同调代数基础

熊锐

2019 年 5 月 18 日

编译时间： **2019 年 5 月 18 日**

纸张大小：A5

本书主页：www.cnblogs.com/XiongRuiMath/articles/9893849.html

熊锐 | 山东大学

个人主页：www.cnblogs.com/XiongRuiMath/

```
@book {XiongRuiHA,
 AUTHOR = {熊锐},
  TITLE = {同调代数基础},
 SERIES = {本科数学讲义},
 VOLUME = {2},
   YEAR = {2018},
  PAGES = {122},
   NOTE = {可以在
      \url{www.cnblogs.com/XiongRuiMath/articles/9893849.html}
下载}
}
```

献给林靖宇, 程龚睿, 张忆君, 李博文, 林吉祥, 感谢这段时间他们对我的理解和倾听.

特别感谢卢穗麒指正其中不少错误.

目录

前言 1

第一部分　理论部分 **2**

第一章　复形 **3**

1.1　复形的定义 3

1.2　同伦 10

1.3　预解 15

1.4　长正合序列 20

第二章　导出函子 **25**

2.1　导出函子 25

2.2　长正合序列 28

2.3　对偶 30

第三章　扩张函子和挠函子 **35**

3.1　扩张函子 35

3.2　Baer 和 38

3.3　挠函子 44

3.4　计算 47

第四章 同调论大定理 **54**
4.1 万有系数定理 54
4.2 上万有系数定理 58
4.3 Künneth 公式 62

第二部分 应用部分 **67**

第五章 代数拓扑选讲 **68**
5.1 奇异 68
5.2 切除 71
5.3 单纯 75
5.4 计算 80
5.5 光滑 84

第六章 群的同调 **87**
6.1 定义 87
6.2 预解 91
6.3 自由 94
6.4 有限 100
6.5 扩张 105

附录 **111**
代数学小词典 111
书籍推荐 116
插图 117
逻辑符号 119
参考文献 120
索引 122

前言

啊! 我又写了一本很短的书! 我非常喜欢这种明快的风格.

本书的目的是为了介绍同调的理论, 不过我并非是像把同调代数讲得面面俱到, 本书的目的其实只是为了回答我最初学习同调的一个疑惑 — 为什么同调这么有用? 为什么几何在用, 代数都在用? 他们统一在哪里?

本书分两部分, 第一部分介绍一般的同调代数的理论. 这部分写作的特点是会在建立理论的过程中使用轻便的记号, 这或许会让循规蹈矩的人晕倒. 这部分还会列举很多几何例子, 这部分只是框架, 有时也也并不严格, 是留给读者把握大意的, 难以阅读时可以跳过. 第二部分介绍应用, 是代数拓扑和群的同调两个方面. 这部分的写作特点是不求全面, 为的是展示如何建立同调的理论以及其应用的方法.

这本书能够如此之简短, 我将其归功于对预备知识的假设 — 读者在阅读本书前应当有基本的关于模论的知识, 例如 [4] 第六章, [8] 的前两章, 第一部分对拓扑的知识原则上只需要 [2] 的第二部分的开篇第六章. 对此不了解可以查阅书后的 “代数学小词典”, 对其中少部分知识的一知半解不影响整体的阅读. 同时最后代数拓扑部分需要更多的拓扑学术语.

希望读者能有收获!

熊锐
2018 年 11 月 2 日凌晨

第一部分

理论部分

第一章　复形

1.1　复形的定义

以下我们固定环 R, 我们要将目光置于 R-Mod 范畴上.

定义 1.1 (复形) 取一族 R-模 $C_\bullet = \{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, 以及之间的一族同态 $\partial = \{\partial_n : C_n \to C_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, 若满足

$$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0 \qquad (\text{零同态})$$

则称 $(C_\bullet, \partial)$ 是一个 R-模**链复形 (chain complex)**, 简称**复形**, 其中 ∂ 被称为**微分 (differential)** 或 **边缘同态 (boundary operator)**. 如下图

$$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0 \qquad \begin{tikzcd} {} \arrow[r, dashed] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[rr, bend right, "0"'] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] & C_{n-1} \arrow[r, dashed] & {} \end{tikzcd}$$

方便起见, 以后讨论复形会略去 ∂, 讨论涉及 ∂ 时常会省略下标和复合记号 $\circ$, 只需注意到映射的指标是其出发的模指标.

引理 1.2 对于 R-模复形 $(C_\bullet, \partial)$, ∂ 有如下分解

$$\partial_n = \jmath\,\imath\,\eth\,\pi \qquad \begin{tikzcd} C_n \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\pi"'] & \operatorname{im}\partial_n \arrow[r, dashed] \arrow[dr, hook, "\imath"] & C_{n-1} \\ \operatorname{cok}\partial_{n+1} \arrow[ur, "\eth"] \arrow[rr, dashed] & & \ker\partial_{n-1} \arrow[u, hook, "\jmath"'] \end{tikzcd}$$

其中 $\pi, \imath, \jmath$ 分别是自然映射, 包含映射和包含映射, $\eth$ 由 ∂_n 诱导[1].

证明 以上映射是合理的需要验证

- $\operatorname{im} \partial_n \subseteq \ker \partial_{n-1} \subseteq C_{n-1}$.

  这是因为 $\partial_{n-1}\partial_n = 0$

- $\partial : C_n \to C_{n-1}$ 诱导了 $\operatorname{cok} \partial_{n+1} \to \operatorname{im} \partial_n$ 的同态.

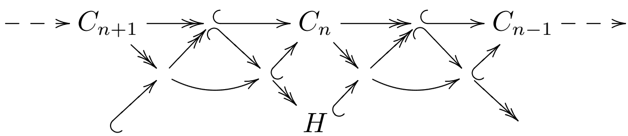
  这是因为 $\partial(\operatorname{im} \partial_{n+1}) = 0$, 故诱导了 $\eth : C_n / \operatorname{im} \partial_{n+1} \to \operatorname{im} \partial_n$ 的同态.

最后, $\partial_n = \jmath \imath \eth \pi$ 容易验证. □

引理 1.3 *记号同上命题 (1.2), 有自然同构*

$$\ker \partial_n / \operatorname{im} \partial_{n+1} = \operatorname{cok} \left[\operatorname{im} \partial_{n+1} \xhookrightarrow{\iota} \ker \partial_n \right] \cong \ker \left[\operatorname{cok} \partial_{n+1} \overset{\eth}{\twoheadrightarrow} \operatorname{im} \partial_n \right]$$

换言之



证明 第一个等号就是定义. 注意到 $\eth$ 由 ∂ 诱导而来, 根据模同构第三定理

$$\operatorname{im} \partial_n \cong \frac{C_n}{\ker \partial_n} = \frac{C_n / \operatorname{im} \partial_{n+1}}{\ker \partial_n / \operatorname{im} \partial_{n+1}} = \frac{\operatorname{cok} \partial_{n+1}}{\ker \partial_n / \operatorname{im} \partial_{n+1}}$$

因为其中映射都是自然, 由 ∂ 诱导的, 故可以直接得到 $\ker \eth$ 自然同构于 $\ker \partial_n / \operatorname{im} \partial_{n+1}$. □

定义 1.4 *仿照同调论的源头, 对于复形 $C_\bullet$, 围绕 C_n, 我们定义如下概念*

- *C_n 中的元素被称为 n-* **链 (chain)** .

- *$\mathsf{Z}_n(C_\bullet) = \ker \partial_n$, 其中元素被称为 n-* **圈 (cycle)** .

---

[1]换话句话说, 定义为 $\eth : \operatorname{cok} \partial_{n+1} \xrightarrow{\text{满}} \operatorname{im} \partial_n \qquad x \bmod \operatorname{im} \partial_{n+1} \longmapsto \partial x$

- $\mathsf{B}_n(C_\bullet) = \operatorname{im}\partial_{n+1}$, 其中元素被称为 n-**边 (boundary)**.
- $\mathsf{F}_n(C_\bullet) = \operatorname{cok}\partial_{n+1}$, 其中元素被称为 n-**架 (frame)**[2].
- $\mathsf{H}_n(C_\bullet)$ 为上面引理 *(1.3)* 所定义的 H, 称为第 n 个**同调模 (homology module)**. 简言之, 即 $\mathsf{H}_n = \mathsf{Z}_n/\mathsf{B}_n$.

如图 $\left[\begin{tikzcd} \mathsf{B}_n \arrow[rr] \arrow[dr] & & C_n \arrow[rr, dashed, "\partial_n"] \arrow[dr] & & {} \\ & \mathsf{Z}_n \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathsf{F}_n & \\ & & \mathsf{H}_n \arrow[ur] & & \end{tikzcd}\right]$. 换言之, 有如下 4 条短正合列

$$\left[\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & & & & & 0 \\
& \mathsf{B}_n \arrow[rr, bend left] \arrow[dr] & & C_n \arrow[rr, bend left] \arrow[dr, bend left] & & \mathsf{B}_{n-1} \arrow[ur] \arrow[dr, bend left] & \\
0 \arrow[ur, bend left] & & \mathsf{Z}_n \arrow[ur, bend left] \arrow[dr] & & \mathsf{F}_n \arrow[ur] \arrow[d, bend left] & & 0 \\
& & 0 \arrow[u, bend left] & \mathsf{H}_n \arrow[ur] \arrow[dr] & 0 & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}\right]$$

评注 1.5 有了上面的记号, 我们可以将 *(1.3)* 改写为,

> 对于复形 $C_\bullet$, 有自然同构
>
> $$\mathsf{H}_n(C_\bullet) = \operatorname{cok}[\mathsf{B}_n \to \mathsf{Z}_n] \cong \ker[\mathsf{F}_n \to \mathsf{B}_{n-1}]$$

同调模是之中最为关键的, 为了看到起用途, 以下是一些源头性 (代数拓扑) 的例子.

例 1.6 (奇异同调) 对于 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 在欧式空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中定义 n 维**标准单纯形 (standard simplex)**

$$\triangle_n = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \boldsymbol{e}_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \right\} = \{\boldsymbol{e}_i\}_{i=0}^{n} \text{ 的凸包}$$

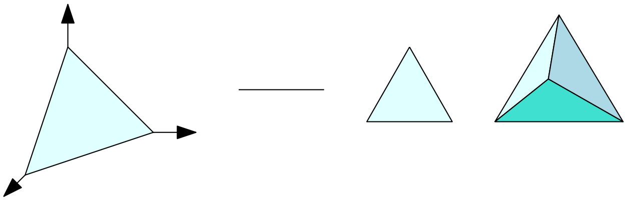


图 1.1: 标准单纯形

其中 $\boldsymbol{e}_i$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 标准基[3]，下图画出了 $n=1,2,3$ 维的情形. 直觉上看，每个 n 维标准单形都有 $n+1$ 个 $n-1$ 维数的面，即去掉某一个 $\boldsymbol{e}_i$ 再做凸包，但可惜这样得到的不是标准的，为此，可以找一个线性映射 $\iota_i : \triangle_{n-1} \to \triangle_n$ 将每个面等同于标准单形，但是这需要注意顺序，方便起见假定 ι_i 按顺序映射，即

$$(\boldsymbol{e}_0, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-1}) \mapsto (\boldsymbol{e}_0, \ldots, \widehat{\boldsymbol{e}_i}, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \qquad \widehat{*} \text{ 表示跳过}$$

那么 $\triangle_n$ 的边界就是 ι_i 的像的并.

在拓扑空间 X 上，我们定义其上的一个 n 维**单纯形**或简称**单形**是一个连续映射 $\Delta : \triangle_n \to X$. 将所有这样的 Δ 收集起来并以此为基生成一个自由 *Abel* 群，我们定义这就是 $C_n(X)$，换言之，$C_n(X)$ 就是 X 中一些单形的组合，这被称为**复形 (complex)**. 下面我们要定义边缘同态，这只需要在基上定义

$$\begin{array}{rccc} \partial_n : & C_n(X) & \longrightarrow & C_{n-1}(X) \\ & \left[\triangle_n \xrightarrow{\Delta} X\right] & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \left[\triangle_{n-1} \xrightarrow{\iota_i} \triangle_n \xrightarrow{\Delta} X\right] \end{array} \qquad (*)$$

换言之，∂ 将 n 维复形变成 $n-1$ 维复形，变成他们的"有方向"边界，这里的 $(-1)^i$ 起调节方向的作用，这样可以确保"取两次边界"消失 (交给读者验证). 例如下图最后消失了，是因为这些边两两相接从而，其边缘出现的 0 维单形 —单点，正负相抵. 最后，约定 $n<0$ 时 $C_n(X)=0, \partial_{n-1}=0$.

[2]这是作者发明的概念.

[3]即第 i 位为 1，其他位为 0 的坐标.

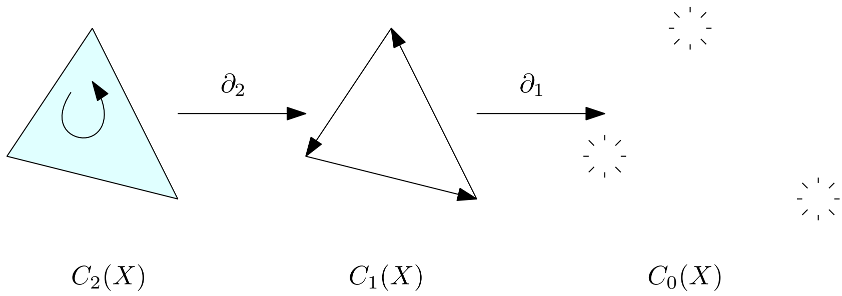


图 1.2: 边缘同态

我们就得到了奇异复形 $(C_\bullet(X), \partial)$.

下面我们来简单看一下, 随之定义的 $\mathsf{Z}_n(X), \mathsf{B}_n(X), \mathsf{F}_n(X), \mathsf{H}_n(X)$(这些记号是自明的) 有何意义.

- n-圈 $\mathsf{Z}_n(X)$ 是那些边缘为 0 的 n 维复形, 例如在 1-维看就是首尾相接, 没有 "树枝". 更高维则是说明其 "闭合", 每一块单形的边都邻接另一个单形的边, 且方向相反.

- n-边 $\mathsf{B}_n(X)$ 是某些 $n+1$ 维复形的边缘, 换句话说, 可以通过适当地 "填充", 将骨架填满. 换言之, 就是那些可以缩成一个点的 n 维复形.

- n-架 $\mathsf{F}_n(X)$ 是一些 n 复形的等价类, 两个复形相同如果相差一个 $n+1$ 维复形的边缘, 换言之, 相差一个 "实心"$n+1$ 维复形. 可以立即为两个复形可以通过 "连续变动" 转化, 这个 $n+1$ 维复形就是连续变动的 "痕迹".

- n-同伦群 $\mathsf{H}_n(X)$ 是那些闭合的 n 维复形的等价类, 等价当且仅当相差一个 $n+1$ 维复形的边界. 换句话说可以通过 "连续变动" 转化.

最终的理解像极了基本群的理解方式, 实际上, $\mathsf{H}_n(X)$ 大致反映出 X 中 n 维 "洞" 的数目. 由于这里的 C_n 过大, 而无法通过直接计算, 因此称为 **奇异 (singular) 同调** .

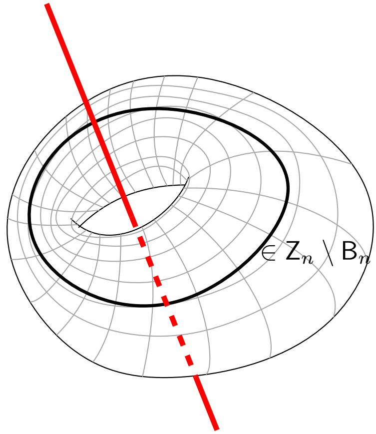


图 1.3: 洞

例 1.7 (单纯同调) 对于由单纯形“拼接”而来的拓扑空间，有更为简单的同调，这被称为**单纯 (simple) 同调**．一个**简单复形**是通过不断将一些 n 维标准复形的 n 个面黏在已经粘好的 $n-1$ 维复形上得来的拓扑空间，经过粘结，一些边发生了重合，这也赋予了新的边界关系．这样，定义 C_n 为全体用于粘结的 n 维单纯形，∂ 定义为根据粘合，形式地取边界 (如之前 $(*)$ 的样式)，这样也可以得到一个复形 $(C_\bullet, \partial)$．其理解方式类似，且更好计算，更重要的是，可以证明，奇异同调群是自然同构于单纯同调群的．

例 1.8 (微分形式) 回忆微分流形中的微分形式[4]．对于流形 M，记 $\mathfrak{Diff}^n(M)$ 为 M 上的全体 n 次微分形式，这是 $\mathbb{R}$-线性空间．熟知的外微分算子 $\mathrm{d} = \mathrm{d}_n$ 给出了 $\mathfrak{Diff}^n(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathfrak{Diff}^{n+1}(M)$ 的线性映射，且 $\mathrm{d}^2 = 0$．为了制作一个复形，我们需要将箭头倒置，令

$$C_{-n} = \mathfrak{Diff}^n \qquad \partial_{-n} = \mathrm{d}_n \qquad n > 0 \Rightarrow C_n = 0, \partial_n = 0$$

这能导出同调模 $\mathsf{H}_{-n}(C)$，再记 $\mathsf{H}^n(\mathfrak{Diff}^\bullet) = \mathsf{H}_n$，这时称为 **de Rham 上 (co-) 同调模**．

[4]没有学过的读者不妨以数学分析为范本考虑，流形视作一个光滑性好的子集

例如在圆周 $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ 上的微分形式

$$\mathrm{d}\theta := y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y$$

不是任何微分形式的微分[5], 具体的证明只需要通过对微分形式做积分再利用著名的 *Stokes* 公式即可. 但是这个微分形式的微分确是 0.

除此之外, 还有一些玩具一样的例子.

例 1.9 考虑矩阵 $\partial := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{pmatrix}$, 配合 $C_n = \mathbb{R}^2$, 形成了一个复形.

例 1.10 考虑 $\mathbb{Z}_4$, 定义 $\partial : x \mapsto 2x$. 显然, 这也是一个复形.

例 1.11 对于任意一族模 C_n, 定义在 n 是奇数时 $\partial_n = 0$, 其余时候任意取, 这也形成一个复形.

下面将几类最容易计算的同调模以命题形式计算出来. 首先, 毫无疑问, 对于复形 $(C_\bullet, \partial)$, $\mathsf{H}_n(C_\bullet)$ 只和前后两个同态 $\partial_n, \partial_{n+1}$ 有关.

命题 1.12 对于复形 $C_\bullet$,

(1) 若 $\ldots \xrightarrow{0} C_n \xrightarrow{0} \ldots$, 则 $\mathsf{H}_n(C_\bullet) = C_n$.

(2) 若 $\ldots \xrightarrow{0} C_n \xrightarrow{f} \ldots$, 则 $\mathsf{H}_n(C_\bullet) = \ker f$.

(3) 若 $\ldots \xrightarrow{f} C_n \xrightarrow{0} \ldots$, 则 $\mathsf{H}_n(C_\bullet) = \operatorname{cok} f$.

证明 因为零同态像为 0, 核是整个模. □

命题 1.13 对于复形 $C_\bullet$, 假设 $\ldots \xrightarrow{g} C_n \xrightarrow{f} C_{n+1} \xrightarrow{h} \ldots$

(1) 若 f 是双射, 则 g 和 h 皆为零同态, 且 $\mathsf{H}_n(C_\bullet) = 0 = \mathsf{H}_{n+1}(C_\bullet)$.

(2) 若 f 是单射, 则 g 是零同态, 且 $\mathsf{H}_n(C_\bullet) = 0$.

(3) 若 f 是满射, 则 h 是零同态, 且 $\mathsf{H}_{n+1}(C_\bullet) = 0$.

证明 直接计算. □

[5] 这里的记号 $\mathrm{d}\theta$ 只是记号, 实际上, θ 可以视作是 $\mathbb{S}^1$ 的多值函数.

