n+2k=n\Longrightarrow k=n$,于是$\mathrm{Ker}(T-I)=V$,这时$T$为恒等变换，故$A=I_n$

最后给出引理的证明；

引理的证明：我们先证明$\mathrm{Ker}(T-I)\cap\mathrm{Ker}(T+I)=\{0\}$,事实上,设$\alpha\in\mathrm{Ker}(T-I),\alpha\in\mathrm{Ker}(T+I)\Rightarrow(T-I)\alpha=0,(T+I)\alpha=0\Rightarrow 2I\alpha=0\Rightarrow 2\alpha=0\Rightarrow\alpha=0$

再证明$\mathrm{Ker}(T-I)+\mathrm{Ker}(T+I)=V$, 事实上,对于每个$\alpha\in V$,我们有$\alpha=\dfrac{1}{2}\left((T+I)\alpha-(T-I)\alpha\right)$,而$\dfrac{1}{2}(T+I)\alpha\in\mathrm{Ker}(T-I)$,$\dfrac{1}{2}(T-I)\alpha\in\mathrm{Ker}(T+I)$.从而$\alpha\in\mathrm{Ker}(T-I)+\mathrm{Ker}(T+I)$.这样就证明了引理 $\square$

注　事实上，在引理的证明中,我们承认了$2\alpha=0\Longrightarrow\alpha=0$,这对于特征不为2的域都是成立的.

2. 设方阵$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&a&a&0\\a-2&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$可对角化,求$a$的值.

解 计算可知$\det(\lambda I-A)=\lambda(\lambda-1)^2(\lambda-a)$ 若$a\neq 1$,则根据可对角化的条件知$\mathrm{rank}(I-A)=2$,而

$$I-A=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1-a&-a&0\\2-a&0&0&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}$$

从而后三排应当线性相关.此时只能有$a=2$

若$a=1$,则应有$\mathrm{rank}(I-A)=1$,由上面知也不满足条件.从而$a=2$

□

3. 设$A_1,\cdots,A_n\in M_n(\mathbb{K}),g(x)\in\mathbb{K}[x]$,使得$g(A_1),\cdots,g(A_n)$都是非异阵.证明:存在$h(x)\in\mathbb{K}[x]$,使得$g(A_i)^{-1}=h(A_i)$对所有的$1\leq i\leq m$都成立.

证明 首先我们说明:对于可逆矩阵$X\in M_n(\mathbb{K})$,存在一个常数项非零的多项式$P(x)\in\mathbb{K}[x]$使得$P(X)=0$.

事实上,由于$X^{n^2},X^{n^2-1},\cdots,X,I$在$K$中线性相关($n$阶矩阵构成的线性空间的维数为$n^2$),从而存在常数$a_{n^2},\cdots,a_1,a_0$使得$a_{n^2}X^{n^2}+\cdots+a_1X+a_0I=0$.设$k$为$a_k\neq 0$的最小下标,从而$X^k(a_{n^2}X^{n^2-k}+\cdots+a_k)=0$,由于$X$非异,从而$a_{n^2}X^{n^2-k}+\cdots+a_k=0$.从而命题得证.下面回到原命题.

由上述命题知,存在常数项非0的多项式$f_1(x),\cdots,f_m(x)$使得$f_1(g(A_1))=0,\cdots,f_m(g(A_m))=0$.令$F(x)=f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x)$, 从而对于任意$i,F(g(A_i))=0$.设$F(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots a_1x+a_0(a_0\neq 0)$,于是$F(g(A_i))=a_kg(A_i)^k+a_{k-1}g(A_i)^{k-1}+\cdots a_1g(A_i)+a_0I=0$,从而

$$a_kg(A_i)^{k-1}+a_{k-1}g(A_i)^{k-2}+\cdots+a_1=-a_0(g(A_i))^{-1}(1\leq i\leq m)$$

