2 累级数及其重排

笔者在Stein的《Complex Analysis》中的习题多次遇到累级数及其重排的问题,在楼红卫老师的《数学分析注记》中给出了一些说明,但稍有些不严密.对此,现做出更加妥当的说明以及更加严格的论证.

2.1 无穷级数的一些基本理论

在此对一些本文中用到的无穷级数的理论进行陈述,其证明均为平凡,只是由于在本文中会多次用到,故提出以免被指出跳步.

命题1 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$均收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$也收敛,且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$

该结论可以推广到N个数列的情形.

推论1 若N个级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{in}(i=1,2,\cdots,N)$均收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{N}a_{in}$也收敛,且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{N}a_{in}=\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{in}$

命题2 设非负项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,则对于任意正整数$N$,$\sum\limits_{n=1}^{N}a_n\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

对于一个数列$\{a_n\}$,定义其**正部**$\{a_n^+\}$和**负部**$\{a_n^-\}$为

$$a_n^+=\begin{cases}a_n, & a_n\ge 0\\ 0, & a_n<0\end{cases},a_n^-=\begin{cases}-a_n, & a_n\le 0\\ 0, & a_n>0\end{cases}$$

注意到正部和负部均为不变号的数列.

命题3 若无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$满足$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+,\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-$均收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+-\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-$

命题4 若无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+,\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-$均收敛

对于级数的重排,有如下的定理

命题5 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,则

(1) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛,则对于任意双射$\sigma:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+$,有$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}$收敛且绝对收敛,并且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$

(2) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛,则对于任意广义实数$a$,存在双射$\sigma:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+$,使得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}$收敛且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}=a$

2.2 累级数及其重排

我们可以定义形如$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{ij}$的级数如下：

定义1 若数表$a_{ij}(i,j\in\mathbb{Z}^+)$满足对于任意$i\in\mathbb{Z}^+$,$\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{ij}$收敛,且记其和为$A_i$,并且$\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i$收敛,则称累级数$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{ij}$收敛.

上述定义中将a_{ij}加上绝对值符号后就定义了累级数的绝对收敛.类似地,我们也可以定义$\sum\limits_{j=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_{ij}$的收敛性.

下面的定理指出对于绝对收敛累级数,也可以进行交换和号.

定理1　若累级数$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}$绝对收敛,则$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}$也收敛且绝对收敛,并且$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}$

但注意到上面的定理并不适合于命题5,这是由于这里并没有所谓的$\sigma:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+$.故笔者认为《数学分析注记》在此处稍有瑕疵.但事实上,该命题的证明确实不困难.

证明　我们从定义出发,一步一步给出该定理的证明.

首先,要证明的是对于任意$j\in\mathbb{Z}^+$,$\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}$收敛.事实上,由于$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}$绝对收敛,记$\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|=C_i$,从而$|a_{ij}|\le C_i(\forall i,j)$,从而$\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}$绝对收敛从而收敛.

然后证明$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}$绝对收敛.事实上,由于对于任意$N\in\mathbb{Z}^+$,$\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{N}|a_{ij}|\le\sum_{i=1}^{\infty}|C_i|$,从而$\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|$有上界,因此$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}$绝对收敛.

最后证明$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}$.事实上,若$a_{ij}\ge 0(\forall i,j\in\mathbb{Z}^+)$,于是,对于任意正整数$N$,$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{N}a_{ij}\le\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}$,从而$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\le\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}$. 同理$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}\le\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}$,于是$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}$.

而对于一般情形,考虑a_{ij}的正部和负部,用上面的结论即知$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}^+=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}^+$,$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}^-=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}^-$,从而

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}^+-\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}^-=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}^+-\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}^-=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}\qquad\square$$

该证明用到了除上节除命题5中的每个结论.上述证明的每一步都是严密的,读者可指出上面每个等号或不等号成立的理由是什么,这里不做过多解释.

我们用类似的方法可以证明如下定理

定理2　设累级数$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}$绝对收敛,则对任意双射$\varphi:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$,均有$\sum_{n=1}^{\infty}a_{\varphi(n)}$收敛且绝对收敛,并且

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{\varphi(n)}$$

需要注意的是上述的两个定理是相互独立的,不能直接地从一个推出另一个,读者可自行思考为什么.

证明　记$b_n=a_{\varphi(n)}$,一模一样的方法可以证明b_n绝对收敛.我们下面只去证明$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{\varphi(n)}$.

仍然先考虑a_{ij}为非负的情形,此时b_n也非负.由于对于任意正整数N,总存在一个正整数m,使得$\varphi(1),\cdots,\varphi(n)$的第一个分量均小于$m$,从而

$$\sum_{n=1}^{N}b_n\le\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{\infty}a_{ij}\le\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}$$

于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{ij}$,下面证明反向的不等式.事实上,对于任意正整数$N$,考虑和$\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{ij}$.对于任意$\varepsilon$,存在一个$K$,使得对任意的$1 \le i \le N$,$\sum\limits_{j=1}^{\infty} - \sum\limits_{j=1}^{K} a_{ij} < \varepsilon$,于是取$l$足够大,使得$\varphi(1),\cdots,\varphi(l)$含有了所有的$i,j(1 \le i \le N, 1 \le j \le K)$,从而

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \le \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{K} a_{ij} + N\varepsilon \le \sum_{n=1}^{l} a_n + N\varepsilon \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n + N\varepsilon$$

由ε的任意性知,$\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{ij} \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$,从而$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{ij} \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

于是$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.而对于一般的级数,同样的考虑正部和负部即得结论. □

而类似地下面的结论也成立.

推论2 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收敛,则对于任意双射$\tau : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$,记$b_{ij} = a_{\tau(i,j)}$,则$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_{ij}$绝对收敛且

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

注 上面讨论的数列均为实数数列,而对于复数数列,结论是一模一样的.只需将实部和虚部分开考虑即可.

2.3 应用

最后利用定理1和定理2解决两道Stein的《Complex Analysis》上的问题.

例1 设全纯函数f在以原点为中心展开成了幂级数,证明对收敛圆中的每个点z_0,存在z_0的某个邻域,使得f能展开为中心在z_0处的幂级数

证明 设$f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n (|z| < R)$.于是对于$|z_1| < R$,有

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_1 + z_1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_n \mathrm{C}_n^k z_1^{n-k} (z - z_1)^k$$

由定理1稍微变形,可得上式

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} a_n \mathrm{C}_n^k z_1^{n-k} (z - z_1)^k$$

从而展开成了中心在z_1处的幂级数 □

上述证明有很多细节需要处理,篇幅起见略去

例2 证明:对$|z| < 1$,有

$$\frac{z}{1-z^2} + \frac{z^2}{1-z^4} + \cdots + \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} + \cdots = \frac{z}{1-z}$$

证明 有了定理2作为保障,只需将两边形式上展成幂级数之后比较即可.问题就转化为了基本的初等数论问题.具体的证明也留给读者. □