1.2 同伦

定义 1.14 对两个 R-Mod 复形 $C_\bullet, C'_\bullet$, 若存在一族映射 $\varphi = \{\varphi_n : C_n \to C'_n\}$, 若满足

$$\partial\varphi = \varphi\partial \quad \Bigg| \quad \begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, dashed] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\varphi_n"'] & C_{n-1} \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, dashed] & C'_n \arrow[r, "\partial_n"'] & C'_{n-1} \arrow[r, dashed] & \cdots \end{tikzcd}$$

则称 φ 为一个 $C_\bullet$ 到 $C'_\bullet$ 的**同态**, 会照例记为 $\varphi : C_\bullet \to C'_\bullet$.

显然 [6], 一个复形的同态诱导了同调模之间的同态

$$\begin{array}{rccc} \mathsf{H}_n(f): & \mathsf{H}_n(C_\bullet) & \longrightarrow & \mathsf{H}_n(C'_\bullet) \\ & [z] & \longmapsto & [f(z)] \end{array} \qquad n\text{-圈}\, z \in \mathsf{Z}_n(C_\bullet) \qquad (*)$$

有时, 滥用记号仍然记为 f.

定义 1.15 (同伦) 对于两个 R-Mod 复形 $C_\bullet, C'_\bullet$, 若有两个同态 φ, ψ, 称映射族 $S = \{S_n : C_n \to C'_{n+1}\}$ 是 φ 到 ψ 的**同伦 (homotopy)**, 如果

$$\partial S + S\partial = \psi - \varphi \quad \Bigg| \quad \begin{tikzcd} & \cdots \arrow[r, dashed] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[dll, "S_n"'] \arrow[d, shift right, "\psi"'] \arrow[d, shift left, "\varphi"] & C_{n-1} \arrow[dl, "S_{n-1}"] \\ C'_{n+1} \arrow[rr, "\partial_{n+1}"'] & & C'_n \arrow[r, dashed] & \cdots \end{tikzcd}$$

并且记为 $S : \varphi \simeq \psi$, 称 φ 和 ψ(通过 S) 同伦.

评注 1.16 实际上定义中, 是 $\psi - \varphi$ 还是 $\varphi - \psi$, 是 $S\partial + \partial S$ 还是 $S\partial - \partial S$ 并非紧要, 只需要按照奇偶性调整一个正负号即可.

命题 1.17 关于同伦有如下初等结果.

---

[6]因为, 自动诱导了 $\mathsf{Z}_n(C_\bullet) \to \mathsf{Z}_n(C'_\bullet)$ 以及 $\mathsf{B}_n(C_\bullet) \to \mathsf{B}_n(C'_\bullet)$, 二者再诱导了 $\mathsf{H}_n(C_\bullet) \to \mathsf{H}_n(C'_\bullet)$.

(1) 对于两个复形之间的三个同态 $C_\bullet \xrightarrow{\varphi,\psi,\chi} C'_\bullet$, 若同伦 $S:\varphi\simeq\psi$, $T:\psi\simeq\chi$, 则 $S+T:\varphi\simeq\chi$. 换言之, 同伦是等价关系.

(2) 对于三个复形之间的两组同态 $C_\bullet \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\to}} C'_\bullet \underset{\psi'}{\overset{\varphi'}{\to}} C''_\bullet$, 若同伦 $S:\varphi\simeq\psi$, $S':\varphi'\simeq\psi'$, 则

$$\varphi' S:\varphi'\psi\simeq\varphi'\varphi \qquad S'\psi:\psi'\psi\simeq\varphi'\psi$$

从而根据 *(1)* 有 $\psi'\psi\simeq\varphi'\varphi$.

证明　直接计算. □

定理 1.18 (同伦不变性) 对于两个复形 $C_\bullet, C'_\bullet$, 若两个同态 φ,ψ 同伦, 则他们诱导的同伦模的同态相同, 即

$$\mathsf{H}_n(\varphi)=\mathsf{H}_n(\psi):\mathsf{H}_n(C_\bullet)\to\mathsf{H}_n(C'_\bullet)$$

证明　回看映射 $(*)$, 对于 n-圈 $z\in\mathsf{Z}_n(C_\bullet)$, 只要证明 $[\varphi(z)]=[\psi(z)]$ 即可, 即 $(\varphi-\psi)(z)\in\mathsf{B}_n(C'_\bullet)$. 但是

$$\begin{aligned}(\varphi-\psi)(z) &= (\partial S+S\partial)(z) && \because \partial z=0\\ &= (\partial S)(z)=\partial(S(z))\in\mathsf{B}_n\end{aligned}$$

命题得证. □

评注 1.19 尽管同伦可以让两个同态在同调模上诱导相同的同态, 但反之, 若两个同态在同调模上诱导相同的同态, 未必总有同伦. 考虑 $\mathbb{Z}$-Mod 复形

$$C_\bullet:\dots\xrightarrow{0}0\xrightarrow{0}\mathbb{Z}\xrightarrow{\times 2}\underbrace{\mathbb{Z}}_{=C_0}\xrightarrow{0}0\xrightarrow{0}\dots \qquad C'_\bullet:\dots\xrightarrow{0}0\xrightarrow{0}\mathbb{Z}\to\underbrace{0}_{=C'_0}\xrightarrow{0}0\xrightarrow{0}\dots$$

并定义 $\varphi:\varphi_n=\begin{cases}\mathrm{id} & n=1\\ 0 & n\neq 1\end{cases}$, 注意到 φ 和 0 同时诱导了同调模之间的零同态. 但是, 不存在一个同伦, 这是因为, 若有同伦 S, 则要求下图两个三

角形交换 (因为其他的 $\partial S=0$)

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\times 2"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, "0"] \arrow[dl, "S"'] \\
\mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

此属天方夜谭.

尽管如此, 同伦的重要性在于, 当我们运用一些函子作用在其上时, 只保持加法, 而是否保持 ker 或 cok 便得微妙, 但是同伦是利用等式定义的稳固关系, 故同伦依旧变为同伦, 这让我们可以放心地谈论同调群之间的同态.

例 1.20 回到奇异同调 (1.6) 的例子. 对于拓扑空间的连续映射 $X\xrightarrow{\varphi}Y$, 任何一个 X 的单纯形 $[\triangle_n\xrightarrow{\Delta}X]$ 通过复合都可以变成 Y 的单纯形 $[\triangle_n\xrightarrow{\Delta}X\xrightarrow{f}Y]$, 于是这诱导了同态 $C_n(f):C_n(X)\to C_n(Y)$. 回看 ∂ 的定义知道 (因为复合有分配率), 这是复形的同态.

拓扑空间中著名的同伦指的是对于拓扑空间的两个映射 $X\underset{g}{\overset{f}{\to}}Y$, 若有连续映射

$$F:X\times[0,1]\longrightarrow Y$$

满足

$$\forall x\in X\qquad F(x,0)=f(x)\qquad F(x,1)=g(x)$$

则称 F 是 f 到 g 的同伦. 换言之, 同伦通过引入参数 t, 将 f 连续变动为 g, 如图.

下面的问题是如何把单纯形连续变动, 我们在 (1.6) 曾提过, 相差 B_n 中的元素相当于是 "连续变动", 而高维复形就是变动的 "痕迹", 在这个意义下需要固定 "端点不动". 具体来看同伦, 任何一个复形 $[\triangle_n\xrightarrow{\Delta}X]$ 都诱导了 $[\triangle_n\times[0,1]\xrightarrow{\Delta}X\times[0,1]]$, 这通过 F 变成了

$$[\triangle_n\times[0,1]\xrightarrow{\Delta}X\times[0,1]\to Y]$$

这不是一个 "单纯形", 但是是一个 "柱形", 且上下底面分别是 f,g 各自诱导的像 $[\triangle_n\xrightarrow{\Delta}X\xrightarrow{f,g}Y]$. 如果 f,g 是圈的话, f 的像在同调群的理解下

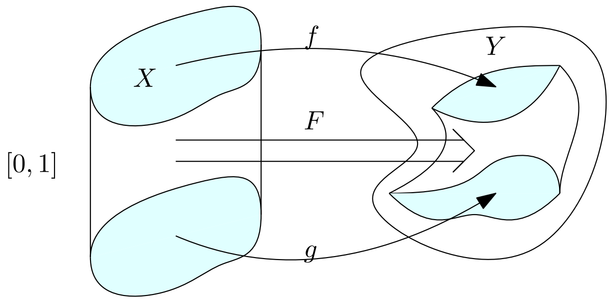


图 1.4: 同伦

连续变动到 g, 我们需要将复形 $[\triangle_n \xrightarrow{\Delta} X \xrightarrow{g} Y] - [\triangle_n \xrightarrow{\Delta} X \xrightarrow{f} Y]$ 写成一个 $n+1$ 维复形的边界.

一个可行的操作是将 $[\triangle_n \times [0,1] \to Y]$ 理解为复形, 具体而言, 我们可以定义一些线性映射 $\{\psi_i : \triangle_{n+1} \to \triangle_n \times [0,1]\}_{i=0}^n$, 他们的像的并就是整个 $\triangle_n \times [0,1]$. 这同样需要注意顺序, 我们规定为

$$(\boldsymbol{e}_0, \ldots, \boldsymbol{e}_{n+1}) \mapsto \Big((\boldsymbol{e}_0, 0), \ldots, (\boldsymbol{e}_i, 0), (\boldsymbol{e}_i, 1), \ldots, (\boldsymbol{e}_n, 1)\Big)$$

这样, 定义

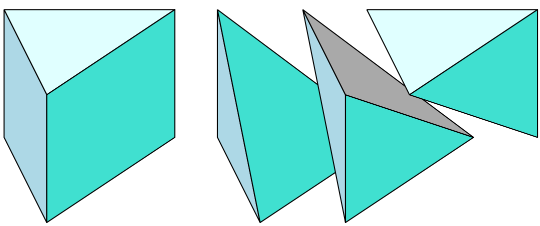


图 1.5: 柱形的分解

$$\begin{array}{cccc} S_n : & C_n(X) & \longrightarrow & C_{n+1}(Y) \\ & \left[\triangle_n \xrightarrow{\Delta} X\right] & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^n (-1)^i \left[\triangle_{n+1} \xrightarrow{\psi_i} \triangle_n \times [0,1] \xrightarrow{\Delta} X \times [0,1] \xrightarrow{F} Y\right] \end{array}$$

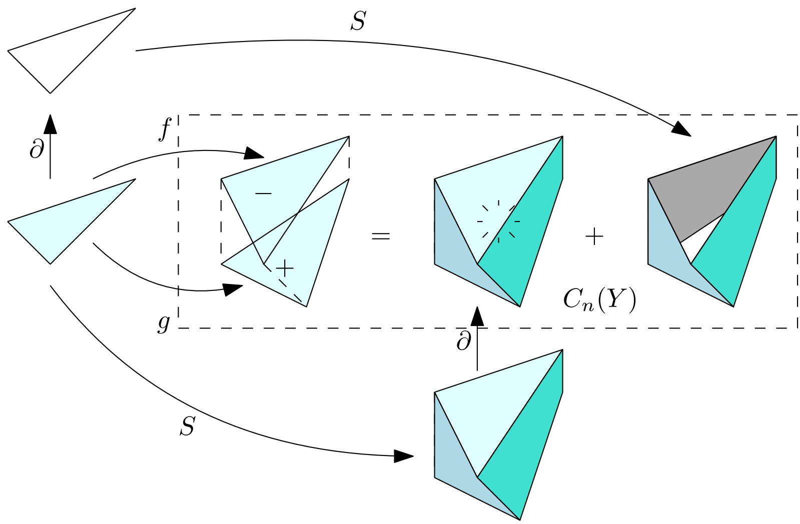


图 1.6: 同伦映射

不难计算出, 这个 S_n 总满足同伦的条件, 如下图.

例 1.21 对于复形 $C_\bullet$, 若有同伦 $S: 0 \simeq \mathrm{id}$, 则称 S 是一个**收缩 (contracting) 同伦**. 显然, 如果有收缩同伦, 那么 $\mathsf{H}_n(C_\bullet) = 0$, 即 $C_\bullet$ 是正合的, 或曰零伦的 (我们下面会定义).

其几何意义就是一个空间如果可以缩成一个点, 那么自然不会有 "洞", 更准确地说, 任何圈都可以填充满, 只需要把缩成一点的 "痕迹" 找到即可.

例 1.22 对于两个复形 $C_\bullet, C'_\bullet$, 若同态 $C_\bullet \xrightarrow{\varphi} C'_\bullet$, 以及 $C'_\bullet \xrightarrow{\psi} C_\bullet$ 使得,

$$\varphi\psi \simeq \mathrm{id} \qquad \psi\varphi \simeq \mathrm{id}$$

则 $\mathsf{H}_n(C_\bullet) = \mathsf{H}_n(C'_\bullet)$ 对所有 n, 因为

$$\mathsf{H}_n(\varphi) \circ \mathsf{H}_n(\psi) = \mathsf{H}_n(\varphi\psi) = \mathsf{H}_n(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$$

称 $C_\bullet$ 和 $C'_\bullet$ 有相同的**同伦形**. 对应到集合上就是存在同伦意义下的互逆连续映射.

1.3 预解

下面我们关心在 $n<0$ 时, $C_n=0$ 的复形 $C_\bullet$, 我们称之为**正复形**.

定义 1.23 (预解) 定义如下概念

- 对复形 $C_\bullet$, 称之为**投射的 (projective)**, 如果每个 C_n 都是投射模.
- 对复形 $C_\bullet$, 称之为**自由的 (free)**, 如果每个 C_n 都是自由模.
- 对复形 $C_\bullet$, 称之为**正合的 (exact)**, 如果 $\mathsf{H}_n(C_\bullet)=0$ 对任何 n.
- 对正复形 $C_\bullet$, 称之为**零伦的 (acyclic)**, 如果 $\mathsf{H}_n(C_\bullet)=0$ 对任何 $n\geq 1$.

显然, 自由模必投射, 不熟悉投射模的读者不妨暂且将之后定理替换为"自由". 容易验证, 一个正复形 $C_\bullet:\ldots\to C_1\to C_0\to 0$ 是零伦的当且仅当如下复形是正合的

$$\ldots\to C_1\to C_0\overset{\text{自然映射}}{\to}\left[\mathsf{H}_0(C_\bullet)=\mathsf{F}_0(C_\bullet)\right]\to 0$$

对于 R-模 A, 倘若有投射而零伦的正复形

$$P_\bullet:\ldots\to P_1\to P_0\to 0$$

使得 $\mathsf{H}_0(P_\bullet)=A$, 则称 $P_\bullet$ 是 A 的**投射预解 (resolution)**. 换言之有如下长正合列

$$\ldots\to P_1\to P_0\to A\to 0$$

为了方便, 我们时常记这个复形为 $P_\bullet:\ldots\to P_1\to P_0\to(A\to)0$

例 1.24 (标准投射预解) 对于 R-模 A, 总存在投射预解, 这是可以考虑模展示 $R_0\hookrightarrow P_0\twoheadrightarrow A$, 其中 P 甚至可以是自由的. 再考虑 R 的模展示

$R_1 \hookrightarrow P_1 \twoheadrightarrow R_0$，以此类推，将 P_i 串联起来

$$\begin{tikzcd}
\cdots & & & R_1 \arrow[dr, hook] & & & & A \\
\cdots & {} \arrow[r] & P_2 \arrow[ur, two heads] \arrow[rr] & & P_1 \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & P_0 \arrow[ur, two heads] & \\
\cdots & R_2 \arrow[ur, hook] & & & & R_0 \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd}$$

显然，这是零伦的. 从而成为投射预解，这被称为**标准投射预解**.

特别地，在 R 是主理想整环的情形，自由模的子模依旧自由，故 $R_0 \hookrightarrow P_0 \twoheadrightarrow A$ 就已经是一个投射预解了.

例 1.25 有如下例子.

1. 显然，奇异同调 (1.6) 定义的复形都是自由的，从而是投射的.

2. 而每一个单纯形视作拓扑空间其对应的奇异复形是零伦的而自由的.

3. 对于一个单点空间 $\{*\}$，其奇异同调群 $\mathsf{H}_n(\{*\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ 0 & n \geq 1 \end{cases}$，因为根据定义他们无非是

$$\ldots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}$$

故这是一个零伦但不正合的复形.

命题 1.26 (比较定理) 若有两个正复形 $C_\bullet, C'_\bullet$ 满足 $C_\bullet$ 投射，而 $C'_\bullet$ 零伦，则任何同态

$$\varphi_{-1} : \mathsf{H}_0(C_\bullet) \to \mathsf{H}_0(C'_\bullet)$$

可以 "延拓" 成复形之间的同态 $\varphi : C_\bullet \to C'_\bullet$，使之诱导的映射 $\mathsf{H}_0(\varphi) = \varphi_{-1}$，且除此之外，任何两个这样的同态都同伦. 换言之，在同伦意义下这是唯一的.

证明 证明的方法无疑是追图.

存在性. 将 $\mathsf{H}_0(C'_\bullet)$ 置于 -1 位置上, 这样无疑只需要 "延拓出去" 即可, 如下图

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, dashed] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\varphi_1"] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\Leftarrow"] & C_0 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\varphi_0"] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\Leftarrow"] & \mathsf{H}_0(C_\bullet) \arrow[d, "\varphi_{-1}"] \\
{} \arrow[r, dashed] & C_1' \arrow[r] & C_0' \arrow[r] & \mathsf{H}_0(C'_\bullet)
\end{tikzcd}$$

假设 $m < n$ 时, $\varphi_m : C_m \to C'_m$ 已经构造好, 且已经使得有定义的情况下满足条件 $\varphi\partial = \partial\varphi$, 则

$$\begin{aligned}
&\exists \varphi_n : C_n \to C'_n \\
&\quad \text{s.t.}\ \partial\varphi_n = \varphi_{n-1}\partial \\
&\because C_n \text{ 是投射模}
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, dashed] & C_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, dashed, "\varphi_n"'] \arrow[dr] & C_{n-1} \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] & {} \\
{} \arrow[r, dashed] & C'_n \arrow[r, "\partial"] & C'_{n-1} \arrow[r, dashed] & {}
\end{tikzcd}$$

这样一直构造下去即可. 显然, 此时 φ 诱导的 $\mathsf{H}_0(\varphi)$ 等于 φ_{-1}.

同伦唯一性. 倘若得到两个映射 φ 和 ψ, 通过将两个同态相减, 我们转化成证明 $\varphi_{-1} = 0, \psi = 0$ 的情况.

假设 $m < n$ 时, $S_m : C_m \to C'_{m+1}$ 已经构造好[7], 且已经使得有定义的情况下满足条件 $\partial S + S\partial = \varphi$, 则

$$\left[C_n \overset{\varphi_n}{\to} C'_n\right] - \left[C_n \overset{\partial}{\to} C_{n-1} \overset{S_{n-1}}{\to} C'_n\right] \text{被 } \partial \text{ 杀死}$$

具体来说如下 $C_n \to C'_{n-1}$ 的映射, 通过追图知

$$\partial(\varphi_n - S_{n-1}\partial) = \partial\varphi - \partial S\partial = \varphi\partial - (\varphi - S\partial)\partial = 0$$

故这诱导了 $C_n \to \mathsf{Z}_n(C'_\bullet)$ 的同态, 由于 C'_n 处的正合性, $\mathsf{B}_n(C'_\bullet) = \mathsf{Z}_n(C'_\bullet)$, 再利用 C_n 的投射性于满射 $C'_{n+1} \to \mathsf{B}_n(C'_\bullet)$, 这诱导了 $C_n \to C'_{n+1}$ 的映射, 总结起来

$$\begin{aligned}
&\exists S_n : C_n \to C'_{n+1} \\
&\quad \text{s.t.}\ \partial S_n = \varphi_n - S_{n-1}\partial
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, dashed] & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_n"'] \arrow[dl, dashed, "S_n"'] & C_{n-1} \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] \arrow[dl, "S_{n-1}"'] & {} \\
{} \arrow[r, dashed] & C'_{n+1} \arrow[r, "\partial"'] & C'_n \arrow[r] & C'_{n-1} \arrow[r, dashed] & {}
\end{tikzcd}$$

[7]当然, $n \leq 0$ 时, S_n 是任意的, 因为 $\partial = 0$

命题得证. $\square$

例 1.27 下面, 我们需要运用上面定理的变体来回答如下一个问题

> 如果我们最开始不是利用单纯形定义的奇异复形, 而是采用方块 $\square^n = [0,1]^n$ 来定义的, 取边界类似, 得到的同调群是否是一样的?