于是,令$h(x)=-\dfrac{F(g(x))-a_0}{a_0g(x)}$满足条件. □

4. 设$A=(a_{ij})$ 为n阶复矩阵, 证明: 存在正数δ, 使得对任意的$s\in(0,\delta)$,下列矩阵均可对角化:

$$A(s)=\begin{pmatrix}a_{11}+s&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}+s^2&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}+s^n\end{pmatrix}.$$

证明 由于如果一个矩阵的特征多项式在复数域内无重根,则它一定可以对角化.因此,我们去证明,存在δ,使得任意的$s\in(0,\delta)$该矩阵的特征多项式无重根.我们知道特征多项式即

$$\begin{vmatrix}\lambda-a_{11}-s&-a_{12}&\cdots&-a_{1n}\\-a_{21}&\lambda-a_{22}-s^2&\cdots&-a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-a_{n1}&-a_{n2}&\cdots&\lambda-a_{nn}-s^n\end{vmatrix}.$$

而判断一个多项式是否有重根可以从这个多项式的判别式是否为0看出.而由于$|\lambda I-A(s)|$的判别式是一个关于其系数的一个多项式,也就是关于矩阵元的多项式,同时就自然是关于s的多项式$P(s)$.那么,只要这个多项式不是0多项式,故零点个数有限.从而δ就一定存在.

那么问题转化为去证明$P(s)$不是零多项式,只需找一个s使得$P(s)\neq 0$即可.即找一个s使得$|\lambda I-A(s)|$无重根即可.我们注意到当s特别大时,由特征值的估计定理知,特征值都落在下列圆盘中.

$$|z-a_{kk}-s^k|\leq\sum_{i\neq k}|a_{ki}|(k=1,2,\cdots,n)$$

而当s足够大时,由于右边为定值,这些圆盘必有n个连通分支,即n个互不相同的特征值.

从而原命题得证. $\square$

5. 设A为n阶方阵,证明:若下列条件之一成立,则矩阵方程$AX+XA=X$只有零解.

(1) A为幂零阵,即存在正整数m,使得$A^m=0$;

(2) A中所有元素都为1;

(3) A的特征值全为偶数;

(4) A中所有特征值的模长都小于$\frac{1}{2}$.

证明 (1) 假设$A^m=0$,为了得到$X=0$,我们将原式两边同时左乘A^{m-1}得$A^mX+A^{m-1}XA=A^{m-1}X$,即$A^{m-1}X(A-I)=0$,由于A幂零,故$A-I$可逆(由于A特征值均为0).因此$A^{m-1}X=0$,同理$XA^{m-1}=0$.

注意到此时我们从$A^mX=0,XA^m=0$推出了$A^{m-1}X=0,XA^{m-1}=0$,因此自然的用$m-1$代替m,得到$A^{m-2}X=0,XA^{m-2}=0$,不断这样下去,便有$X=0$. (也可以说是利用归纳法)

(2) 当A的所有元素均为1时,利用矩阵乘法的表达式,式子$AX+XA=X$可以叙述为:X的每个元素等于其所在的行与所在的列的元素之和.于是,我们把X中所有元素加起来.一方面,它等于X中所有元素的和,另一方面,它又等于X中所有元素的n倍(每行每列被加了n次).因此X的元素和为0.再固定X的某一行,将X中这一行的数相加,那么这个和等于n倍这行的和加上X中所有元素的和.即X中每行的和为0,每列的和也为0.最后,再利用X中每个元素等于其所在行与所在列的元素之和,得到$X=0$.

(3) 由A的特征值全为偶数,即A的最小多项式全为偶根,记A的最小多项式为$\prod_{i=1}^{k}(x-a_i)$,其中a_i可以相同.