换言之, 现在, 对拓扑空间 X, 我们抽象地看

- 现在有两组自由复形 $C_\bullet^\triangle(X)$ 和 $C_\bullet^\square(X)$. *(由单纯形和方块定义)*
- $\mathsf{H}_0(C_\bullet^\triangle(X)) = \mathsf{H}_0(C_\bullet^\square(X))$ *(在 0, 1 维时因为都是单点和线段)*
- $C_\bullet^\triangle(\square_n)$ 以及 $C_\bullet^\square(\triangle_n)$ 是零伦的. *(因为都是可缩成一点的)*

好在以上几点已经足以得到 $\mathsf{H}_n(C_\bullet^\triangle(X)) = \mathsf{H}_n(C_\bullet^\square(X))$ 的结论. 方法类似于 *(1.26)* 的过程, 我们将 $\mathrm{id} : \mathsf{H}_0(C_\bullet^\triangle(X)) = \mathsf{H}_0(C_\bullet^\square(X))$ 延拓出去, 并且类似方法将反方向延拓出去, 这样这两个同态给出了相同的同伦形, 见 *(1.22)*.

首先, 找一个自然同态 $C_\bullet^\triangle(X)$ 到 $C_\bullet^\square(X)$ 使得其诱导了 $\mathsf{H}_0(C_\bullet^\triangle(X))$ 之间的自然的同构 $\mathsf{H}_0(C_\bullet^\square(X))$.

- 这只要对每一个 $\triangle_n$ 指定一个形如 $\sum_{(n)} [\square_n \overset{\cdot\cdot}{\to} \triangle_n]$ 的复 "方形", 这样就可以定义

$$\begin{array}{rccc} \varphi(X)_n : & C_n^\triangle(X) & \longrightarrow & C_n^\square(X) \\ & \left[\triangle_n \overset{\triangle}{\to} X\right] & \longmapsto & \sum_{(n)} \left[\square_n \overset{\cdot\cdot}{\to} \triangle_n \overset{\triangle}{\to} X\right] \end{array} \qquad (*)$$

注意到

$$\left[\triangle_n \overset{\triangle}{\to} X\right] \overset{\partial}{\mapsto} \overset{\varphi}{\mapsto} \sum\sum [\square_{n-1} \to \triangle_{n-1} \to \triangle_n \to X]$$

$$\left[\triangle_n \overset{\triangle}{\to} X\right] \overset{\varphi}{\mapsto} \overset{\partial}{\mapsto} \sum\sum [\square_{n-1} \to \square_n \to \triangle_n \to X]$$

其成为同态需要在 $X = \triangle_n$ 以及最后的同态是 id 时成立即可, 即

$$\sum\sum [\square_{n-1} \to \triangle_{n-1} \to \triangle_n] = \sum\sum [\square_{n-1} \to \square_n \to \triangle_n]$$

- 假设 $m<n$ 时的 $\sum_{(m)}[\square_m \dashrightarrow \triangle_m]$ 已经构造完了，令 $X=\triangle_n$，这样对于 $m<n$，其同态已经可以按 $(*)$ 已经可以定义到 $\varphi(\triangle_n)_m$ 了，这时，类似 *(1.26)* 的过程，因为两个复形都是自由且零伦的，可以继续延拓下去得到

$$\hat{\varphi}(\triangle_n): C_\bullet^{\triangle}(\triangle_n) \to C_\bullet^{\square}(\triangle_n)$$

于是这个单形自己 $[\triangle_n \xrightarrow{\mathrm{id}} \triangle_n] \in C_\bullet^{\triangle}(\triangle_n)$ 就通过这个映射成一些复"方形"，记像为 $\sum_{(n)}[\square_n \dashrightarrow \triangle_n]$，仔细端详 $\partial\hat{\varphi}=\hat{\varphi}\partial$ 这个条件，就是上一步要求的条件.

下面，要找**自然的**同伦.

- 同样，也只需要对每一个 $\triangle_n$ 指定一个形如 $\sum'_{(n)}[\square_{n+1} \dashrightarrow \triangle_n]$，这样就可以定义

$$\begin{array}{rccc} S(X)_n: & C_n^{\triangle}(X) & \longrightarrow & C_{n+1}^{\square}(X) \\ & \left[\triangle_n \xrightarrow{\triangle} X\right] & \longmapsto & \sum'_{(n)} \vdots \left[\square_{n+1} \dashrightarrow \triangle_n \xrightarrow{\triangle} X\right] \end{array} \qquad (**)$$

- 方法和上面是类似的. 这里关键是利用 $C_\bullet^{\triangle}(\square_n)$ 以及 $C_\bullet^{\square}(\triangle_n)$ 是零伦的事实.

实际上，具体的同态和同伦都是可以找到的，这通常有几何意义. 例如一个可行的操作是将方形剖分为小的三角形，换言之，这给出了 $\sum_{(n)}[\triangle_n \to \square_n]$，反面是将单纯形理解为将某个面映粘结成点组成的图形，这则给出了 $\sum_{(n)}[\square_n \to \triangle_n]$. 而同伦则几何意义是将经过 $\varphi\psi$ 后的"自己"和原本的自己放在柱的两边，然后再剖分.

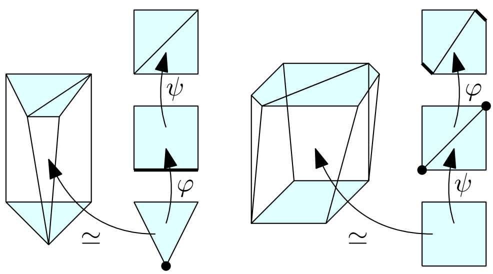


图 1.7: 三角形还是方形?

诚然, 就拓扑而言, 显然上面的例子太过庞大, 无法精确含入到定理 (1.26) 的法网之中, 但是这确乎是同调论的一个基本方法论 —想要说明同调群存在自然同构总是构造恰当的同伦, 因此, 把握定理的过程相比更为重要.

以上这种在一般的单形 $\left[\triangle_n \overset{\Delta}{\to} X\right]$ 取 $X=\triangle_n$, $\Delta=\mathrm{id}$ 使之成为 "标准单形", 再通过 $\left[\triangle_n \overset{\Delta}{\to} X\right] = \left[\triangle_n \overset{\mathrm{id}}{\to} \triangle_n \overset{\Delta}{\to} X\right]$ 回到一般单形的技巧是代数拓扑中常用的技巧, 这种技巧被称为 "**模型**". 其一般形态参见 [14] P286 定理 11.5.1.

1.4 长正合序列

我们注意到, 所谓复形无非是一串用边缘同态串联起来的模, 我们也可以讨论其正合性.

定义 1.28 已知复形以及之间的同态 $C_\bullet \overset{\varphi}{\to} C'_\bullet \overset{\psi}{\to} C''_\bullet$ 称之在 $C'_\bullet$ 处**正合 (exact)** 的, 如果对任意 n, 下列模以及之间的同态

$$C_n \overset{\varphi_n}{\to} C'_n \overset{\psi_n}{\to} C''_n$$

在 C'_n 处正合. 类似地, 可以定义复形的**短正合列**, 如果上式为短正合列.

定理 1.29 (长正合序列) 对于复形的短正合列

$$0 \to C_\bullet \overset{\varphi}{\to} C'_\bullet \overset{\psi}{\to} C''_\bullet \to 0$$

则有在每一处都正合的长正合列

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, dashed] & \mathsf{H}_n(C_\bullet) \arrow[r, "\varphi_n"] & \mathsf{H}_n(C'_\bullet) \arrow[r, "\psi_n"] & \mathsf{H}_n(C''_\bullet) \arrow[dll, "\partial_n"] \\
 & \mathsf{H}_{n-1}(C_\bullet) \arrow[r, "\varphi_{n-1}"] & \mathsf{H}_{n-1}(C'_\bullet) \arrow[r, "\psi_{n-1}"] & \mathsf{H}_{n-1}(C''_\bullet) \arrow[r, dashed] & \cdots
\end{tikzcd}$$

其中映射 ∂ 满足

$$\begin{aligned}
\partial:\quad \mathsf{H}_n(C''_\bullet) &\longrightarrow \mathsf{H}_{n-1}(C_\bullet) \\
[z] &\longmapsto \left[\varphi^{-1}(\partial(\psi^{-1}(z)))\right]
\end{aligned} \qquad n \text{ 圈 } z \in \mathsf{Z}_n(C''_\bullet)$$

其中 $[*]$ 表示 $Z_n(\dots)$ 中元素在 $\mathsf{H}_n(\dots) = \mathsf{Z}_n(\dots)/\mathsf{B}_n(\dots)$ 中的像 [8].

证明 首先, 对于每一小段

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_n \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d, "\partial"'] & C'_n \arrow[r, "\psi_n"] \arrow[d, "\partial"'] & C''_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{n-1} \arrow[r, "\varphi_{n-1}"'] & C'_{n-1} \arrow[r, "\psi_{n-1}"'] & C''_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

于是根据蛇形引理这诱导出

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathsf{Z}_n(C_\bullet) \arrow[r, "\varphi_n"] & \mathsf{Z}_n(C'_\bullet) \arrow[r, "\psi_n"] & \mathsf{Z}_n(C''_\bullet) \arrow[dll, rounded corners] & \\
& \mathsf{F}_{n-1}(C_\bullet) \arrow[r, "\varphi_{n-1}"] & \mathsf{F}_{n-1}(C'_\bullet) \arrow[r, "\psi_{n-1}"] & \mathsf{F}_{n-1}(C''_\bullet) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

回忆 ∂ 的分解 (1.2), 实际上有 ∂_{n+1} 诱导来的映射

$$\mathsf{F}_{n+1}(\dots) \xrightarrow{\text{满}} \mathsf{B}_n(\dots) \xrightarrow{\text{单}} \mathsf{Z}_n(\dots)$$

截取上面的同态有

$$\begin{tikzcd}
& F_n(C_\bullet) \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d, "\partial"'] & F_n(C'_\bullet) \arrow[r, "\psi_n"] \arrow[d, "\partial"'] & F_n(C''_\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathsf{Z}_{n-1}(C_\bullet) \arrow[r, "\varphi_{n-1}"'] & \mathsf{Z}_{n-1}(C'_\bullet) \arrow[r, "\psi_{n-1}"'] & \mathsf{Z}_{n-1}(C''_\bullet) &
\end{tikzcd}$$

这根据蛇形引理又诱导出一条正合列, 而因为单射和满射的条件, 再根据 (1.5), 实际上这条正合列是

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{H}_n(C_\bullet) \arrow[r, "\varphi_n"] & \mathsf{H}_n(C'_\bullet) \arrow[r, "\psi_n"] & \mathsf{H}_n(C''_\bullet) \arrow[dll, rounded corners] \\
\mathsf{H}_{n-1}(C_\bullet) \arrow[r, "\varphi_{n-1}"] & \mathsf{H}_{n-1}(C'_\bullet) \arrow[r, "\psi_{n-1}"] & \mathsf{H}_{n-1}(C''_\bullet)
\end{tikzcd}$$

[8] 上面的定义中 $\psi^{-1}(z)$ 是 z 在 ψ_n 下的原像, $\partial(\dots)$ 是 $C'_\bullet$ 的 ∂_n 的像, $\varphi^{-1}(\dots)$ 是 ψ_{n-1} 原像, 而放置在 H_{n-1} 中, 他们是同一个元素

上述的所有滥用记号记作 φ, ψ 的映射都表示由最原始的 φ, ψ 诱导而来. 因此, 将其串联起来就得到命题的结论. 其中关于映射的结论来自于蛇形引理映射的具体刻画. □

例 1.30 同样是奇异同调的例子. 对于拓扑空间 X, 子空间 $A \subseteq X$, 于是可以将 $C_n(A)$ 视作 $C_n(X)$ 的子群, 于是就可以定义 相对链复形

$$C_n(X, A) = C_n(X)/C_n(A)$$

边缘同态由 $C_\bullet(A)$ 与 $C_\bullet(X)$ 之间的 ∂ 诱导[9]. 其同调模 $\mathsf{H}_n(C_\bullet(X, A))$ 记为 $\mathsf{H}_n(X, A)$, 称为 相对同调群 .

将 A 粘合成一点的空间记为 X/A. 如果子空间性质较好的话, $\mathsf{H}_n(X, A) = \mathsf{H}_n(X/A)$. 如下两个例子可以让读者把握到这一事实.

- 首先, 如果 A 是可连续缩成一点的 (和单点集有相同的同伦形), 那么根据例子 (1.25) 以及定理 (1.29), 那么当 $n \geq 2$ 时 [10], $\mathsf{H}_n(X) = \mathsf{H}_n(X, A)$, 因为这两个模夹在一些 0 中间

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, dashed] & 0 \arrow[r] & \mathsf{H}_n(X) \arrow[r] & \mathsf{H}_n(X, A) \arrow[dll, rounded corners, "\partial_n"] \\
 & 0 \arrow[r] & \mathsf{H}_{n-1}(X) \arrow[r] & \mathsf{H}_{n-1}(X, A) \arrow[r, dashed] & {}
\end{tikzcd} \qquad n \geq 2$$

- 依此可以计算 $\mathbb{S}^m$ 的同调群我们可以将 $\mathbb{S}^m$ 视作由实心球 $\mathbb{D}^m$ 的边界 $\mathbb{S}^{m-1}$ 粘和起来所得的空间, 因为 $\mathbb{D}^m$ 是可连续缩成一个点的, 故

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, dashed] & \mathsf{H}_n(\mathbb{S}^{m-1}) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathsf{H}_n(\mathbb{S}^m) \arrow[dll, rounded corners, "\partial_n"] \\
 & \mathsf{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{m-1}) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathsf{H}_{n-1}(\mathbb{S}^m) \arrow[r, dashed] & {}
\end{tikzcd} \qquad n \geq 2$$

这样可以根据 m 归纳上来, 具体计算需要处理好低次的情形.

[9] 具体来说 $[z \bmod C_n(A) \mapsto \partial_X z \bmod C_{n-1}(A)]$

[10] 实际上, 对于低次的同调模我们还能说更多, 我们可以定义增广奇异复形, 以及其简约奇异同调群, 以抹平其在 0 次上的扰动, 参见 (5.1)

例 1.31 对于拓扑空间 X, 我们会发现如果就几何上看如下两个单形是一样的

$$\left[\triangle_3 \xrightarrow{\Delta} X\right] \qquad -\left[\triangle_3 \xrightarrow{(02)} \triangle_3 \xrightarrow{\Delta} X\right]$$

其中 (02) 表示 $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_2$ 位置交换, 实际上 $\mathfrak{S}_{\{0,\dots,n\}}$ 作用在所有单形上通过

$$\sigma: \quad \left[\triangle_n \xrightarrow{\Delta} X\right] \longmapsto \left[\triangle_n \xrightarrow{\sigma} \triangle_n \xrightarrow{\Delta} X\right]$$

其中 σ 是把 $\boldsymbol{e}_i$ 映射到 $\boldsymbol{e}_{\sigma(i)}$ 的线性映射. 这启发我们定义

$$K_n(X) = \left\langle \Delta - (\operatorname{sgn}\sigma)\sigma\Delta : \sigma \in \mathfrak{S}_{\{0,\dots,n\}} \right\rangle$$

这样定义 $C_n^*(X) = C_n(X)/K_n(X)$ 将把那些冗余的, 几何上相同的单形等同起来组成的复形. 不难发现 $\partial(K_n(X)) \subseteq K_{n-1}(X)$, 故 ∂ 自然地继承到 $C_n^*(X)$ 上. 自然地问题是

用 $C_n^*(X)$ 得到的同调群 $\mathsf{H}_n(C_\bullet^*(X))$ 是否和 $\mathsf{H}_n(X)$ 自然同构?

答案是肯定的, 方便起见, 记 $\mathsf{H}_n^*(X) = \mathsf{H}_n(C_\bullet^*(X))$

- 可以得到复形的正合列

$$0 \to K_\bullet(X) \to C_\bullet(X) \to C_\bullet^*(X) \to 0 \tag{$*$}$$

  于是根据长正合序列 *(1.29)*, 将有

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, dashed] & \mathsf{H}_n(K_\bullet(X)) \arrow[r] & \mathsf{H}_n(X) \arrow[r] & \mathsf{H}_n^*(X) \arrow[dll, "\partial_n"] \\ & \mathsf{H}_{n-1}(K_\bullet(X)) \arrow[r] & \mathsf{H}_{n-1}(X) \arrow[r] & \mathsf{H}_{n-1}^*(X) \arrow[r, dashed] & \cdots \end{tikzcd}$$

  故只需要证明 $\mathsf{H}_n(K_\bullet(X)) = 0$ 即 $K_\bullet$ 正合即可.

- 利用 $\triangle_m$ 可缩的事实 [11], 不难得到当 $n \geq 1$ 时, $\mathsf{H}_n(\triangle_m) = \mathsf{H}_n^*(\triangle_m) = 0$, 从而根据长正合序列得到 $\mathsf{H}_n(K_\bullet(\triangle_m)) = 0$.

- $K_0(X) = 0$, 因为 $\mathfrak{S}_{\{0\}}$ 是平凡群.

[11] 在可缩时, 同伦可以取成将 n 维单形映射为 $n+1$ 维单形的映射, 即在最开始加上一个顶点 (这是为了调整符号), 好处是, 此时, 在 $C_n^*(X)$ 中, 这和代表元的选取无关.

- 下面我们要来定义 $K_\bullet(X)$ 的同伦 T. 方法和 *(1.27)* 一样, 方法是选取 “模型 ” 方便起见, 采用如下记号

$$a=\sum\dots\left[X\xrightarrow{f}Y\right]\qquad [a\xrightarrow{g}Z]=\sum\dots\left[X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z\right]$$

因为 $K_0=0$, 取 $T_0=0$. 尔后, 假设 m 之前的 T 已经定义好, 考虑

$$x=\left[\triangle_m\xrightarrow{\mathrm{id}}\triangle_m\right]-(\operatorname{sgn}\sigma)\left[\triangle_m\xrightarrow{\sigma}\triangle_m\xrightarrow{\mathrm{id}}\triangle_m\right]\in K_m(\triangle_m)$$

因为 $\partial(\mathrm{id}\,x-T\partial x)=\partial x-\partial T\partial x=\partial x-(\mathrm{id}-T\partial)\partial x=0$, 故存在 $y\in K_{m+1}$ 使得 $\partial y=\mathrm{id}\,x-T\partial x$, 记这个 $y=Tx$. 挑选 K_m 的一组基 B, 定义

$$T_m:K_m(X)\longrightarrow K_{m+1}(X)\qquad B\ni\sum\dots\left[x\xrightarrow{\triangle}X\right]\longmapsto\sum\dots\left[Tx\xrightarrow{\triangle}X\right]$$

这样一直定义下去就会得到同伦 T 使得 $\partial T+T\partial=\mathrm{id}$, 从而得到 $K_\bullet(X)$ 上从 id 到 0 的同伦, 而且在 0 处也满足这一性质, 故 $\mathsf{H}_n(K_\bullet(X))=0$.

上述方法能够奏效的主要原因就在于上面的同伦虽然是 $K_m(X)\to K_{m+1}(X)$, 但实际上完全通过 $\triangle_m$ 才进入 X, 换言之, 原本 $\triangle_m\xrightarrow{\triangle}X$ 已经“撑开”了一个 m 维可缩区域了, 同伦可以取得恰当不跑到外面去.