由$AX+XA=X$,得到$(A-a_kI)X+X(A-a_kI)=(1-2a_k)X$,两边右乘$\prod_{i=1}^{k-1}(A-a_iI)$,得到

$$(A-a_kI)X\prod_{i=1}^{k-1}(A-a_iI)=(1-2a_k)X\prod_{i=1}^{k-1}(A-a_iI)\Longrightarrow(A+(a_k-1)I)X\prod_{i=1}^{k-1}(A-a_iI)=0$$

而由于$-(a_k-1)$为奇数,不是A的特征值,从而$A+(a_k-1)I$可逆,因此$X\prod_{i=1}^{k-1}(A-a_iI)=0$,类似地$\left(\prod_{i=1}^{k-1}(A-a_iI)\right)X=0$,这样我们相当于"消去"了$(A-a_kI)$,那么类似地也可以"消去"$(A-a_{k-1}I)$,不断这样下去便得到$X=0$.(也可以说是对一次因子的个数进行归纳)

(4) 利用与上问类似的方法,记A的最小多项式为$\prod_{i=1}^{k}(x-z_i)$,其中z_i可以相同并且$|z_i|<\frac{1}{2}$.

由$AX+XA=X$,得到$(A-z_kI)X+X(A-z_kI)=(1-2z_k)X$,两边右乘$\prod_{i=1}^{k-1}(A-z_iI)$,得到

$$(A-z_kI)X\prod_{i=1}^{k-1}(A-z_iI)=(1-2z_k)X\prod_{i=1}^{k-1}(A-z_iI)\Longrightarrow(A+(z_k-1)I)X\prod_{i=1}^{k-1}(A-z_iI)=0$$

同样地,由于$|1-z_k|>\frac{1}{2}$,因此不是特征值,从而$A+(z_k-1)I$可逆.剩下的方法和上道题完全相同. $\square$

注 为了给出第(2)问的一种更加“代数”化的证明,现叙述如下:设X的第i行第j列的元素为x_{ij},从而有

$$x_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(x_{ik} + x_{kj}) \tag{1}$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(x_{ik} + x_{kj}) = n\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}$$

因此,

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij} = 0$$

再根据(1)式,

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(x_{ik} + x_{kj}) = n\sum_{i=1}^{n}x_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_{ij} = n\sum_{i=1}^{n}x_{ij}$$

从而对任意j,$\sum\limits_{i=1}^{n}x_{ij} = 0$,同理,对任意$i$,$\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij} = 0$,再由(1)式,得$x_{ij} = 0$,因此$X = 0$.

7. 设A, B, AB都是n阶实对称阵, 证明: 若s是AB的一个特征值, 则存在A的特征值λ_0和B的特征值μ_0, 使得$s = \lambda_0\mu_0$.

证明 由第6题的结论知,A, B均可对角化.我们先给出如下引理

引理1 若矩阵A, B均可对角化,且$AB = BA$,则A, B可同时对角化.即存在一个可逆矩阵P,使得$P^{-1}AP, P^{-1}BP$均为对角矩阵.

引理的证明放在最后

回到原命题,由于AB是实对称矩阵,从而$AB = (AB)' = B'A' = BA$.因此A, B可交换,又由于A, B均可对角化.从而A, B可同时对角化.设$P^{-1}AP = \operatorname{diag}\{a_1, \cdots, a_n\}, P^{-1}BP = \operatorname{diag}\{b_1, \cdots, b_n\}$,从而$P^{-1}ABP = \operatorname{diag}\{a_1b_1, \cdots, a_nb_n\}$,因此$AB$的特征值为$a_1b_1, \cdots, a_nb_n$,从而原题得证.

最后给出引理的证明:

考虑一个线性空间,其两个线性变换所对应的矩阵为A, B.我们也用A, B表示这两个线性变换.考虑A的任一特征子空间W,由于W为B的不变子空间,从而$A|_W, B|_W$可对角化且可交换,如果对空间的维数进行归纳.则$A|_W, B|_W$在某组基下的矩阵表示为对角矩阵.考虑W取遍所有的A的特征子空间,则将每个特征子空间使得两个线性变换的矩阵表示均为对角矩阵的基拼起来,得到的一组基遍使得A, B在此基的表示下为对角矩阵.