第二章　导出函子

2.1　导出函子

定义 2.1 (左导出函子) 给定加性函子 $\boldsymbol{F}: R\text{-Mod} \to S\text{-Mod}$, 我们将要定义其第 n 个**左导出 (derived) 函子**

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{L}_n\boldsymbol{F}: & R\text{-Mod} & A \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[r, mapsto] & \mathsf{H}_n(\boldsymbol{F}P_\bullet^{(A)}) \arrow[d, "\mathsf{H}_n(\boldsymbol{F}\varphi_\bullet)"] & S\text{-Mod} \\
& \cdots & B \arrow[r, mapsto] & \mathsf{H}_n(\boldsymbol{F}P_\bullet^{(B)}) & \cdots
\end{tikzcd}
$$

其中需要对每个 R-模 A, 取定投射预解 $P_\bullet^{(A)}$, 再对每一个 R-模之间的同态 $A \xrightarrow{\varphi} B$, 根据 *(1.26)*, 取定预解之间的同态 $\varphi_\bullet : P_\bullet^{(A)} \to P_\bullet^{(B)}$.

换言之, 先通过取定预解和预解之间的同态, 再通过 $\boldsymbol{F}$ 函子变成一个 S-Mod 复形, 再取同调模.

倘若选定的预解或预解的同态不同, 则两个函子存在自然同构[1]

例 2.2 对于投射模 P, 则 $n \geq 1$ 时, $\mathbf{L}_n\boldsymbol{F}P = 0$. 因为 $\ldots \to 0 \to P(\to P) \to 0$ 就是一个投射预解.

[1] 例如 A 的两个预解 $P_\bullet, P'_\bullet$, 那么同样根据 (1.26), 将 id 延拓出去, 得到 $\iota : P_\bullet \leftrightarrow P'_\bullet : \jmath$, 且 $\iota \circ \jmath \simeq \mathrm{id}, \jmath \circ \iota \simeq \mathrm{id}$, 而通过加性函子同伦关系不变 (因为同伦的定义), 从而 $\mathsf{H}_n(\boldsymbol{F}\iota)$ 就是一个同构. 假如对 $A \xrightarrow{\varphi} B$ 挑选了两个预解 $P_\bullet^{(A)} \overset{\varphi,\varphi'}{\to} P_\bullet^{(B)}$, 同样根据 (1.26) 可以找二者的同伦, 通过加性函子同伦关系不变 (因为同伦的定义), 从而 $\mathsf{H}_n(\boldsymbol{F}\varphi) = \mathsf{H}_n(\boldsymbol{F}\varphi')$.

例 2.3 (挠函子) 对于右 R-模 M, 熟知的张量积函子

$$
\begin{tikzcd}
M\otimes_R - : & R\text{-Mod} & A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\longmapsto"] & M\otimes_R A \arrow[d, "M\otimes_R\varphi"] & \mathsf{Ab\,Grp} \\
& \cdots & B \arrow[r, mapsto] & M\otimes_R B & \cdots
\end{tikzcd}
$$

除此之外, 我们还知道对于正合列 $A\to B\to C\to 0$, 其诱导的列也是正合的

$$M\underset{R}{\otimes}A\to M\underset{R}{\otimes}B\to M\underset{R}{\otimes}C\to 0$$

这是一个右正合函子, 但一般没有左边的结论.

这样, 如果取预解 $P_\bullet:\ldots\to P_1\to P_0(\to A)\to 0$, 那么会得到

$$M\underset{R}{\otimes}P_\bullet:\ldots\to M\underset{R}{\otimes}P_1\to M\underset{R}{\otimes}P_0(\to M\underset{R}{\otimes}A)\to 0$$

则 $\mathsf{H}_n(M\otimes_R P_\bullet)=\boldsymbol{L}_n[M\otimes_R -]\,A$.

- 由于在 $M\otimes_R P_0$ 处依旧正合, 有 $\boldsymbol{L}_0[M\otimes_R -]\,A=M\otimes_R A$.
- 下面计算 $\boldsymbol{L}_1[M\otimes_R -]$, 对于 A 的模展示 $R_0\hookrightarrow P_0\to A\to 0$, 不妨取 *(1.24)* 所挑选的标准投射预解

$$\ldots\xrightarrow{\twoheadrightarrow R_1\hookrightarrow}P_1\xrightarrow{\twoheadrightarrow R_0\hookrightarrow}P_0\xrightarrow{\twoheadrightarrow A\to}0$$

通过作用函子得到

$$\ldots\xrightarrow{\twoheadrightarrow M\otimes_R R_1\to}M\underset{R}{\otimes}P_1\xrightarrow{\twoheadrightarrow M\otimes_R R_0\to}M\underset{R}{\otimes}P_0\xrightarrow{\twoheadrightarrow M\otimes_R A\to}0$$

故

$$
\begin{aligned}
\mathsf{F}_1(\ldots) &= \operatorname{cok}\left[M\otimes_R P_2\xrightarrow{\twoheadrightarrow M\otimes_R R_1\to}M\otimes_R P_1\right] && \because \text{“}\twoheadrightarrow\text{”}\\
&= \operatorname{cok}\left[M\otimes_R R_1\to M\otimes_R P_1\right] && \because \text{右正合}\\
&= M\otimes_R R_0\\
\mathsf{H}_1(\ldots) &= \ker\left[\mathsf{F}_1(\ldots)\to \mathsf{Z}_0(\ldots)\right] && \because \text{“}\hookrightarrow\text{”}\\
&= \ker\left[\mathsf{F}_1(\ldots)\xrightarrow{\to Z_0(\ldots)\hookrightarrow}M\otimes_R P_0\right]\\
&= \ker\left[M\otimes_R R_0\to M\otimes_R P_0\right]
\end{aligned}
$$

故

$$\boldsymbol{L}_1\left[M\underset{R}{\otimes}-\right]A=\ker\left[M\underset{R}{\otimes}R_0\to M\underset{R}{\otimes}P_0\right]$$

这个函子被记为 $\mathrm{Tor}_r(M,-)$，称为**挠 (torsion) 函子**．显然，挠函子衡量了 $M\otimes_R-$ 的与左正合性的距离．

- 特别地，如果假定 $R=\mathbb{Z}$ 换言之，R-模即 *Abel* 群．此时自由模的子模还是自由的，故 $0\to R\to P(\to A)\to 0$ 就已经是一个预解了，当 $n\geq 2$ 时，$\boldsymbol{L}_n[M\otimes_R-]=0$.

我们将在后章继续讨论.

上述结果可以推广到所有的右正合函子.

命题 2.4 若函子 $\boldsymbol{F}$ 是右正合的，则

(1) $\boldsymbol{L}_0\boldsymbol{F}$ 自然同构于 $\boldsymbol{F}$.

(2) 若有正合列

$$0\to R_{n-1}\xrightarrow{*}P_{n-1}\to\ldots\to P_0\to A\to 0$$

且 P_i 皆投射，则有正合列

$$0\to\boldsymbol{L}_n\boldsymbol{F}A\to\boldsymbol{F}R_{n-1}\xrightarrow{\boldsymbol{F}*}\boldsymbol{F}P_{n-1}$$

换句话说 $\boldsymbol{L}_n\boldsymbol{F}A=\ker[\boldsymbol{F}R_{n-1}\xrightarrow{\boldsymbol{F}*}\boldsymbol{F}P_{n-1}]$.

证明 证明是类似的.

(1) 考虑 A 的预解 $\ldots\to P_1\to P_0(\to A)\to 0$，通过 $\boldsymbol{F}$，这正合列的末梢 $\ldots\to\boldsymbol{F}P_1\xrightarrow{\text{正}}\boldsymbol{F}P_0(\xrightarrow{\text{正}}\boldsymbol{F}A)\xrightarrow{\text{正}}0$ 依旧是正合的，故 $\boldsymbol{L}_0\boldsymbol{F}A=\boldsymbol{F}A$. 自然性是显然的.

(2) 为 R_n 续弦，考虑 R_n 的投射预解 $\ldots\to P_{n+1}(\to R_n)\to 0$，这可以和正合列拼接成 A 的投射预解

$$P_\bullet:\ldots\to P_{n+2}\to P_{n+1}\xrightarrow{\twoheadrightarrow R_n\hookrightarrow}P_n\to\ldots\to P_0\to A$$

作用 $\boldsymbol{F}$ 得到

$$\boldsymbol{F}P_\bullet : \ldots \to \boldsymbol{F}P_{n+2} \to \boldsymbol{F}P_{n+1} \overset{\twoheadrightarrow \boldsymbol{F}R_n \to}{\to} \boldsymbol{F}P_n \to \ldots \to \boldsymbol{F}P_0 \to \boldsymbol{F}A$$

这里采取和上面略不一样的论证, 考虑将上列链弯折得到的正合列

$$\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{F}P_{n+2} \arrow[r] \arrow[d] & \boldsymbol{F}P_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & \boldsymbol{F}R_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \boldsymbol{F}P_n \arrow[r, equal] & \boldsymbol{F}P_n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

根据蛇形引理有正合列

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{F}P_{n+2} \arrow[r] & \mathsf{Z}_{n+1}(\ldots) \arrow[r] & \wr \arrow[dll, rounded corners] \\
0 \arrow[r] & \mathsf{F}_n(\ldots) \arrow[r] & \mathsf{F}_n(\ldots) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中 $0 \to \wr \to \boldsymbol{F}R_n \overset{\boldsymbol{F}_*}{\to} \boldsymbol{F}P_n$. 仔细端详第一行, 发现第一个映射的像正是 $\mathsf{B}_{n+1}(\ldots)$, 从而 $\wr = \mathsf{H}_{n+1}(\ldots)$. 命题得证. □

2.2　长正合序列

引理 2.5 (马掌引理) 对于 R-模短正合列 $A \to A' \to A''$, 可以挑选各自的预解和之间同态 $P_\bullet \to P'_\bullet \to P''_\bullet$ 使之是短正合的.

证明　先取 A 和 A'' 的预解 $P_\bullet$ 和 $P'_\bullet$, 作 $P'_\bullet = P_\bullet \oplus P''_\bullet$. 先考 0 处的情形, 构造如下 α, β,

$\alpha = [P_0 \twoheadrightarrow A \hookrightarrow A']$

β使下图交换

$$\left[\begin{tikzcd}
 & P''_0 \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[d] \\
A' \arrow[r, two heads] & A''
\end{tikzcd}\right]$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_0 \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, dashed, "\alpha"] & P_0 \oplus P''_0 \arrow[r, "\pi"] & P''_0 \arrow[r] \arrow[d, two heads] \arrow[dl, dashed, "\beta"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & A' \arrow[r] & A'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

于是合成 α,β 得到 $\alpha\oplus\beta$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_0 \arrow[r, "\iota"] \arrow[d] \arrow[dr, dashed, "\alpha"'] & P_0\oplus P_0'' \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\alpha\oplus\beta"] & P_0'' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "\beta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & A' \arrow[r] & A'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

则图中分出的四块三明治都交换, 故整体交换, 以及裂正合性不必说, $\alpha\oplus\beta$ 是满射利用追图或者利用蛇形引理得到 $\operatorname{cok}\alpha\oplus\beta=0$.

之后, 根据蛇形引理取每一列的核得到正合列 $0\to R_1\to R_1'\to R_1''\to 0$, 以及正合性

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "\iota"] \arrow[d] & P_1\oplus P_1'' \arrow[r, "\pi"] & P_1'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & R_1 \arrow[r] & R_1' \arrow[r] & R_1'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

继续上述步骤即可. $\square$

定理 2.6 (长正合序列) *对于加性函子 $\boldsymbol{F}:R\text{-Mod}\to S\text{-Mod}$, 一个 R-Mod 中的正合列 $A\hookrightarrow A'\twoheadrightarrow A''$, 则有如下长正合列*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, dashed] & \boldsymbol{L}_n\boldsymbol{F}A \arrow[r] & \boldsymbol{L}_n\boldsymbol{F}A' \arrow[r] & \boldsymbol{L}_n\boldsymbol{F}A'' \arrow[dll, out=0, in=180] & \\
& \boldsymbol{L}_{n-1}\boldsymbol{F}A \arrow[r] & \boldsymbol{L}_{n-1}\boldsymbol{F}A' \arrow[r] & \boldsymbol{L}_{n-1}\boldsymbol{F}A'' \arrow[dll, dashed, out=0, in=180] & \\
& \boldsymbol{L}_0\boldsymbol{F}A \arrow[r] & \boldsymbol{L}_0\boldsymbol{F}A' \arrow[r] & \boldsymbol{L}_0\boldsymbol{F}A'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

证明 根据马掌引理 (2.5) 可以挑选投射预解以及之间同态 $P_\bullet\to P_\bullet'\to P_\bullet''$ 是短正合的. 因为这是短正合的, $\boldsymbol{F}P_\bullet\to\boldsymbol{F}P_\bullet'\to\boldsymbol{F}P_\bullet''$ 也是短正合的. 根据 (1.29), 命题得证. $\square$

例 2.7 回忆挠函子 *(2.3)*, 一个短正合列 $0\to A\to B\to C\to 0$, 于是有正合列

$$\operatorname{Tor}(M,A)\to\operatorname{Tor}(M,B)\to\operatorname{Tor}(M,C)\to M\underset{R}{\otimes}A\to M\underset{R}{\otimes}B\to M\underset{R}{\otimes}C\to 0$$

这条结论也可以由蛇形引理以及对挠函子的刻画直接得到. 之前我们说 $\mathrm{Tor}(M,A)$ 衡量了 $M\otimes_R -$ 与左正合的距离, 这里则回答了我们能对 $M\otimes_R -$ 作用之后的短正合列说点什么.

特别地, 如果 $R=\mathbb{Z}$, 还可以在左边接上 "$0\to$", 这样实际上说明第二个以后的导出函子都是 0.

评注 2.8 实际上, 对于加性函子 $\boldsymbol{F}$, 若 n 使得 $\boldsymbol{L}_n\boldsymbol{F}(A)=0$ 对任意 A, 则对任何 $N>n$, $\boldsymbol{L}_N\boldsymbol{F}(A)=0$.

因为考虑模展示 $R\hookrightarrow P\twoheadrightarrow A$, 此时利用长正合序列有

$$\underbrace{\boldsymbol{L}_{n+1}\boldsymbol{F}(P)}_{=0}\to \boldsymbol{L}_{n+1}\boldsymbol{F}(A)\to \underbrace{\boldsymbol{L}_n\boldsymbol{F}(R)}_{=0}$$

这迫使 $\boldsymbol{L}_{n+1}\boldsymbol{F}(A)=0$.

需要指出, 上述长正合序列还是自然的, 证明见 [16] P46, 或者读者也可以亲手尝试证明, 证明的关键是构造中间的预解集之间的同态.

2.3 对偶

下面我们将之前的所有概念都推广到对偶上, 这样, 我们手上会多很多例子.

定义 2.9 (上复形) 类比复形的定义 *(1.1)*, 取一族 R-模 $C^\bullet=\{C^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, 以及之间的一族同态 $\mathrm{d}=\{\mathrm{d}^n: C^n\to C^{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, 若满足

$$\mathrm{d}^{n+1}\circ\mathrm{d}^n=0 \qquad \text{(零同态)}$$

则称 $(C^\bullet,\mathrm{d})$ 是一个 R-模 **上链复形 (cochain complex)**, 其中 d 依旧被称为 **微分 (differential)** 或 **边缘同态 (boundary operator)**. 如下图

$$\mathrm{d}^{n+1}\circ\mathrm{d}^n=0 \quad\Bigg|\quad \begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, dashed] & C^n \arrow[r, "\mathrm{d}^n"] \arrow[rr, bend right, "0"'] & C^{n+1} \arrow[r, "\mathrm{d}^{n+1}"] & C^{n+2} \arrow[r, dashed] & \cdots \end{tikzcd}$$

实际上, 对于上链复形 $C^\bullet$, 若记 $\tau: n \mapsto -n$, $C^{\tau(\bullet)}$ 就是一个复形. 上同调最典范的例子就是微分形式了, 参见 (1.8). 或者以对偶范畴的考虑, 在讲箭头倒置的对偶范畴中, 上链复形被视作链复形.

定义 2.10 *仿照 (1.4), 对于上链复形 $C^\bullet$, 我们定义*

- $\ker \mathrm{d}^n \subseteq C^n$ *中的元素被称为* **n-闭 (closed) 形式** *或* **n-上圈 (cocycle)** *.*
- $\mathrm{im}\,\mathrm{d}^{n-1} \subseteq C^n$ *中的元素被称为* **n-正合 (exact) 形式** *或* **n-上边 (coboundary)** *.*
- $\mathsf{H}^n(C^\bullet) = \ker \mathrm{d}^n / \mathrm{im}\,\mathrm{d}^{n-1}$*, 这被称为 $C^\bullet$ 的第 n 个* **上同调 (cohomology) 模** *.*

同样记 $\tau: n \mapsto -n$, 那么显然 $\mathsf{H}_{-n}(C^{\tau(\bullet)}) = \mathsf{H}^n(C^\bullet)$. 如果以对偶范畴考虑, 那么核变为余核, 像变为余像 (即像), 根据 (1.3), 以此得到的同调模依旧是一致的.

类似, 也可以定义**同态**和**同伦**[2]. 以及**正上链复形**, **内射上链复形**, **零伦上链复形**.

定义 2.11 (预解) *对于 R-模 A, 倘若有内射而零伦的正上链复形*

$$I^\bullet : 0 \to I^0 \to I^1 \to \dots$$

使得 $\mathsf{H}^0(I^\bullet) = A$, 则称 $I^\bullet$ 是 A 的 **内射预解 (resolution)** *. 换言之有如下长正合列*

$$0 \to A \to I^0 \to I^1 \to \dots$$

为了方便, 我们时常记这个复形为 $I_\bullet : 0 \to (A \to) I^0 \to I^1 \to \dots$.

例 2.12 *对于 R-模 A 都有内射预解, 类似于标准投射预解的过程 (1.24). 其中需要利用结论, 任何 R-模都是某个内射模的子模, 其证明参见 [8] P35.*

[2] 注意, 此时 $S: C^n \to C^{n-1}$.

下面两条定理依旧保持.

命题 2.13 (比较定理) 若有两个正上链复形 $C^\bullet, C^\bullet_*$ 满足 $C^\bullet$ 内射, 而 $C^\bullet_*$ 零伦, 则任何同态

$$\hat{\varphi}: \mathsf{H}^0(C^\bullet) \to \mathsf{H}^0(C^\bullet_*)$$

可以 "延拓" 成复形之间的同态 $\varphi: C^\bullet \to C^\bullet_*$, 使之诱导的映射 $\mathsf{H}^0(\varphi) = \hat{\varphi}$, 且除此之外, 任何两个这样的同态都同伦. 换言之, 在同伦意义下这是唯一的.

定理 2.14 (长正合序列) 对于上链复形的短正合列

$$0 \to C^\bullet \xrightarrow{\varphi} C^\bullet_* \xrightarrow{\psi} C^\bullet_{**} \to 0$$

则有在每一处都正合的长正合列

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, dashed] & H^n(C^\bullet) \arrow[r, "\varphi_n"] & H^n(C^\bullet_*) \arrow[r, "\psi_n"] & H^n(C^\bullet_{**}) \arrow[dll, "\mathrm{d}_n"] & \\
& H^{n+1}(C^\bullet) \arrow[r, "\varphi_{n+1}"] & H^{n+1}(C^\bullet_*) \arrow[r, "\psi_{n+1}"] & H^{n+1}(C^\bullet_{**}) \arrow[r, dashed] & {}
\end{tikzcd}$$

然后可以定义对应的导出函子.

定义 2.15 (右导出函子) 给定加性函子 $\boldsymbol{F}: R\text{-}\mathsf{Mod} \to S\text{-}\mathsf{Mod}$, 我们将要定义其第 n 个**右导出 (derived) 函子**

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{R}^n\boldsymbol{F}: & R\text{-}\mathsf{Mod} & A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[rr, phantom, ""] & \mathsf{H}^n(\boldsymbol{F} I^\bullet_{(A)}) \arrow[d, "\mathsf{H}^n(\boldsymbol{F}\varphi_\bullet)"] & S\text{-}\mathsf{Mod} \\
& \cdots & B \arrow[r, mapsto] & \mathsf{H}^n(\boldsymbol{F} I^\bullet_{(B)}) & \cdots
\end{tikzcd}$$

其中需要对每个 R-模 A, 取定内射预解 $I^\bullet_{(A)}$, 再对每一个 R-模之间的同态 $A \xrightarrow{\varphi} B$, 根据 *(2.13)*, 取定预解之间的同态 $\varphi_\bullet: I^\bullet_{(A)} \to I^\bullet_{(B)}$.