最后还应注意当A和B均只有一个特征子空间的时候,归纳法是失效的(由于空间的维数没有减少).但此时结论是显然的,因为A, B只能为恒等变换I的常数倍. □

8. 设n阶实方阵$A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & & & & \\ 1 & a_2 & 1 & & & \\ & 1 & a_3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & a_{n-1} & 1 \\ & & & & 1 & a_n \end{pmatrix}$

‘

(1) 求证: A有n个互不相同的特征值;

(2) 试求实线性空间$C(A) = \{B \in M_n(\mathbb{R}) \mid AB = BA\}$的维数.

证明 (1) 由第6题知,A可对角化.因此A的每个特征值的代数重数等于几何重数.如果我们能证明每个特征值的几何重数为1,则可推出有n个互不相同的特征值.

事实上,设λ为A的一个特征值,而设$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$为$\lambda$所对应的一个特征向量.从而

$$\begin{pmatrix}\lambda-a_1 & -1 & & & & \\ -1 & \lambda-a_2 & -1 & & & \\ & -1 & \lambda-a_3 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & \lambda-a_{n-1} & -1 \\ & & & & -1 & \lambda-a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

因此

$$\begin{cases}x_2=(\lambda-a_1)x_1\\ x_3=(\lambda-a_2)x_2-x_2\\ \quad\vdots\\ x_n=(\lambda-a_{n-1})x_{n-1}-x_{n-2}\end{cases}$$

因此,一旦x_1确定整个特征向量遍随之唯一确定.因此,每个特征子空间的维数均为1,原命题得证.

(2) 由于A的特征值互不相同,从而存在可逆矩阵P,使得$P^{-1}\mathrm{diag}\{d_1,\cdots,d_n\}P$,其中$d_1,\cdots,d_n$互不相同.从而如果$B\in C(A)$,$B$必然形如$P^{-1}DP$,其中$D$是一个对角矩阵.因此,容易验证$P^{-1}E_{11}P,\cdots P^{-1}E_{nn}P$为$C(A)$的一组基,其中$E_{ij}$为只有第$i$行第$j$列为1,其余均为0的基本矩阵.从而$\dim C(A)=n$.

□

10. 设V是数域$\mathbb{K}$上的n维线性空间,φ是V上的线性变换,证明:φ的极小多项式在$\mathbb{K}$上不可约的充分必要条件是对于任意φ的不变子空间φ,存在φ的不变子空间W,使得$V=U\oplus W$

证明 一方面,若对于φ的任意不变子空间均存在不变补空间.首先,我们证明:对于$g\in\mathbb{K}[x]$,$g(\varphi)=0\Longleftrightarrow g=0$. 事实上,设$g^l(\varphi)=0$,考虑$\mathrm{Ker}(g^{l-1})(\varphi)\subsetneq V$,其存在不变补空间$W$.对$\beta\in W$,考虑$g(\varphi)(\beta)$.由于$g^{l-1}(\varphi)(g(\varphi))(\beta)=0$,从而$g(\varphi)\beta\in\mathrm{Ker}\,g^{l-1}(\varphi)\cap W=0$.从而$W\subseteq\mathrm{Ker}(g(\varphi))\subseteq\mathrm{Ker}(g^{l-1}(\varphi))\Longleftrightarrow W=0$, 于是$g^{l-1}(\varphi)=0$.因此只能$l=1$.

因此,设φ的最小多项式为$p_1^{l_1}(x)p_2^{l_2}(x)\cdots p_s^{l_s}(x)$,考虑$p_1(\varphi)p_2(\varphi)\cdots p_k(\varphi)$为幂零变换,由上述结论知其为0,从而$\varphi$的最小多项式没有重因式.

另一方面,设φ的最小多项式无重因式,设为$p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)$,由准素分解定理

$$V=\mathrm{Ker}(p_1(\varphi))\oplus\cdots\oplus\mathrm{Ker}(p_s(\varphi))$$

记$W_i=\mathrm{Ker}(p_i(\varphi))$由准素分解的性质(见博文《小短文3-线性变换的相似标准型》),对于不变子空间U,有

$$U=(W_1\cap U)\oplus(W_2\cap U)\cdots\oplus(W_s\cap U)$$

因为,我们只需证明对于每个$W_i\cap U$在W_i中均有不变补空间即可.记$\varphi_i=\varphi|_{W_i}$,其最小多项式为$p_i(x)$,由于$\mathbb{K}[\varphi]$构成一域,可将W_i看成其上的线性空间,由于$U\varphi-$不变,故$U\cap W_i$为W_i看做域$\mathbb{K}[\varphi]$上线性空间的子空间,取其在$(W_i)_{\mathbb{K}[\varphi]}$上的补空间即满足条件.

□

注 (i) 这样的线性变换φ称作是**半单**(semi-simple)的

(ii) 后半部分的本质是将V看成环$\mathbb{K}[x]/(p_i(x))$上的模,由于p_i素,故其为一域.而其任意子空间就是$\varphi-$不变子空间.

(iii) 后半部分还可以如下证明:

称不变子空间U为$\varphi-$**可容的**(admissible),如果对于任意$\beta \in V$,若$f(\varphi)\beta \in U$,则存在$\alpha \in U$使得$f(\varphi)\alpha \in U$.利用循环分解定理的推广(见Hoffman《linear algebra》),$U\varphi-$可容,等价于U存在不变补空间.于是,给出了判断是否存在不变补空间的判定方法.

11. 设$f(z)$是收敛半径为$+\infty$的复幂级数.$A \in M_n(\mathbb{C})$,$g(\lambda) = \det(f(\lambda)I_n - f(A))$,证明:$g(A) = 0$

证明 利用上三角化容易给出一个证明,这里利用另一个方法给出一个其他的证明.

设H为所有收敛半径为$+\infty$的复幂级数构成的集合.取向量空间V和线性变换φ,且A为φ的矩阵表示,对于$h(\lambda) \in H$,定义乘法$h(\lambda) \cdot \alpha = h(\varphi)\alpha$.类似地我们可以引入幂级数构成的矩阵与向量的形式矩阵乘法.

从而,设$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$是$V$的一组基,于是

$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)f(\varphi) = (f(\varphi)\alpha_1, \cdots, f(\varphi)\alpha_n)) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\mathrm{diag}\{f(\lambda), f(\lambda), \cdots, f(\lambda)\}.$$

从而$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)(f(\lambda)I_n - f(\varphi)) = (0, 0, \cdots, 0)$. 取$f(\lambda)I_n - f(A)$的伴随矩阵$B$,将上式两端乘$B$,得

$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\det(f(\lambda)I_n - f(A))I_n = (0, 0, \cdots, 0) \Rightarrow (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)g(\varphi) = 0$$

从而,$g(\varphi)$在一组基下的作用为0,于是$g(\varphi) = 0$ □

12. 设A为n阶正定对称阵,B为n阶实方阵,使得$\begin{pmatrix} A & B' \\ B & A^{-1} \end{pmatrix}$为半正定阵.证明$B$的特征值都落在复平面内的单位圆内.

证明 由A正定,故存在可逆矩阵C,使得$C'AC = I_n$,因此$C^{-1}A^{-1}C'^{-1} = I_n$考虑

$$\begin{pmatrix} C' & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B' \\ B & A^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C'^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C'AC & C'B'(C^{-1})' \\ C^{-1}BC & C^{-1}A(C')^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & P' \\ P & I_n \end{pmatrix}$$

其中$P = C^{-1}BC$.从而上述矩阵也半正定,其作为Hermite矩阵也正定,因此对于任意$X, Y \in \mathbb{C}^n$, $X^*X + Y^*Y + 2\mathrm{Re}(Y^*(C^{-1}BC)X) \geq 0$.