换言之, 先通过取定预解和预解之间的同态, 再通过 $\boldsymbol{F}$ 函子变成一个 S-Mod 上链复形, 再取同调模.

倘若选定的预解或预解的同态不同, 则两个函子存在自然同构

命题 2.16 若函子 $\boldsymbol{F}$ 是左正合的, 则

(1) $\mathbf{R}^0\boldsymbol{F}$ 自然同构于 $\boldsymbol{F}$.

(2) 若有正合列

$$0 \to A \to I^0 \to \ldots \to I^{n-1} \xrightarrow{*} S^{n-1} \to 0$$

且 I^i 皆内射, 则有正合列

$$\boldsymbol{F}I^{n-1} \xrightarrow{\boldsymbol{F}*} \boldsymbol{F}S^{n-1} \to \mathbf{R}^n\boldsymbol{F}A \to 0$$

换句话说 $\mathbf{R}^n\boldsymbol{F}A = \operatorname{cok}[\boldsymbol{F}I_{n-1} \xrightarrow{\boldsymbol{F}*} \boldsymbol{F}S_{n-1}]$.

定理 2.17 (长正合序列) 对于加性函子 $\boldsymbol{F}: R\text{-Mod} \to S\text{-Mod}$, 一个 R-Mod 中的正合列 $A \hookrightarrow A' \twoheadrightarrow A''$, 则有如下长正合列

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{R}^0\boldsymbol{F}A \arrow[r] & \mathbf{R}^0\boldsymbol{F}A' \arrow[r] & \mathbf{R}^0\boldsymbol{F}A'' \arrow[dll, dashed] \\
 & \mathbf{R}^{n-1}\boldsymbol{F}A \arrow[r] & \mathbf{R}^{n-1}\boldsymbol{F}A' \arrow[r] & \mathbf{R}^{n-1}\boldsymbol{F}A'' \arrow[dll] \\
 & \mathbf{R}^n\boldsymbol{F}A \arrow[r] & \mathbf{R}^n\boldsymbol{F}A' \arrow[r] & \mathbf{R}^n\boldsymbol{F}A'' \arrow[r, dashed, dash] & {}
\end{tikzcd}$$

以上证明完全对偶于之前的证明, 当中会用到关于内射模的一些和投射模类似的性质, [8] P36.

评注 2.18 (反变函子的导出函子) 最后, 需要指出的是反变函子的左右导出函子. 设反变函子 $\boldsymbol{F}: R\text{-Mod} \to S\text{-Mod}$, 此时链复形通过 $\boldsymbol{F}$ 会变为上链复形. 我们可以通过视作函子 $R\text{-Mod}^{op} \to S\text{-Mod}$ 来定义. 也就是说此时

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{L}_n\boldsymbol{F}: & R\text{-Mod} & A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathrm{H}_n(\boldsymbol{F}I^{\bullet}_{(A)}) & S\text{-Mod} \\
 & & {} \arrow[r, mapsto, "\circlearrowleft"] & {} & \\
 & \cdots & B \arrow[r, mapsto] & \mathrm{H}_n(\boldsymbol{F}I^{\bullet}_{(B)}) \arrow[uu, "\mathrm{H}_n(\boldsymbol{F}\varphi_\bullet)"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

其中 $I_{(A)}^{\bullet}$ 是预先取定的 A 的内射预解. 以及

$$
\begin{tikzcd}
\boldsymbol{R}^n\boldsymbol{F}: & R\text{-}\mathsf{Mod} & A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathsf{H}^n(\boldsymbol{F}P_{\bullet}^{(A)}) & S\text{-}\mathsf{Mod} \\
 & \cdots & B \arrow[r, mapsto] & \mathsf{H}^n(\boldsymbol{F}P_{\bullet}^{(B)}) \arrow[u, "\mathsf{H}^n(\boldsymbol{F}\varphi_{\bullet})"'] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

其中 $P_{\bullet}^{(A)}$ 是预先取定的 A 的投射预解.

当然, 上述定义无非是通过取对偶或者取符号的操作就可以转化到之前的情况, 其提出自然是因为一些时候我们就是要研究上链复形以及反变函子这些对偶概念, 在下一章, 我们会看到两个非常重要的导出函子.

第三章　扩张函子和挠函子

3.1　扩张函子

有了对于左导出函子和反变函子的刻画, 我们可以谈论可以说同调中最为重要的例子了. 回忆对于 R-模 A, B, $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ 表示 A 到 B 的所有 R-同态. 一般而言, 这只是 Abel 群, 在 R 交换时, 上面才有典范的 R-模结构.

定义 3.1 (扩张函子) 固定 R-模 M, 考虑如下函子

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
\mathrm{Hom}_R(M,-): & R\text{-}\mathsf{Mod} & A \arrow[r, mapsto] \arrow[dd, "\varphi"'] & \mathrm{Hom}_R(M,A) \arrow[dd, "{\substack{\varphi\circ-:\\ \psi\mapsto\varphi\circ\psi}}"] & \mathsf{Ab\,Grp} \\
 & & {} \arrow[r, mapsto] & {} & \\
 & \cdots & B \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Hom}_R(M,B) & \cdots
\end{tikzcd}$$

于是其右导出函子 $\boldsymbol{R}^n(\mathrm{Hom}_R(M,-))$ 得以定义, 我们记为 $\mathrm{Ext}_R^n(M,-)$. 且根据熟知的结论是若有正合列 $0 \to A \to A' \to A''$, 则有正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M, A) \to \mathrm{Hom}_R(M, A') \to \mathrm{Hom}_R(M, A'')$$

即 $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ 是左正合函子. 由 *(2.16)*, $\boldsymbol{R}^0(\mathrm{Hom}_R(M,-)) = \mathrm{Hom}_R(M,-)$. 即 $\mathrm{Ext}_R^0(M,-) = \mathrm{Hom}_R(M,-)$.

例 3.2 当 M 是投射模时, $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ 是正合的, 从而当 $n \geq 1$ 时, $\mathrm{Ext}_R^n(M,-) = 0$.

例 3.3 当 B 是内射模时, 其内射预解可以直接取为 $0\to(B\to)B\to 0\to\ldots$, 故当 $n\geq 1$ 时, $\mathrm{Ext}_R^n(M,-)\,(B)=0$.

定义 3.4 (扩张函子) 固定 R-模 M, 考虑如下反变函子 *(参见 (2.18))*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(-,M): & R\text{-}\mathsf{Mod} & A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Hom}_R(A,M) & \mathsf{Ab\,Grp} \\
 & \cdots & B \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Hom}_R(B,M) \arrow[u, "-\circ\varphi:" ', "\psi\mapsto\psi\circ\varphi"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

于是其右导出函子 $\mathcal{R}^n(\mathrm{Hom}_R(-,M))$ 得以定义, 我们记为 $\mathrm{Ext}_R^n(-,M)$. 且根据熟知的结论是若有正合列 $A\to A'\to A''\to 0$, 则有正合列

$$0\to\mathrm{Hom}_R(M,A'')\to\mathrm{Hom}_R(M,A')\to\mathrm{Hom}_R(M,A)$$

换言之, $\mathrm{Hom}_R(-,M)$ 是左正合函子. 同样有 $\mathcal{R}^0(\mathrm{Hom}_R(-,M))=\mathrm{Hom}_R(-,M)$. 即 $\mathrm{Ext}_R^0(-,M)=\mathrm{Hom}_R(-,M)$.

例 3.5 当 M 是内射模时, $\mathrm{Hom}_R(-,M)$ 是正合的, 从而当 $n\geq 1$ 时, $\mathrm{Ext}_R^n(-,M)=0$.

例 3.6 当 A 是投射模时, 其投射预解可以直接取为 $\ldots\to 0\to A(\to A)\to 0$, 故当 $n\geq 1$ 时, $\mathrm{Ext}_R^n(-,M)\,(A)=0$.

命题 3.7 上述记号是兼容的, 换言之, 对任意 n, 有自然同构

$$\mathrm{Ext}_R^n(-,B)\,(A)\cong\mathrm{Ext}_R^n(A,-)\,(B)$$

换言之, 我们可以记上面同构的 *Abel* 群为 $\mathrm{Ext}_R^n(A,B)$.

证明 使用归纳法, 我们已经看到 $n=0$ 时已经成立了. 下面证明 $n=1$ 的情况, 取如下正合列, 其中 I 内射

$$0\to B\to I\to S\to 0$$

使用 $\mathrm{Hom}_R(A,-)$ 右导出函子长正合序列 (2.17), 可得

$$\mathrm{Hom}_R(A,I)\to\mathrm{Hom}_R(A,S)\to\mathrm{Ext}^1_R(A,-)\,(B)\to\underbrace{\mathrm{Ext}^1_R(A,-)\,(I)}_{=0}\qquad(*)$$

再考虑 A 的投射预解 $\ldots\to P_1\to P_0(\to A)\to 0$, 因为 P_i 投射, 则有正合列

$$0\to\mathrm{Hom}_R(P_i,B)\to\mathrm{Hom}_R(P_i,I)\to\mathrm{Hom}_R(P_i,S)\to 0$$

这实际上是复形之间的短正合列, 这样, 根据 (1.29) 和右导出函子的定义, 以及 (3.5,3.6) 有正合列

$$\mathrm{Hom}_R(A,I)\to\mathrm{Hom}_R(A,S)\to\mathrm{Ext}^1_R(-,B)\,(A)\to\underbrace{\mathrm{Ext}^1_R(-,I)\,(A)}_{=0}\qquad(**)$$

结合 $(*)$ 和 $(**)$ 立得 $\mathrm{Ext}^1_R(A,-)\,(B)\cong\mathrm{Ext}^1_R(-,B)\,(A)$.

在 $n\geq 2$ 的情形是类似的, 此时 $(*)$ 和 $(**)$ 分别换为

$$\underbrace{\mathrm{Ext}^{n-1}_R(A,I)}_{=0}\to\mathrm{Ext}^{n-1}_R(A,S)\to\mathrm{Ext}^n_R(A,-)\,(B)\to\underbrace{\mathrm{Ext}^n_R(A,-)\,(I)}_{=0}$$

$$\underbrace{\mathrm{Ext}^{n-1}_R(A,I)}_{=0}\to\mathrm{Ext}^{n-1}_R(A,S)\to\mathrm{Ext}^n_R(-,B)\,(A)\to\underbrace{\mathrm{Ext}^n_R(-,I)\,(A)}_{=0}$$

注意到其中用到了归纳假设确保了记号 $\mathrm{Ext}^{n-1}_R(A,S)$. □

评注 3.8 (降落地面) *于是, 我们可以放心大胆地使用 (2.4,2.16) 结论. 下面, 方便起见, 直接记* $\mathrm{Ext}^1=\mathrm{Ext}$. *则*

- *对于模* A,B, *若有模展示* $0\to R\xrightarrow{\dagger}P\to A\to 0$, *则*

$$\mathrm{Ext}_R(A,B)=\mathrm{cok}\left[\mathrm{Hom}_R(P,B)\xrightarrow{-\circ\dagger}\mathrm{Hom}_R(R,B)\right]$$

若有 "内射展示" $0\to B\to I\xrightarrow{\ddagger}S\to 0$, *则*

$$\mathrm{Ext}_R(A,B)=\mathrm{cok}\left[\mathrm{Hom}_R(A,I)\xrightarrow{\ddagger\circ-}\mathrm{Hom}_R(A,S)\right]$$

- *更一般地, 若有正合列 $0 \to R_{n-1} \xrightarrow{\dagger} P_{n-1} \to \ldots \to P_0 \to A \to 0$, 其中 P_i 皆投射, 则*

$$\mathrm{Ext}_R^n(A,B) = \mathrm{cok}\left[\mathrm{Hom}_R(P_{n-1},B) \xrightarrow{-\circ\dagger} \mathrm{Hom}_R(R_{n-1},B)\right]$$

若有正合列 $0 \to B \to I^0 \to \ldots \to I^{n-1} \xrightarrow{\ddagger} S^{n-1} \to 0$, 其中 I_i 皆内射, 则

$$\mathrm{Ext}_R^n(A,B) = \mathrm{cok}\left[\mathrm{Hom}_R(A,I_{n-1}) \xrightarrow{\ddagger\circ-} \mathrm{Hom}_R(A,S_{n-1})\right]$$

理论说了很多, 但其实大部分数学家想要直接把握同调模心里想的还是用这个转化.

最后我们指出, 对于短正合列 $0 \to B \to B' \to B'' \to 0$, 作用 $\mathrm{Hom}_R(A,-)$ 只能得到左正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(A,B) \to \mathrm{Hom}_R(A,B') \to \mathrm{Hom}_R(A,B'') \to \mathrm{Ext}_R(A,B) \to \ldots$$

就单点看, 若 a 映到 B'' 中, 则必然可以提升回到 B' 中, 但是整体看最后的满射却无法得到, 换句胡说 $A \to B''$ 的同态不总是可以提升回到某个 $A \to B'$ 的同态, 尽管每一点都可以. 换句话说, 我们没法一致地提升回 B'. 而扩张函子正是用来衡量这种 "一致性". 聪明的读者甚至会从这样的解释中看到一些几何意味.

3.2 Baer 和

对于数学家来说, 对一个东西添加多少种理解方式都不为过. 下面这一段将是 Ext 函子被称为扩张函子的原因. 本部分之后不会被用到, 只是留给好奇的读者阅读.

评注 3.9 *注意到, 按照降落地面 (3.8), 若有正合列*

$$0 \to R_{n-1} \xrightarrow{\dagger} P_{n-1} \to \ldots \to P_0 \to A \to 0$$

其中 P_i 皆投射，则 $\operatorname{Ext}_R^n(A,B)$ 中的元素可以被表示为一个同态 $\varphi: R_{n-1} \to B$，且两个同态相同当且仅当他们的差经过 P_{n-1}，即存在 $[P_{n-1} \to B]$ 使得 $[R_{n-1} \to P_{n-1} \to B] =$ 他们的差.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & P_{n-1} \arrow[r, dashed] & P_0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0 \\
& B & \cdots & \cdots & A &
\end{tikzcd}$$

如上图，倘若在 A, B 之间添加模和同态使得

$$0 \to B \to \ldots \to \ldots \to A \to 0 \qquad (*)$$

是正合列，则根据比较定理 *(1.26)*，id_A 将被延拓出去 *(*最后一步由正合性诱导*)* 得到某个 $R_{n-1} \to B$. 且是同伦的，就结果而言，就是两个同态 φ_1, φ_2 同伦的意思即存在 $S: P_n \to B$ 使得 $[R_{n-1} \to P_{n-1} \xrightarrow{S} B] = [R_{n-1} \xrightarrow{\varphi_1 - \varphi_2} B]$. 换言之，$\varphi_1 - \varphi_2$ 经过经过 P_{n-1}. 这样，每一个在 A, B 之间添加模和同态使得 $(*)$ 是正合列的方案都唯一定义了一个 Ext_R^n 的元素.

定义 3.10 (n-扩张) 对于模 A, B，定义 B 沿着 A 的n-扩张是

- 一族模 $\{E_i\}_{i=0}^{n+1}$，其中 $E_0 = B, E_{n+1} = A$.
- 一族同态 $\{\varphi_i : E_i \to E_{i+1}\}_{i=0}^{n}$. 使得下列是正合列

$$0 \to E_0 \xrightarrow{\varphi_0} E_1 \xrightarrow{\varphi_1} \ldots \xrightarrow{\varphi_n} E_{n+1} \to 0$$

同样的，对于 1-扩张简称扩张.

对于两个 n-扩张 (E_i, φ_i) 和 (E_i, φ_i')，若一族同态 $\psi_i : E_i \to E_i'$ 满足

$$\begin{array}{l|l}
\begin{array}{l}
\psi_0 = \mathrm{id} \\
\psi_{n+1} = \mathrm{id} \\
\forall 1 \le i \le n, \\
\quad \psi_i \varphi_i = \varphi_i' \psi_{i-1}
\end{array}
&
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & E_1 \arrow[r, dashed] \arrow[d] & E_n \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & E_1' \arrow[r, dashed] & E_n' \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\end{array}$$

考虑 “存在一个同态” 在全体 B 沿着 A 的 n-扩张中生成的等价关系, 称为**等价**. 换句话说两个扩张 $\mathcal{E},\mathcal{E}'$ 等价当且仅当存在有限个扩张 $\mathcal{E}_i$ 使得存在同态

$$\mathcal{E} \leftrightarrows \mathcal{E}_1 \leftrightarrows \ldots \leftrightarrows \mathcal{E}'$$

其中 $\urcorner \leftrightarrows \sqsupset$ 表示存在同态 $\urcorner \to \sqsupset$ 或存在同态 $\sqsupset \to \urcorner$. 注意到对于 1-扩张而言, “存在一个同态” 就是等价, 这根据蛇形引理不难得到.

在为了下面行文方便, 我们约定暂时的记号 $\textsc{Ext}^n(A,B)$ 为全体 B 沿着 A 的 n-扩张, 等价关系为 $\textsc{Eqv}$,

以下是一些模论不太常见的结论, 摘自 [8]P85.

引理 3.11 给出 R-模的交换图

$$\square = \left[\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\varphi"] \\ B \arrow[r, "\psi"'] & Y \end{tikzcd}\right] \qquad \searrow = \left[\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha+\beta", "x\mapsto(\alpha x,\beta x)"'] & A\oplus B \arrow[r, "\varphi-\psi", "(a,b)\mapsto\varphi(a)-\psi(b)"'] & Y \end{tikzcd}\right]$$

则

(1) $\square$ 是推出方块当且仅当下列 $\searrow \to 0$ 是正合列.

(2) $\square$ 是拉回方块当且仅当下列 $0 \to \searrow$ 是正合列.

其中 $\searrow \to 0$ 表示右边补上 $\to 0$, 以及 $0 \to \searrow$ 表示左边补上 $0 \to$.

证明 根据推出 (拉回), 余核 (核) 和双积的泛性质直接验证. $\square$

推论 3.12 承上记号, 作为推论, 当 $\square$ 是推出时,

$$\varphi \text{ 诱导了同构 } \operatorname{cok}\alpha \cong \operatorname{cok}\psi \qquad \alpha \text{ 是单射 } \Rightarrow \psi \text{ 也是单射}$$

当 $\square$ 是拉回时,

$$\beta \text{ 诱导了同构 } \ker\alpha \cong \ker\psi \qquad \psi \text{ 是满射 } \Rightarrow \alpha \text{ 也是满射}$$

证明 对于推出的前者, 同样, 验证泛性质 (过程中需要取 B 出发的零同态). 对于推出的后者, 假设 $b \in B$ 使得 $\psi(b) = 0$, 这样 $(\varphi - \psi)(0, b) = 0$ 根据前面的引理, 存在 $x \in A$ 使得 $\alpha(x) = 0$, $\beta(x) = b$, 但是 α 是单射, 这迫使 $b = 0$.

拉回的前者, 还是一样地去验证泛性质. 对于拉回的后者, 任意取 $a \in A$, 因为 ψ 是满射, 故存在 $b \in B$ 使得 $\psi(b) = \varphi(a)$, 于是 $(\varphi - \psi)(a, b) = 0$, 根据前面的引理, $x \in X$ 使得 $\alpha(x) = a$, 得证. $\square$

推论 3.13 *关于上面推论的逆命题, 有*

- *交换图* $\left[\begin{tikzcd} B' \arrow[r, hook] \arrow[d] & E' \arrow[r, two heads] \arrow[d] & A \arrow[d, equal] \\ B \arrow[r, hook] & E \arrow[r, two heads] & A \end{tikzcd}\right]$ *行正合* $\iff$ *左边方块是推出.*
- *交换图* $\left[\begin{tikzcd} B \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & E' \arrow[r, two heads] \arrow[d] & A' \arrow[d] \\ B \arrow[r, hook] & E \arrow[r, two heads] & A \end{tikzcd}\right]$ *行正合* $\iff$ *右边方块是拉回.*

定理 3.14 (Baer 和) *按照 (3.9), 对于模 A, B, 定义了映射*

$$\Phi: \quad \mathrm{E\small{XT}}^n(A,B) \quad \longrightarrow \quad \mathrm{Ext}^n_R(A,B)$$

实际上, 这诱导了双射

$$\hat{\Phi}: \quad \mathrm{E\small{XT}}^n(A,B)/\mathrm{E\small{QV}} \quad \xrightarrow{1:1} \quad \mathrm{Ext}^n_R(A,B)$$

证明　证明分几步.

映射的存在性和可定义性我们已经粗略说明.　简单来说, 任何一个扩张都可以视为零伦复形, 而正合列

$$0 \to R_{n-1} \to P_{n-1} \to \ldots \to P_0 \to A \to 0$$

其中 P_i 皆投射, 因此可以延拓 $A \xrightarrow{\mathrm{id}} A$ 到 P_{n-1}, 最后需要诱导到 $R_{n-1} \to B$ 上. 而假如有两种延拓, 则有同伦同样, 也可以延拓到 P_{n-1}, 此时 $R_{n-1} \to B$ 的两个映射之差通过 P_{n-1}, 故可定义.

首先, 我们证明良定义性.　换句话说, 如果两个扩张存在同态 $\mathcal{E} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{E}'$, 则在 Φ 下的像是相同的. 这是显然的, 因为若 φ 是扩张出去的复形同态, 则复合以 α 就也得到了一个同态, 但是 $\alpha_0 = \mathrm{id}$.

然后, 我们证明满射. 取同态 $\varphi: R_{n-1} \to B$. 注意到给定 P_i 皆投射的正合列

$$0 \to R_{n-1} \to P_{n-1} \to \ldots \to P_0 \to A \to 0$$

我们甚至只需要改动 R_{n-1} 和 P_{n-1} 即可改造成一个 n-扩张, 换句话说, 只要证明如下的 1-扩张满足定理即可

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & P_{n-1} \arrow[r] & P_{n-1}/R_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B & & P_{n-1}/R_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

不妨假设 $n = 1$. 根据 (3.12,3.13), 只要作左边 $\ulcorner$ 的推出方块, 便得到一个扩张.

最后, 证明双射. 假设扩张 (E_i) 满足 $\Phi(E_i) = [\varphi]$, 其中 $\varphi: R_{n-1} \to B$. 根据过程以及上面找到某个扩张的过程, 有交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[dr, phantom, "\text{推出}"] & E \arrow[r] & P_{n-2} \arrow[r, dashed] & P_0 \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & R_{n-1} \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & P_{n-2} \arrow[r, dashed] \arrow[u, equal] \arrow[d] & P_0 \arrow[r] \arrow[u, equal] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[u, equal] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & E_1 \arrow[r] & E_2 \arrow[r, dashed] & E_n \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

这样会得到交换图, 其中虚线的箭头是根据推出得到的.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d, dashed] & P_{n-2} \arrow[r, dashed] \arrow[d] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & E_1 \arrow[r] & E_2 \arrow[r, dashed] & E_n \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

命题得证. □

评注 3.15 趁着我们还记得上面的过程, 我们指出 $\mathrm{EXT}^n/\mathrm{EQV}$ 自动从 Ext_R^n 中继承了到 *Abel* 群的函子结构. 根据上面的构造, 我们只需要指出 1-扩张是如何对应的即可. 选择模展示 $R \overset{\iota}{\hookrightarrow} P \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} A$.

零元 换句话说表征的同态 $R\to B$ 通过 P, 不妨假设 $[R\to B]=0$ 且 $[P\to B]=0$. 根据证明过程和 *(3.13)*, 要作推出方阵, 这样, 要求的扩张 $B\hookrightarrow E\twoheadrightarrow A$ 就满足

$$E=\operatorname{cok}\left[R\overset{\iota\oplus 0}{\to}P\oplus B\right]=\frac{P\oplus B}{R\oplus 0}=A\oplus B$$

仔细考察映射可知 $A\overset{\jmath}{\to}A\oplus B\overset{\rho}{\twoheadrightarrow}B$ 中的 $\jmath$ 和 ρ 分别是嵌入和投影映射.

函子性 假如有 $A\to A'$, 此时可以作图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] & A' \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & B & & A \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

作 ⌝ 的拉回方阵将从 B 沿着 A' 的扩张得到 B 沿着 A 的一个扩张, 这诱导了 $\mathrm{E{\scriptstyle XT}}^n(A',B)\to\mathrm{E{\scriptstyle XT}}^n(A,B)$, 还诱导了

$$\mathrm{Ext}^n_R(A',B)/\mathrm{E{\scriptstyle QV}}\to\mathrm{Ext}^n_R(A,B)/\mathrm{E{\scriptstyle QV}}$$

且通过我们定理中的 $\hat{\Phi}$ 给出了 $\mathrm{Ext}^n_R(A',B)\to\mathrm{Ext}^n_R(A,B)$, 而这个同态恰好是 $A\to A'$ 诱导的. 类似地, 对 $B\to B'$ 也有类似的操作.

加法 考虑两个扩张 $B\hookrightarrow E,E'\twoheadrightarrow A$, 定义对角同态和余对角同态

$$\begin{array}{cccc} \Delta: & A & \longrightarrow & A\oplus A \\ & a & \longmapsto & (a,a) \end{array}\qquad \begin{array}{cccc} \nabla: & B\oplus B & \longrightarrow & B \\ & (b_1,b_2) & \longmapsto & b_1+b_2 \end{array}$$

假如有两个扩张 $B\hookrightarrow E,E'\twoheadrightarrow A$, 这可以得到 $B\oplus B$ 沿着 $A\oplus A$ 的扩张

$$B\oplus B\hookrightarrow E\oplus E'\twoheadrightarrow A\oplus A$$

而通过 Δ 和 ∇,

$$\mathrm{E{\scriptstyle XT}}^n(A\oplus A,B\oplus B)\xrightarrow{\mathrm{E{\scriptstyle XT}}^n(\Delta,\nabla)}\mathrm{E{\scriptstyle XT}}^n(A,B)$$

仔细检查扩张 $B\oplus B\hookrightarrow E\oplus E'\twoheadrightarrow A\oplus A$ 的像, 会发现就对应于 $\mathrm{Ext}^n_R(A,B)$ 上的加法.

3.3 挠函子

回顾 (2.3), 我们介绍了挠函子. 下面重新提及.

定义 3.16 (挠函子) 对于右 R-模 M, 张量积函子

$$\begin{tikzcd}
M\otimes_R - : & R\text{-Mod} & A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\varphi"'] & M\otimes_R A \arrow[d, "M\otimes_R\varphi"] & \text{Ab Grp} \\
& \cdots & B \arrow[r, mapsto] & M\otimes_R B & \cdots
\end{tikzcd}$$

除此之外, 我们还知道对于正合列 $A\to B\to C\to 0$, 其诱导的列也是正合的

$$M\underset{R}{\otimes}A\to M\underset{R}{\otimes}B\to M\underset{R}{\otimes}C\to 0$$

换句话说, 这是一个右正合函子, 但一般没有左边的结论. 其左导出函子 $\boldsymbol{L}_n[M\otimes_R -]$ 记作 $\mathrm{Tor}_n^R(M,-)$.

同理, 对于左 R-模 M, 张量积函子

$$\begin{tikzcd}
-\otimes_R M : & \text{Mod-}R & A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\varphi"'] & A\otimes_R M \arrow[d, "\varphi\otimes_R M"] & \text{Ab Grp} \\
& \cdots & B \arrow[r, mapsto] & B\otimes_R M & \cdots
\end{tikzcd}$$

我们同样知道对于正合列 $A\to B\to C\to 0$, 其诱导的列也是正合的

$$A\underset{R}{\otimes}M\to B\underset{R}{\otimes}M\to C\underset{R}{\otimes}M\to 0$$

换句话说, 这是一个右正合函子, 但一般没有左边的结论. 其左导出函子 $\boldsymbol{L}_n[-\otimes_R M]$ 记作 $\mathrm{Tor}_n^R(-,M)$.

定理 3.17 上述记号是兼容的, 换言之, 对任意 n, 有自然同构

$$\mathrm{Tor}_n^R(-,B)\,(A)\cong\mathrm{Tor}_n^R(A,-)\,(B)$$

换言之, 我们可以记上面同构的 *Abel* 群为 $\mathrm{Tor}_n^R(A,B)$.

证明 证明完全类似于 (3.7) 的证明. 需要注意到凡投射模皆平坦, 即如果 M 是投射模, 则 $M\otimes_R -$ 作为函子是正合的. □

评注 3.18 (降落地面) *于是, 我们可以放心大胆地使用 (2.4,2.16) 结论. 下面, 方便起见, 直接记 $\mathrm{Tor}_1=\mathrm{Tor}$. 则*

- *对于右模 A, 左模 B, 若有模展示 $0\to R\xrightarrow{\dagger}P\to A\to 0$, 则*

$$\mathrm{Tor}^R(A,B)=\ker\left[R\underset{R}{\otimes}B\xrightarrow{\dagger\otimes B}P\underset{R}{\otimes}B\right]$$

  若有模展示 $0\to R'\xrightarrow{\ddagger}P'\to B\to 0$, 则

$$\mathrm{Tor}^R(A,B)=\ker\left[A\underset{R}{\otimes}R'\xrightarrow{A\otimes\ddagger}A\otimes P'\right]$$

- *更一般地, 若有正合列 $0\to R_{n-1}\xrightarrow{\dagger}P_{n-1}\to\ldots\to P_0\to A\to 0$, 其中 P_i 皆投射, 则*

$$\mathrm{Tor}_n^R(A,B)=\ker\left[R_{n-1}\underset{R}{\otimes}B\xrightarrow{\dagger\otimes B}P_{n-1}\underset{R}{\otimes}B\right]$$

  若有正合列 $0\to R'_{n-1}\xrightarrow{\ddagger}P'_{n-1}\to\ldots\to P'_0\to B\to 0$, 其中 P'_i 皆投射, 则

$$\mathrm{Tor}_n^R(A,B)=\ker\left[A\underset{R}{\otimes}R'_{n-1}\xrightarrow{A\otimes\ddagger}A\otimes P'_{n-1}\right]$$

命题 3.19 *若右模 M 是平坦的, 则 $\mathrm{Tor}_n^R(A,M)=0$, 对于任意右模 A, $n\geq 1$.*

若右模 M 是平坦的, 则 $\mathrm{Tor}_n^R(M,B)=0$, 对于任意左模 B, 任意 $n\geq 1$.

证明 考虑 A 的投射预解 $\ldots\to P_1\to P_0(\to A)\to 0$, 则

$$\ldots\to P_1\otimes M\to P_0\otimes M(\to A\otimes M)\to 0$$

依旧零伦, 其同调模在 $n\geq 1$ 时就是 0. 另一条同理. □

命题 3.20 *若左模 A 有“平坦”预解*[1]

$$F_\bullet : \ldots \to F_1 \to F_0 (\to A) \to 0$$

则

$$\mathrm{Tor}_n^R(A, B) = \mathsf{H}_n(F_\bullet \underset{R}{\otimes} B)$$

证明 将预解拆解成短正合列

$$\ldots \xrightarrow{\twoheadrightarrow R_1 \hookrightarrow} F_1 \xrightarrow{\twoheadrightarrow R_0 \hookrightarrow} F_0 \xrightarrow{\twoheadrightarrow A \hookrightarrow} 0$$

不妨约定 $A = R_{-1}$. 于是写成通式就是

$$0 \to R_k \to F_k \to R_{k-1} \to 0$$

考虑其对应的长正合序列, 对于 $n \geq 1, k \geq 0$

$$\underbrace{\mathrm{Tor}_{n+1}^R(F_k, B)}_{=0} \to \mathrm{Tor}_{n+1}^R(R_{k-1}, B) \to \mathrm{Tor}_n^R(R_k, B) \to \underbrace{\mathrm{Tor}_n^R(F_k, B)}_{=0}$$

故 $\mathrm{Tor}_{n+1}(R_{k-1}, B) = \mathrm{Tor}_n(R_k, B)$. 若要证明 $\mathrm{Tor}_n(A, B) = \mathrm{Tor}_n(R_{-1}, B)$ 满足定理, 根据 R 的形式, 只需要验证 $\mathrm{Tor}_1(A, B)$ 对任意 A 满足即可.

当 $n = 0$ 时, 根据长正合序列

$$\underbrace{\mathrm{Tor}_1^R(F_0, B)}_{=0} \to \mathrm{Tor}_1^R(A, B) \to R_0 \underset{R}{\otimes} B \to F_0 \underset{R}{\otimes} B$$

故

$$\mathrm{Tor}_1^R(A, B) = \ker\left[R_0 \underset{R}{\otimes} B \to F_0 \underset{R}{\otimes} B\right]$$

另一方面, 要计算下面的 H_1, 方法完全和 (2.3) 类似

$$\ldots \xrightarrow{\twoheadrightarrow R_1 \otimes_R B \to} F_1 \underset{R}{\otimes} B \xrightarrow{\twoheadrightarrow R_0 \otimes_R B \to} F_0 \underset{R}{\otimes} B \xrightarrow{\twoheadrightarrow A \otimes_R B \to} 0$$

[1] 即 F_i 皆平坦且 $\mathsf{H}_0(F_\bullet) = A$ 的零伦链复形.

而

$$\begin{aligned}
\mathsf{F}_1(\ldots) &= \operatorname{cok}\left[F_2 \otimes_R B \xrightarrow{\twoheadrightarrow R_1 \otimes_R B \rightarrow} F_1 \otimes_R B\right] && \because \text{“}\twoheadrightarrow\text{”} \\
&= \operatorname{cok}\left[R_1 \otimes_R B \rightarrow F_1 \otimes_R B\right] && \because \text{右正合} \\
&= R_0 \otimes_R B \\
\mathsf{H}_1(\ldots) &= \ker\left[\mathsf{F}_1(\ldots) \rightarrow \mathsf{Z}_0(\ldots)\right] && \because \text{“}\hookrightarrow\text{”} \\
&= \ker\left[\mathsf{F}_1(\ldots) \xrightarrow{\rightarrow Z_0(\ldots) \hookrightarrow} F_0 \otimes_R B\right] \\
&= \ker\left[R_0 \otimes_R B \rightarrow F_0 \otimes_R B\right]
\end{aligned}$$

命题得证. □

有了这个定理, (3.18) 中的投射都可以改为平坦.

评注 3.21 上述过程可以自然迁移到任何导出函子上. 对于一个右正合函子 $\boldsymbol{F}$, 如果模 P 使得 $\boldsymbol{L}_n\boldsymbol{F}P = 0$ 对于任何 $n \geq 1$, 则称 P 零伦. 显然, 投射必零伦. 对于模 A, 若有 “零伦” 预解, $P_\bullet : \ldots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 (\rightarrow A) \rightarrow 0$, 即其中每个 P_i 都是零伦的. 则 $\boldsymbol{L}_n\boldsymbol{F}A = \mathsf{H}_n(\boldsymbol{F}P_\bullet)$. 换言之, 我们计算时可以放宽投射的条件改为零伦. 为了具体把握零伦的概念, 我们可以计算一些例子,

- 对怎样的 A, $\operatorname{Ext}^n_R(A, B) = 0$ 对任何 B, $n \geq 1$.

  如果满足条件, 则对于任何正合列 $B \hookrightarrow B' \twoheadrightarrow B''$ 都有正合列

  $$0 \rightarrow \operatorname{Hom}(A, B) \rightarrow \operatorname{Hom}(A, B') \rightarrow \operatorname{Hom}(A, B'') \rightarrow 0$$

  这意味着 A 是投射的. 反之, 若 A 是投射的, 必成立.

- 对怎样的 B, $\operatorname{Ext}^n_R(A, B) = 0$ 对任何 A, $n \geq 1$.

  同理, 当且仅当 B 是内射模. (当然, 这里考虑的是对偶的情形.)

- 对怎样的 A, $\operatorname{Tor}^n_R(A, B) = 0$ 对任何 B, $n \geq 1$.

  类似, 当且仅当 A 平坦.

3.4 计算

下面, 我们给出一些 $\mathbb{Z}$ 上扩张函子和挠函子的计算.

定理 3.22 关于直和直积我们有

(1) $\mathrm{Hom}_R\left(\bigoplus_i A_i, \prod_j B_j\right) = \prod_{i,j} \mathrm{Hom}_R(A_i, B_j)$. [2]

(2) $\mathrm{Ext}_R^n\left(\bigoplus_i A_i, \prod_j B_j\right) = \prod_{i,j} \mathrm{Ext}_R^n(A_i, B_j)$.

(3) $\left(\bigoplus_i A_i\right) \otimes_R \left(\bigoplus_j B_j\right) = \bigoplus_{i,j}(A_i \otimes_R B_j)$.

(4) $\mathrm{Tor}_n^R\left(\bigoplus_i A_i, \bigoplus_j B_j\right) = \bigoplus_{i,j} \mathrm{Tor}_n^R(A_i, B_j)$.

证明 (1) 是经典的代数学结论, 例如参见 [8] P21.

(2) 先对第二个分量的条件, 需要注意到取 A_i 的投射预解

$$\ldots \to P_{i1} \to P_{i0} (\to A_i) \to 0$$

则

$$\ldots \to \bigoplus_i P_{i1} \to \bigoplus_i P_{i0} (\to \bigoplus_i A_i) \to 0$$

是 $\bigoplus_i A_i$ 的投射预解, 作用以 $\mathrm{Hom}_R(-, B)$, 再利用 (1) 的自然同构

$$0 \to \left(\prod_i \mathrm{Hom}_R(A_i, B) \to\right) \prod_i \mathrm{Hom}_R(P_{i0}, B) \to \prod_i \mathrm{Hom}_R(P_{i1}, B) \to \ldots$$

由于 $\ker, \mathrm{im}$ 以及作商等与直积直和可以交换, 故得证.

(3) 也是经典的代数学结论, 例如参见 [4] §6.5 或 [8] P110. (4) 类似上面的方法. □

下面, 我们的目标是计算如下模之间的 $\mathrm{Hom}, \mathrm{Ext}, \otimes, \mathrm{Tor}$(在 $\mathbb{Z}$ 上)

$$\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n \qquad \mathbb{Z} \qquad \mathbb{Q} \qquad \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

注意到 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 同构于单位圆周上全体单位根的乘法群. 因为对于 Abel 群而言, 自由 Abel 群的子群也是自由的, 故投射预解可以只有前两维, 故 $\mathrm{Ext}^n(\ldots) = \mathrm{Tor}_n(\ldots) = 0$ 当 $n \geq 2$.

[2] 当然, Hom 上还有复合结构, 将其解释为直积会难以看到复合结构, 读者可以作下面的等同

$$\mathrm{Hom}_R\left(\bigoplus_i A_i, \prod_j B_j\right) = \left\{\text{无穷矩阵}(f_i^j) : f_i^j \in \mathrm{Hom}_R(A_i, B_j)\right\}$$

定理 3.23 关于 Hom 有如下经典的结果

(1) 对任意 *Abel* 群 A,

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, A) = A \qquad f \longmapsto f(1)$$

(2) 对任意 *Abel* 群 A,

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, A) = \{x \in A : nx = 0\} \qquad f \longmapsto f(1 \bmod n)$$

即 A 的 n-挠部分. 特别地

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) = \frac{m}{(m,n)}\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{(m,n)}$$

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = n \text{ 次单位根群} \cong \mathbb{Z}_n$$

(3) 若 *Abel* 群 A 每个元素阶都有限 (即挠 *Abel* 群), 而 B 无挠, 则 $\mathrm{Hom}(A, B) = 0$.

(4) 剩下 $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_n) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n) = 0$, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

(5) 还有难以计算的

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \qquad \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

留给感兴趣的读者自行查找了解.

$\mathrm{Hom}(\downarrow, \rightarrow)$	$\mathbb{Z}/m$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}/n$	$\mathbb{Z}_{(m,n)}$	0	0	$\mathbb{Z}_n$
$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_m$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$
$\mathbb{Q}$	0	0	$\mathbb{Q}$	?
$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$	0	0	0	?