若B有模长大于1的特征值λ_0,设$B\alpha = \lambda_0\alpha$,取$X = C^{-1}\alpha$,从而$Y^*(C^{-1}BC)X = \lambda_0 Y^*X$.因此,有对于任意$Y \in \mathbb{C}^n$,均有$X^*X + Y^*Y + \lambda_0 Y^*X \geq 0$.设$X = C^{-1}\alpha = (x_1, \cdots, x_n)'$已知,对于$Y = (y_1, \cdots, y_n)'$,从而有

$$\sum_{i=1}^n (|x_i|^2 + |y_i|^2) + 2\mathrm{Re}(\lambda_0 \sum_{i=1}^n \overline{y_i}x_i) \geq 0$$

取$y_i = -|x_i|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_i}$,其中调整$\theta_i$使得$2\mathrm{Re}(\lambda_0\overline{y_i}x_i) = -2|\lambda_0\overline{y_i}x_i|$(即使得$\lambda_0\overline{y_i}x_i$的辐角为$\pi$,$\theta$总是存在的),代入,即得

$$2(1 - |\lambda_0|)\sum_{i=1}^n |x_i^2| \geq 0$$

显然矛盾，从而原命题得证. □

13. 设AB均为n阶半正定实对称阵,满足$\mathrm{tr}(AB) = 0$.求证$\mathrm{tr}(AB) = 0$

证明 由于A半正定,设$P'AP = C = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,设$D = P^{-1}BP'^{-1} = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix}$,从而$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(P'ABP'^{-1}) = \operatorname{tr}(CD) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,从而$\operatorname{tr} D_1 = 0$,又由于$B$半正定,从而$D_1$半正定,因此$D_1$对角元非负.从而$D_1 = 0$,从而$D_2 = D_3 = 0$,从而$CD = 0$,因此$AB = 0$ □

注 其中用到了半正定矩阵如下性质：若$a_{ii} = 0$,则对任意$j, a_{ij} = a_{ji} = 0$,证明是容易的.

14. 设$a_1, \cdots, a_n$是n个互异的正实数,试用两种方法证明:n阶实对称阵$A = (a_{ij})$是正定阵,其中$a_{ij} = \dfrac{1}{a_i + a_j}$

证明 **证法一：** 由正定的定义,只需证明对于任意的$x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$不全为0,$\sum\limits_{i,j} \dfrac{x_i x_j}{a_i + a_j} > 0$.

令$f(x) = \sum\limits_{i,j} \dfrac{x_i x_j}{a_i + a_j} x^{a_i + a_j}$.故$f'(x) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i x^{a_i}\right)^2 > 0 (x > 0)$,故$f(1) > f(0) = 0$.从而得证.

证法二：在$C[0,1]$上定义内积$(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$,上述矩阵则满足$a_{ij} = (x^{a_i}, x^{a_j})$,为一组线性无关向量内积的矩阵,从而正定.

证法三：事实上,A及其顺序主子式的行列式可求出,具体值见白皮书第一章,因此正定. □

15. 设A为n阶正定实对称阵,$x = (x_1, \cdots, x_n)'$, $f(x) = x'Ax$为对应的实二次型.设去掉的第i行和第i列后的主子阵为A_i.证明:$f(x)$在$x_i = 1$的条件下的最小值为$\dfrac{|A|}{|A_i|}$

证明 不失对称性,不妨设$i = n$,设$A = \begin{pmatrix} A_n & B \\ B' & c \end{pmatrix}$.则$A_n$正定,设$P'A_nP = I$.