证明 (1)(2) 容易. (3) 因为 $0 = \operatorname{ord} x\varphi(x)$ 迫使 (因为 B 无挠)$\varphi(x) = 0$ 对任意 $x \in A$. (4) 若有同态 $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_n)$, 则 $0 = n\varphi(x/n) = \varphi(x)$, 故为零同态. 对于 $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n)$ 是类似的. 若有同态 $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$, $\varphi(x) = n\varphi(x/n) \in n\mathbb{Z}$, 对任何 n, 这逼迫 $\varphi(x) = 0$. 关于 $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$, 此即著名的 Cauchy 方程. □

定理 3.24 关于 Ext 有如下结果

(1) 对任何 *Abel* 群 A 都有 $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}, A) = 0$.

(2) 对于任何 *Abel* 群 A 都有 $\mathrm{Ext}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Ext}(A, \mathbb{Q}) = 0$.

(3) 若 *Abel* 群 A 每个元素阶都有限 (即挠 *Abel* 群), 则 $\mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

(4) 剩下 $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_n, A) = A/nA$. 特别地

$$\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_n \qquad \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) = \mathbb{Z}_m/n\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}_{(m,n)}$$

(5) 剩下难以计算的

$$\mathrm{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}), \mathrm{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_m), \mathrm{Ext}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Z}), \mathrm{Ext}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_m)$$

留给感兴趣的读者自行查找了解.

$\mathrm{Ext}(\downarrow, \rightarrow)$	$\mathbb{Z}/m$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}/n$	$\mathbb{Z}_{(m,n)}$	$\mathbb{Z}_n$	0	0
$\mathbb{Z}$	0	0	0	0
$\mathbb{Q}$	?	?	0	0
$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$	?	?	0	0

证明 (1)(2) 因为 $\mathbb{Z}$ 是投射的, $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 都是内射的.

(3) 考虑 $\mathbb{Z}$ 的内射预解

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

作用 $\mathrm{Hom}(A, -)$ 得到

$$0 \to \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q}) \to \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z}) \to 0$$

但是 $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q}) = 0$ 如果 A 是挠群.

(4) 显然,

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$$

是 $\mathbb{Z}_n$ 的预解, 作用以 $\mathrm{Hom}(-, A)$ 得到

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, A) \to \underbrace{\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, A)}_{=A} \xrightarrow{\times n} \underbrace{\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, A)}_{=A} \to \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_n, A) \to 0$$

故 $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_n, A) = A/nA$. □

定理 3.25 关于 $\otimes$ 有如下结果[3]

(1) *对任何 Abel 群 A,*

$$A \otimes \mathbb{Z} = A \qquad a \otimes n \longmapsto na$$

(2) *对任何 Abel 群 A,*

$$A \otimes \mathbb{Z}_n = A/nA \qquad a \times 1 \bmod n \longmapsto a \bmod nA$$

(3) *对任何 Abel 群 A, 记 $S = \mathbb{Z} \setminus 0$, 则张量上 $\mathbb{Q}$ 后是局部化*

$$A \otimes \mathbb{Q} = S^{-1}A = \left\{ \frac{a}{n} : a \in A, n \in S \right\}$$

(4) *若 Abel 群 A 每个元素阶都有限 (即挠 Abel 群), 则*

$$A \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0 \qquad x \otimes y \longmapsto (\mathrm{ord}\, x)x \otimes \frac{y}{\mathrm{ord}\, x} = 0$$

$\mathbb{Q}$ 也是类似的.

$\downarrow \otimes_{\mathbb{Z}} \rightarrow$	$\mathbb{Z}/m$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}/n$	$\mathbb{Z}_{(m,n)}$	$\mathbb{Z}_n$	0	0
$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_m$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$
$\mathbb{Q}$	0	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$	0
$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$	0	0

[3]因为 $\mathbb{Z}$ 是交换的, 左右模是一样的, 故有自然同构 $A \otimes B = B \otimes A$.

证明 (1)(2)(3) 都是经典的交换代数, 参见 [5](8.6)(8.16)(12.13) 或 [6]P26 命题 2.14, P31 练习 2, P39 命题 3.5. (4) 可以目测直接得到. 其中关于 $\mathbb{Q}\otimes\mathbb{Q}=\mathbb{Q}$ 的性质可以利用其泛性质, 也可以直接构造映射, 更可以利用 [5](12.14). □

定理 3.26 关于 Tor 有如下结果[4]

(1) 对任何 *Abel* 群 A,

$$\mathrm{Tor}(\mathbb{Z},A)=\mathrm{Tor}(\mathbb{Q},A)=0$$

(2) 对任何 *Abel* 群 A,

$$\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_n,A)=\{x\in A:nx=0\}$$

即 n-挠部分.

(3) 对于任何 *Abel* 群 A,

$$\mathrm{Tor}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},A)=\{x\in A:\operatorname{ord}x<\infty\}$$

即挠部分.

$\mathrm{Tor}(\downarrow,\to)$	$\mathbb{Z}/m$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}/n$	$\mathbb{Z}_{(m,n)}$	0	0	$\mathbb{Z}_n$
$\mathbb{Z}$	0	0	0	0
$\mathbb{Q}$	0	0	0	0
$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_m$	0	0	$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

证明 (1) 因为 $\mathbb{Z},\mathbb{Q}$ 都是平坦的, 参见 [5](12.20) 或 [6]P39 命题 3.3.

(2) 显然,

$$0\to\mathbb{Z}\xrightarrow{\times n}\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_n$$

[4]因为 $A\otimes B=B\otimes A$, 故 $\mathrm{Tor}(A,B)=\mathrm{Tor}(B,A)$.

是 $\mathbb{Z}_n$ 的预解, 作用以 $A\otimes -$ 得到

$$0\to \mathrm{Tor}(A,\mathbb{Z}_n)\to \underbrace{A\otimes Z}_{=A}\xrightarrow{\times n}\underbrace{A\otimes \mathbb{Z}}_{=A}\to A\otimes \mathbb{Z}_n\to 0$$

故 $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_n,A)=\{x\in A:nx=0\}$.

(3) 显然

$$0\to\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\to 0$$

是平坦预解, 作用以 $A\otimes -$ 得到

$$0\to \mathrm{Tor}(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\to \underbrace{A\otimes Z}_{=A}\to\underbrace{A\otimes \mathbb{Q}}_{=S^{-1}A}\to A\otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\to 0$$

故 $\mathrm{Tor}(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})=\{x\in A:x/1=0\}$, 根据局部化的构造,

$$x/1=0\iff \exists y\in S=\mathbb{Z}\setminus 0,\mathrm{s.\,t.}\,xy=0$$

即 $\operatorname{ord}x<\infty$, 故命题得证. □

这也解释了为什么挠函子得名的原因, $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_n,-)$ 就是取其 n 挠部分, $\mathrm{Tor}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},-)$ 就是取其挠部分.

至此, 根据有限生成 Abel 群结构定理, 我们至少可以说有限生成的 Abel 群的 $\mathrm{Hom},\mathrm{Ext},\otimes,\mathrm{Tor}$ 我们都可以计算了.

最后我们指出, 我们可以给出一些投射模, 内射模, 平坦模的刻画, 证明中采取同调的方法有时会简单.

- 对于主理想整环 R, R 是投射的当且仅当是自由的 (因为自由模的子模是自由的, 而投射模是自由模的直和项); R 是内射的当且仅当是可除的 (这是 Zorn 引理的惯常使用); R 是平坦的当且仅当是无挠的 (因为任何模都是有限生成子模的滤过极限).

- R-模 M 是平坦的, 当且仅当对任意 R 的右理想 I, 自然映射 $I\otimes_R M\to IM$ 是单射. 参见 [16] P69 3.2.4.

- R-模 M 是内射的, 当且仅当对任意 R 的左理想 I, 任何 $I\to E$ 都能延拓到 $R\to E$. 参见 [16] P39 2.3.1.

第四章　同调论大定理

4.1　万有系数定理

我们对于导出函子已经说了不少, 也说明了其在短正合列上的作用, 但是我们没有说明他们在复形上的作用. 好在现在手头上已经有足够的例子, 也能够看到其意义.

定理 4.1 (万有系数定理) *考虑 R-左模 M, 对于一族由右 R-平坦模组成的复形 $P_\bullet$, 且满足对每个 n, $\partial(P_n) = \mathsf{B}_{n-1}(P_\bullet)$ 都是平坦的, 则有如下正合列*

$$0 \to \mathsf{H}_n(P_\bullet) \underset{R}{\otimes} M \to \mathsf{H}_n(P_\bullet \underset{R}{\otimes} M) \to \mathrm{Tor}^R(\mathsf{H}_{n-1}(P_\bullet), M) \to 0$$

证明　注意到我们可以将复形拆成短正合类, 回忆很久之前的 (1.4),

$$0 \to \mathsf{Z}_n \to P_n \to \mathsf{B}_{n-1} \to 0 \tag{$*$}$$

根据条件 B_n 是平坦的, 则使用 $- \otimes_R M$ 的长正合序列得到

$$0 \to \mathsf{Z}_n \underset{R}{\otimes} M \to P_n \underset{R}{\otimes} M \to \mathsf{B}_{n-1} \underset{R}{\otimes} M \to 0$$

给两边的 Z, B 添加上零同态, 实际上可以直接验证这是一个复形之间的短正合列,

$$0 \to \mathsf{Z}_\bullet \underset{R}{\otimes} M \to P_\bullet \underset{R}{\otimes} M \to \mathsf{B}_{\bullet-1} \underset{R}{\otimes} M \to 0$$

下面, 再次使用长正合序列, 回忆计算 (1.12), 得到

$$\ldots \to \mathsf{B}_n \underset{R}{\otimes} M \to \mathsf{Z}_n \underset{R}{\otimes} M \xrightarrow{\dagger} \mathsf{H}_n(P_\bullet \underset{R}{\otimes} M) \to \mathsf{B}_{n-1} \underset{R}{\otimes} M \xrightarrow{\ddagger} \mathsf{Z}_{n-1} \underset{R}{\otimes} M \to \ldots$$

则有短正合列

$$0 \to \operatorname{im} \dagger \to \mathsf{H}_n(P_\bullet \underset{R}{\otimes} M) \to \ker \ddagger \to 0 \tag{$**$}$$

根据 (1.29) 对 "蛇形" 同态的刻画, 我们注意到 $\mathsf{B}_n \otimes_R M \to \mathsf{Z}_n \otimes_R M$ 实际上就是 $\partial \otimes_R M$. 根据 $- \otimes_R M$ 的右正合性,

$$\operatorname{im} \dagger = \mathsf{H}_n(P_\bullet) \underset{R}{\otimes} M$$

同样的道理, 利用 $0 \to \mathsf{B}_{n-1} \to \mathsf{Z}_{n-1} \to \mathsf{H}_{n-1} \to 0$ 的长正合序列可得

$$\ldots \to \operatorname{Tor}(\mathsf{Z}_{n-1}, M) \to \operatorname{Tor}^R(\mathsf{H}_{n-1}(P_\bullet), M) \to \mathsf{B}_{n-1} \underset{R}{\otimes} M \to \mathsf{Z}_{n-1} \underset{R}{\otimes} M \to \ldots$$

考虑 $(*)$ 的正合列可以得到 (实际上我们证明了 Z_n 都平坦)

$$\ldots \to \underbrace{\operatorname{Tor}^2(\mathsf{B}_{n-1})}_{=0} \to \operatorname{Tor}(\mathsf{Z}_n, M) \to \underbrace{\operatorname{Tor}(P_n, M)}_{=0} \to \ldots$$

再注意 $\mathsf{Z}_0 = P_0$, 总之, 这说明

$$\ker \ddagger = \operatorname{Tor}^R(\mathsf{H}_{n-1}(P_\bullet), M)$$

这样带回 $(**)$ 就得证了. □

推论 4.2 *条件承上 (4.1), 如果 R 是主理想整环, 例如 $\mathbb{Z}$, 那么 (4.1) 中的正合列是分裂的*[1]*. 换言之*

$$\mathsf{H}_n(P_\bullet \underset{R}{\otimes} M) = \left[\mathsf{H}_n(P_\bullet) \underset{R}{\otimes} M\right] \oplus \operatorname{Tor}^R(\mathsf{H}_{n-1}(P_\bullet), M)$$

证明 注意到自由 Abel 群的子群都是自由, 如下正合列都是裂正合的

$$0 \to \mathsf{Z}_n \to P_n \to \mathsf{B}_{n-1} \to 0$$

[1]但是这个分裂不是典范的.

于是经过 $-\otimes M$ 还是裂正合的, 于是 $\mathsf{Z}_n\otimes M$ 是 $C_n\otimes M$ 的直和项, 故 $\mathsf{Z}_n\otimes M$ 是 $\mathsf{Z}_n(C_\bullet\otimes M)$ 的直和项 [2], 同时商去[3]$\mathsf{B}_n\otimes M=\mathsf{B}_n(C_\bullet\otimes M)$, 便得到 $\mathsf{H}_n(P_\bullet)\otimes_R M$ 是 $\mathsf{H}_n(P_\bullet\otimes M)$ 的直和项. □

评注 4.3 如读者所知, 对于交换环 R, R-代数[4]R'. 对于自由模 $R^{\oplus I}$, 有

$$R^{\oplus I}\underset{R}{\otimes}R'=(R\underset{R}{\otimes}R')^{\oplus I}=R'^{\oplus I}$$

如果挑选 $R^{\oplus I}$ 的标准基 $\{e_i\}_{i\in I}$, 那么 $R'^{\oplus I}$ 作为 R' 模的标准基也是 $\{e_i\}_{i\in I}$. 他们的差别只是系数发生了变化. 对于这就是这个定理名称 "**万有 (universal) 系数定理**"的由来.

例 4.4 回到拓扑的例子 *(1.6)*, 对于拓扑空间 X, 我们曾经将所有连续的 $[\triangle_n\to X]$ 收集起来并以此为基生成一个自由 *Abel* 群来定义 $C_n(X)$, 我们下面考虑如下这个问题.

> 如果生成的不是自由 *Abel* 群而是环 R 的自由模, 那么同调模会有什么变化? 是否能反映出比 $\mathsf{H}_n(C_\bullet)$ 更多的信息?

如果答案是肯定的, 那么我们将会致力于算各式不同的环上的同调群会发生什么变换, 这反映出怎样更多的拓扑性质.

- 例如如果 $R=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, 我们计算的将是复形的子集, 这相当于指定 X 的 n 维子集[5], 这会非常接近于同调最初的考虑. 在著名的综述 *[17]* 中指出, *Riemann* 最初想要定义一个平面区域 U 上 "洞" 的数量. 实际上, 他定义一块区域是 n 连通的, 如果 n 是满足如下性质的最大的 n, 存在 $n-1$ 条 "闭合曲线", 使得任何其成员的并都不是 U 中某一块开集的边界. 我们会看到, $n=1+\dim_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}\mathsf{H}_n(X,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

  Riemman 证明了, 对于 n 连通区域, 任何极大地, 使得任何子集的并都不是 U 中某一块开集的边界的, "闭合曲线" 组成的集合, 必定具有基数 $n-1$. 因为如果两两无交的闭合曲线族 $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ 满足, U 以 $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$ 为边界, V 以 $\mathcal{A}\cup\mathcal{C}$ 为边

[2]因为, 若 $X=Y\oplus Z$, 则任意 $Y\subseteq W\subseteq X$ 都有 $W=Y\oplus(Z\cap W)$

[3]因为右正合性.

[4]即一个环 R, 还有一个同态 $R\to R'$, 这使得 R' 成为一个 R 模.

[5]具体来说, 可以将子集拆成一些单形, 然后不同拆法的差会成为一个边缘.

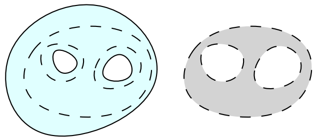


图 4.1: 例如这是一个 3-连通区域

界, 那么对称差 $(U \setminus V) \cup (V \setminus U)$ 以 $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ 为边界 (当然, 要这些曲线 "处于一般位置", 即不发生 "维数过高" 的相交, 以及防止 *Peano* 曲线等一类技术化假定).

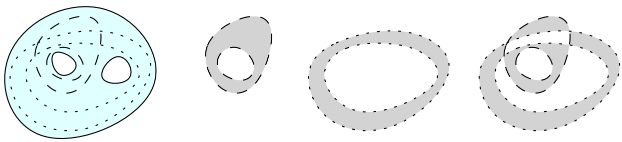


图 4.2: Riemman 的定理

- 例如如果 $R = \mathbb{R}$, 那么我们得到的复形将不是按数量计算, 而是按权重, 我们可以用 "颜色深浅" 表示.

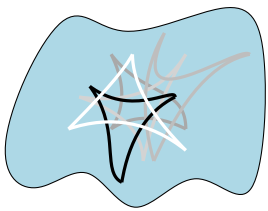


图 4.3: 系数是 $\mathbb{R}$

这多种有趣的理解方式毫无疑问惹得数学家们遐想. 但可惜, 答案是否定的 —新的同调模将完全由原本的 $\mathsf{H}_n(C_\bullet)$ 决定. 也就是说, 其实他们并没有那么 "有趣".

如果将新的复形设为 $C_\bullet(X;R)$, 同调模为 $\mathsf{H}_n(X;R)$. 那么容易验证

的是

$$C_\bullet(X;R) = C_\bullet(X) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} R$$

需要注意到所有环都是 $\mathbb{Z}$-代数. 这样根据万有系数定理的推论 *(4.2)* [6],

$$\mathsf{H}_n(X;R) = \left[\mathsf{H}_n(X) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} R\right] \oplus \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}(\mathsf{H}_{n-1}(X), R)$$

回看例子, 实际上 $\mathbb{R}$ 是平坦的[7], 所以 $\mathsf{H}_n(X;\mathbb{R}) = \mathsf{H}_n(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. 这个结果其实挺令人失望的.

4.2 上万有系数定理

定理 4.5 (万有系数定理) 考虑 R-模 M, 对于一族由左 R-投射模组成的复形 $P_\bullet$, 且满足对任意 n, $\partial(P_n) = \mathsf{B}_{n-1}(P_\bullet)$ 都是投射的, 则有如下正合列

$$0 \to \mathrm{Ext}_R(\mathsf{H}_{n-1}(P_\bullet), M) \to \mathsf{H}^n(\mathrm{Hom}_R(P_\bullet, M)) \to \mathrm{Hom}_R(\mathsf{H}_n(P_\bullet), M) \to 0$$

且, 在 R 是主理想整环如 $\mathbb{Z}$ 时, 上正合列分裂.

证明 证明和 (4.1) 是类似的. □

例 4.6 回到拓扑的例子 *(1.6)*, 对于拓扑空间 X, 我们曾经定义了复形 $C_\bullet(X)$, 对于环 R, 我们可以作上链复形 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_\bullet(X), R)$, 其中的边缘同态常记为 δ

$$\begin{array}{rccc} \delta^n: & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_n(X), R) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_{n+1}(X), R) \\ & f & \longmapsto & f \circ \partial_{n+1} \end{array}$$

这经常被记为 $C^\bullet(X;R)$, 对应的上同调模为 $\mathsf{H}^n(X;R)$.

因为自由 *Abel* 群出发的同态仅由基处的取值决定, 实际上有

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_n(X), R) \cong \left\{\text{映射 } f: \text{全体 } n \text{ 维单纯形} \to R\right\}$$

[6]因为 $C_n(X)$ 都是自由的, 而自由 Abel 群的子群都是自由的. 另外, 自由模必平坦.

[7] 因为 $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$, 而 $\mathbb{Q}$-模, 即线性空间都是自由的, 从而是平坦的.

- 特别地, $n=0$, $R=\mathbb{Z}$ 时. 1 维单形就是所有点, 故 $C^0(X;R)=\{f:X\to R\}$. 对于 $f\in C^0(X;R)$, 我们来计算 δf. 对于 1 维单形即一条曲线 $\gamma:[0,1]\to X$, 根据定义 $\delta f(\gamma)=f(\gamma(1))-f(\gamma(0))$, 就是端点取值之差.