从而$(\boldsymbol{x}', 1)A\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{x}P'^{-1}, 1)\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}' A \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P^{-1}\boldsymbol{x} \\ 1 \end{pmatrix}$,其中$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$,记$\boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$,从而上式等于

$$(\boldsymbol{y}', 1)\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}'\begin{pmatrix} A_n & B \\ B' & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ 1 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{y}, 1)\begin{pmatrix} I & P'B \\ B'P & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n-1}(y_i^2 + 2(P'B)_i)y_i) + c$$

从而最小值为$c - \sum (P'B)_i^2 = c - B'PP'B = c - B'A_n^{-1}B$,下面证明

$$c - B'A^{-1}B = \frac{\det\begin{pmatrix} A_n & B \\ B' & c \end{pmatrix}}{\det A_n} = \frac{\det A}{\det A_n}$$

事实上,设$Q^{-1}A_nQ = D$,Q正交,$D = \operatorname{diag}\{d_1, \cdots, d_{n-1}\}$对角,从而$\det A = d_1 \cdots d_{n-1}$,而

$$\det\begin{pmatrix} A_n & B \\ B' & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_n & B \\ B' & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} D & QB \\ B'Q^{-1} & c \end{pmatrix}$$

而由于D对角,设$B'Q^{-1} = (b_1, \cdots, b_{n-1})$,将第$k$行的若干倍加到最后一行使上述矩阵上三角,知上述矩阵的行列式为

$$\left(c - \frac{b_1^2}{d_1} - \cdots - \frac{b_{n-1}^2}{d_{n-1}}\right) d_1 \cdots d_{n-1} = (c - (B'Q^{-1})D^{-1}(QB)) \det A = (c - B'A_n^{-1}B) \det A$$

于是原命题得证. □

16. 设A为n阶实对称阵,证明:A为正定阵(半正定阵)的充要条件是

$$c_r=\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_r\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix}>0\ (\ge 0),\quad r=1,2,\cdots,n.$$

证明 只需注意到A的特征多项式f_A满足

$$f_A=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n)=x^n-c_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^nc_n$$

从而f_A各根为正(非负)当且仅当各c_r为正(非负). □

17. 设A为n阶正定实对称阵, α,β是n维实列向量, 证明:$(\alpha'\beta)^2\le(\alpha'A\alpha)(\beta'A^{-1}\beta)$, 等号成立当且仅当$A\alpha$与$\beta$ 成比例.

证明 设$C'AC=I$,从而$A=C'^{-1}C^{-1}$,记$C^{-1}=Q$,从而$A=Q'Q$, 于是,由Cauchy不等式

$$(\alpha'\beta)^2=((Q\alpha)'Q^{-1}\beta)^2\le(Q\alpha)'(Q\alpha)(Q^{-1}\beta)'(Q^{-1}\beta)=(\alpha'A\alpha)(\beta'A^{-1}\beta)$$

等号成立当且仅当$Q\alpha,Q^{-1}\beta$成比例,即$A\alpha,\beta$成比例. □

18. 设A为n阶复矩阵, $\lambda_1\le\cdots\le\lambda_n$是$-\dfrac{\mathrm{i}}{2}(A-\overline{A}')$的全体特征值, 证明: 对$A$的任一特征值$\lambda$, 有$\lambda_1\le\operatorname{Im}\lambda\le\lambda_n$.

证明 先证明如下引理:

引理2 设AHermite,则A的对角元与特征值均为实数,且对角元均在最小特征值和最大特征值之间.

证明 显然A对角元与特征值是实数.且A酉相似于对角矩阵$D=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\},\lambda_1\le\cdots\le\lambda_n$.
从而$A-\lambda_1I$半正定,因此A对角元均不小于λ_1,$A-\lambda_nI$半负定,从而对角元均不超过λ_n □

回到原题,设U酉,使得$U^{-1}AU$上三角,对角元为特征值,而$\overline{U^{-1}AU}'=U^{-1}\overline{A}'U$下三角.于是
$U^{-1}\left(-\dfrac{\mathrm{i}}{2}(A-\overline{A}')\right)U$的对角元均为$-\dfrac{\mathrm{i}}{2}(\lambda-\overline{\lambda})=\mathrm{Im}\lambda$, 由引理即得原结论.

□