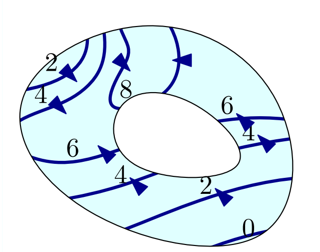


图 4.4: 等高线

表示一个函数的一种方法是用等高线, 方便起见, 我们下面画的是取值发生变化的"交界线". 那么 δf 就表示这条曲线穿过"交界线"的"根数". 如果将其看成物理上的"等势面", 那么 δf 就是计算经过这条曲线产生的"势能差".

- $n=1$, $R=\mathbb{Z}$ 时, 一维单形就是所有曲线. 如果 $f\in C^1(X;R)$, 且 $\delta f=0$, 这意味着, 在任何二维复形上的三条边按方向加起来是 0.

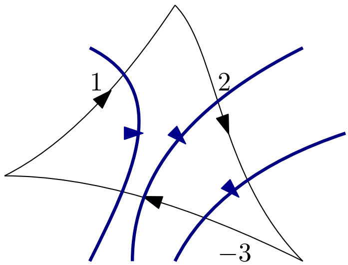


图 4.5: 出入平衡

假如 X 性质很好, 可以写成一些三角形沿着边粘起来的形式, 那么可以在组成这个三角形的每条边上选定数个点, 再在每个三角形里通过连接补充上线段, 使得

$$f(a)=\text{进入内部的线段}-\text{离开内部的线段}$$

再给这些线段按照正负号以及边的方向补充上方向. 如上图, 那么每条线段其实最终封闭.

所以也可以做出一些线, 但是他们距离等高线的交界线距离多远呢? 例如下面的轮胎面 (上下两边和左右两边分别是一条边) 就不能是某个等高线的交界 (实际上这条线没有成功地将这根管子割成两部分).

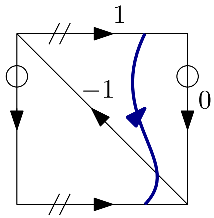


图 4.6: 轮胎面

实际上, 利用 *(4.5)* 可知

$$\mathsf{H}^n(X;R) = \mathrm{Hom}(\mathsf{H}_n(X), R) \oplus \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(\mathsf{H}_{n-1}(X), R)$$

当 $R = \mathbb{Z}$ 时, 假如 $\mathsf{H}_n(X), \mathsf{H}_{n-1}$ 是有限生成 *Abel* 群的话, 这样的 *Abel* 群是挠部分和自由部分的直和, 根据 *(3.24)* 的 *(3)* 以及 *(3.22, 3.23)*, 有

$$\begin{cases} \mathrm{Hom}(\mathsf{H}_n(X), \mathbb{Z}) = \mathsf{H}_n(X)\text{的自由部分} \\ \mathrm{Ext}(\mathsf{H}_{n-1}(X), \mathbb{Z}) = \mathsf{H}_{n-1}(X)\text{的挠部分} \end{cases}$$

故

$$\mathsf{H}^n(X;\mathbb{Z}) = \mathsf{H}_n(X)\text{的自由部分} \oplus \mathsf{H}_{n-1}(X)\text{的挠部分}$$

例 4.7 聪明的读者会疑惑, 为什么我们之前说 "更换系数" 时 *(4.4)*, 结果令人失望, 但是这里上同调却不说这些令人丧气的话了呢.

诚然, 上同调模通样也被同调群决定, 但是以后见之明, 上同调群还具有乘法结构, 这相当令人欣喜, 这让其具有更多的结构从而变得十分重要. 具体来说, 通过给 $\triangle_n$ 的坐标之后补充上 m 个 0, 给 $\triangle_m$ 的坐标之前

补充上 n 个 0, 可以认为

$$\triangle_n \subseteq \triangle_{m+n} \qquad \triangle_m \subseteq \triangle_{m+n}$$

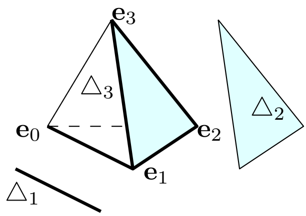


图 4.7: 蒂积

这样可以构造乘法**蒂积 (cup product)**

$$\begin{aligned} \cup: \quad C^n(X)\times C^m(X) &\longrightarrow \quad C^{n+m} \\ (f,g) &\longmapsto \quad \Big[[\Delta:\triangle_{n+m}\to X]\mapsto f(\Delta|_{\triangle_n})g(\Delta|_{\triangle_m})\Big] \end{aligned}$$

实际上, 根据这种等同于子集的方法, 容易知道结合律成立, 即 $(f\cup g)\cup h = f\cup(g\cup h)$. 这样可以作分次代数

$$C^\bullet(X)=\bigoplus_{i=0}^{\infty}C^i(X) \tag{$*$}$$

其中的元素是有限 $C^i(X)$ 的形式加和, 当中的乘法结构由 $\cup$ 延展而来, 这令 $C^\bullet(X)$ 构成一个环, 这被称为上同调环. 且容易验证, 当 $f\in C^n(X), g\in C^m(X)$ 时,

$$\delta(f\cup g)=\delta f\cup g+(-1)^n f\cup\delta g \tag{$**$}$$

同样可以类似 $(*)$ 作 $\mathsf{B}^\bullet\subseteq \mathsf{Z}^\bullet\subseteq C^\bullet(X)$, 利用 $(**)$ 不难验证 $\mathsf{Z}^\bullet$ 对 $\cup$ 封闭, $\mathsf{B}^\bullet$ 是理想这样就导出了

$$\mathsf{Z}^\bullet/\mathsf{B}^\bullet=\mathsf{H}^\bullet(X)=\bigoplus_{i=0}^{\infty}H^i(X)$$

的乘法结构.

4.3 Künneth 公式

定义 4.8 (复形的乘积) 对于两个 R-模复形 $C_\bullet, D_\bullet$, 可以定义他们的乘积复形 $C_\bullet \otimes D_\bullet$, 其中

$$(C_\bullet \otimes D_\bullet)_n = \bigoplus_{i+j=n} C_i \underset{R}{\otimes} D_j$$

对于 $c \in C_n, d \in D_m$, 定义

$$\begin{aligned} \partial(c \otimes d) &= \partial c \otimes d + (-1)^n c \otimes \partial d \\ &\in C_{n-1} \otimes D_n \oplus C_n \otimes D_{n-1} \subseteq (C_\bullet \otimes D_\bullet)_{n-1} \end{aligned}$$

这可以延展到 $(C_\bullet \otimes D_\bullet)_n$ 上, 且容易验证 $\partial\partial = 0$, 这使之成为 $C_\bullet \otimes D_\bullet$ 的边缘同态.

如下图

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d, dashed] & {} \arrow[d, dashed] & {} \arrow[d, dashed] & \\
{} \arrow[r, dashed] & C_{2k+1} \otimes D_{n+1} \arrow[r, "\partial \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "-\mathrm{id} \otimes \partial"'] & C_{2k} \otimes D_{n+1} \arrow[r, "\partial \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \partial"'] & C_{2k-1} \otimes D_{n+1} \arrow[r, dashed] \arrow[d, "-\mathrm{id} \otimes \partial"'] & {} \\
{} \arrow[r, dashed] & C_{2k+1} \otimes D_n \arrow[r, "\partial \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "-\mathrm{id} \otimes \partial"'] \arrow[ur, phantom, "\bigoplus"] & C_{2k} \otimes D_n \arrow[r, "\partial \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \partial"'] \arrow[ur, phantom, "\bigoplus"] & C_{2k-1} \otimes D_n \arrow[r, dashed] \arrow[d, "-\mathrm{id} \otimes \partial"'] & {} \\
{} \arrow[r, dashed] & C_{2k+1} \otimes D_{n-1} \arrow[r, "\partial \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, dashed] \arrow[ur, phantom, "\bigoplus"] & C_{2k} \otimes D_{n-1} \arrow[r, "\partial \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, dashed] \arrow[ur, phantom, "\bigoplus"] & C_{2k-1} \otimes D_{n-1} \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & {} \\
 & {} & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

定理 4.9 (Künneth 定理) 对于两个 R-模复形 $C_\bullet, D_\bullet$, 其中 C_n 由平坦模组成, 且 $\partial(C_n), \ker \partial_n$ 也都是平坦的, 那么有短正合列

$$\bigoplus_{i+j=n} \mathsf{H}_i(C_\bullet) \otimes \mathsf{H}_j(D_\bullet) \hookrightarrow \mathsf{H}_n(C_\bullet \otimes D_\bullet) \twoheadrightarrow \bigoplus_{i+j=n-1} \mathrm{Tor}(\mathsf{H}_i(C_\bullet), \mathsf{H}_j(D_\bullet))$$

且, 在 R 是主理想整环如 $\mathbb{Z}$ 时, 上正合列分裂.

引理 4.10 两个复形 $O_\bullet, C_\bullet$, 若 $O_\bullet$ 之间连接的都是零同态, 则

$$\mathsf{H}_n(O_\bullet \otimes C_\bullet) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathsf{H}_n(O_i \otimes C_{\bullet-i})$$

证明 需要注意到边缘同态是 $\partial = \pm\,\mathrm{id}\otimes\partial$ 意味着只有 "纵向" 的乘积, 实际上

$$(O_\bullet \otimes C_\bullet)_n = \bigoplus_{i+j=n} O_i \otimes C_j = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} (O_i \otimes C_{n-i})$$

不同 i 之间只有零同态, 由于取核取像均和直和可以交换故

$$\mathsf{H}_n\left[O_\bullet \otimes C_\bullet\right] = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathsf{H}_n\left(O_i \otimes C_{\bullet-i}\right)$$

引理得证. □

Künneth 定理 (4.9) 的证明 这和万有系数定理 (4.1) 非常相近, 实际上, 当 $D_\bullet$ 的边缘算子都是零同态时, 上述定理和万有系数定理 (4.1) 是等价的. 不过证明可以直接按照 (4.1) 的进路, 无非需要小心验证最开始 $X_\bullet \mapsto (X \otimes D)_\bullet$ 一步能够保持下列的正合性,

$$0 \to \mathsf{Z}_i \to C_i \to \mathsf{B}_{i-1} \to 0$$

于是用 $-\otimes D_j$ 的长正合序列

$$0 \to \mathsf{Z}_i \underset{R}{\otimes} D_j \to C_i \underset{R}{\otimes} D_j \to \mathsf{B}_{i-1} \underset{R}{\otimes} D_j \to 0$$

先给 Z, B 连接以零同态再和 D 作复形的乘积, 再作直和, 故有复形的正合列

$$0 \to \mathsf{Z}_\bullet \otimes D_\bullet \to C_\bullet \otimes D_\bullet \to \mathsf{B}_{\bullet-1} \otimes D_\bullet \to 0$$

用长正合序列得到长正合列, 再根据引理 (4.10) 有正合列

$$\begin{aligned}
&\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathsf{H}_{n+1}(\mathsf{B}_{i-1} \otimes D_{\bullet-i}) \longrightarrow \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathsf{H}_n(\mathsf{Z}_i \otimes D_{\bullet-i}) \\
&\xrightarrow{\ \dagger\ } \mathsf{H}_n(C_\bullet \otimes D_\bullet) \\
&\longrightarrow \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathsf{H}_n(\mathsf{B}_{i-1} \otimes D_{\bullet-i}) \xrightarrow{\ \ddagger\ } \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathsf{H}_{n-1}(\mathsf{Z}_i \otimes D_{\bullet-i})
\end{aligned}$$

其中通过 “平移” 复形, 有

$$\begin{cases} \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathsf{H}_{n+1}(\mathsf{B}_{i-1}\otimes D_{\bullet-i}) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathsf{H}_{n}(\mathsf{B}_{i-1}\otimes D_{\bullet+1-i}) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathsf{H}_{n}(\mathsf{B}_{i}\otimes D_{\bullet-i}) \\ \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathsf{H}_{n-1}(\mathsf{Z}_{i}\otimes D_{\bullet-i}) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathsf{H}_{n}(\mathsf{Z}_{i}\otimes D_{\bullet-1-i}) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathsf{H}_{n}(\mathsf{Z}_{i-1}\otimes D_{\bullet-i}) \end{cases}$$

故实际上正合列是

$$\begin{cases} \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathsf{H}_{n}(\mathsf{B}_{i}\otimes D_{\bullet-i}) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathsf{H}_{n}(\mathsf{Z}_{i}\otimes D_{\bullet-i}) \xrightarrow{\dagger} \dots \\ \dots \xrightarrow{\ddagger} \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathsf{H}_{n}(\mathsf{B}_{i-1}\otimes D_{\bullet-i}) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathsf{H}_{n}(\mathsf{Z}_{i-1}\otimes D_{\bullet-i}) \end{cases}$$

这样, 类似地, 有短正合列 $0 \to \operatorname{im}\dagger \to \mathsf{H}_n(C_\bullet\otimes D_\bullet) \to \ker\ddagger \to 0$.

先计算 $\operatorname{im}\dagger$, 考虑正合列

$$0 \to \mathsf{B}_i \to \mathsf{Z}_i \to \mathsf{H}_i(C_\bullet) \to 0$$

根据长正合序列, 万有系数定理 (4.1) 以及对 $\mathsf{Z}_n, \mathsf{B}_n$ 平坦的假设,

$$\dots \to \underbrace{\mathsf{H}_n(\mathsf{B}_i\otimes D_{\bullet-i})}_{=\mathsf{B}_i\otimes\mathsf{H}_n(D_{\bullet-i})} \xrightarrow{\partial} \underbrace{\mathsf{H}_n(\mathsf{Z}_i\otimes D_{\bullet-i})}_{=\mathsf{Z}_i\otimes\mathsf{H}_n(D_{\bullet-i})} \to \mathsf{H}_n(\mathsf{H}_i(C_\bullet)\otimes D_{\bullet-i}) \to \dots$$

故

$$\begin{aligned} \operatorname{im}\dagger &= \textstyle\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \operatorname{cok}\left[\mathsf{B}_i\otimes\mathsf{H}_n(D_{\bullet-i}) \xrightarrow{\partial} \mathsf{Z}_i\otimes\mathsf{H}_n(D_{\bullet-i})\right] \\ &= \textstyle\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathsf{H}_i(C_\bullet)\otimes\mathsf{H}_n(D_{\bullet-i}) \\ &= \textstyle\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathsf{H}_i(C_\bullet)\otimes\mathsf{H}_{n-i}(D_{\bullet}) \end{aligned}$$

再计算 $\ker\ddagger$, 以类似的手法, 知道

$$\begin{aligned} \ker\ddagger &= \textstyle\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \ker\left[\mathsf{Z}_{i-1}\otimes\mathsf{H}_n(D_{\bullet-i}) \xrightarrow{\partial} \mathsf{B}_{i-1}\otimes\mathsf{H}_n(D_{\bullet-i})\right] \\ &= \textstyle\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \operatorname{Tor}\left(\mathsf{H}_{i-1}(C_\bullet)\otimes\mathsf{H}_n(D_{\bullet-i})\right) \\ &= \textstyle\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \operatorname{Tor}\left(\mathsf{H}_{i-1}(C_\bullet)\otimes\mathsf{H}_{n-i}(D_{\bullet})\right) \end{aligned}$$

这样, 命题终于得证. 关于分裂的事实是类似之前的证明的. □

例 4.11 毫无疑问，这个命题的背景将会来自拓扑，对于两个拓扑空间 X, Y，我们想要给出 $X \times Y$ 的同调模．但是这件事儿仔细想来并不容易．

- 一个可行的想法是我们放弃使用单形，改用“柱形”，一个 n 维柱形指的是 X 中 i 维单形和 Y 中 j 维单形的乘积，其中 $i+j=n$．换言之我们不再使用 $\triangle_n$，而使用“在 $X \times Y$ 中放正的”$\triangle_i \times \triangle_j$，且实际上，在 0 维时，这就是一样的，这启发我们利用类似 *(1.27)* 的手法，可以持续地作自然同伦，从而使之诱导相同的同调模．具体讨论见 *[10] P396*．这其中也有非常良好的几何意义．以下是一维的情况．

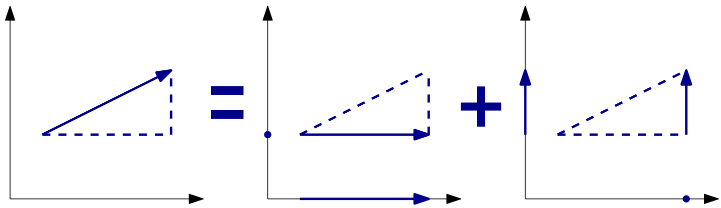


图 4.8: 复形的乘积

- 我们实际上可以将标准单形拆解成一些柱形，换句话说作出 $\iota_{ij} : \triangle_i \times \triangle_j \to \triangle_n$，这样每个 $X \times Y$ 的单纯形 $[\triangle_n \to X \times Y]$ 都可以通过复合拆解为
$$\sum [\triangle_i \times \triangle_j \xrightarrow{\iota_{ij}} \triangle_n \to X \times Y]$$
这是著名的 **Alexander-Whitney 映射**，参见 *[1]P158* 第四章 *2.4*.

- 实际上放不放正不是关键的，因为任何 $[\triangle_i \times \triangle_j \xrightarrow{\Theta} X \times Y]$ 都可以通过作投影和限制 [8] 导出 X, Y 的单形 $[\triangle_i \xrightarrow{\alpha} X], [\triangle_j \xrightarrow{\beta} Y]$，再重新乘起来得到的 $[\triangle_i \times \triangle_j \xrightarrow{\alpha \times \beta} X \times Y]$．他们实际上都处在 $[\triangle_n \to X \times Y \to X] \times [\triangle_n \to X \times Y \to Y]$ 这样一个可缩的空间之内，因此是同伦的．

- 二维的情况

换句话说，我们可以得到拓扑版本的 *Künneth* 定理

$$0 \to \bigoplus_{i+j=n} \mathsf{H}_i(X) \otimes \mathsf{H}_j(Y) \to \mathsf{H}_n(X \times Y) \to \bigoplus_{i+j=n-1} \mathrm{Tor}(\mathsf{H}_i(X), \mathsf{H}_j(Y)) \to 0$$

[8] 视 $\triangle_i = \triangle_i \times 0, \triangle_j = 0 \times \triangle_j$.

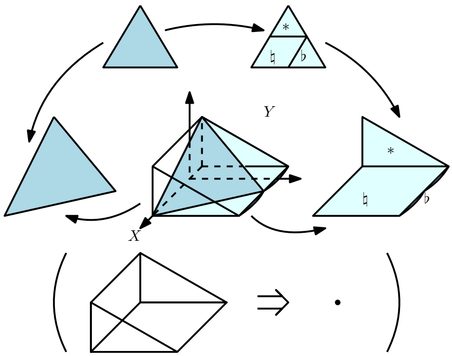


图 4.9: 复形的乘积

且是分裂的 *(但不是自然的)*.

第二部分

应用部分

第五章　代数拓扑选讲

5.1　奇异

回忆奇异同调的定义 (1.6), 同伦 (1.20), 万有系数定理 (4.4), 上同调 (4.7), 乘积空间 (4.11). 下面我们来建立更为精细的理论.

定义 5.1 (简约奇异同调群) 对于拓扑空间 X, 我们定义了复形 $C_\bullet(X)$, 下面我们定义增广奇异复形 $\tilde{C}_\bullet(X)$, 为

$$\cdots \to \underbrace{\tilde{C}_2}_{=C_2} \to \underbrace{\tilde{C}_1}_{=C_1} \to \underbrace{\tilde{C}_0}_{=C_0} \xrightarrow{\epsilon} \underbrace{\tilde{C}_{-1}}_{=\mathbb{Z}} \to 0$$

其中[1]

$$\epsilon : C_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z} \qquad x \longmapsto 1$$

即 ϵ 是取 $C_0(X)$ 的系数之和. 不难验证这还是复形. 由此定义的同调群记为 $\tilde{\mathsf{H}}_\bullet(X)$, 被称为 简约 (reduced) 奇异同调群 .

容易根据定义知道 $\tilde{\mathsf{H}}_n(X)$ 和 $\mathsf{H}_n(X)$ 只在 $n = 0$ 时可能有差别, 且 $\tilde{\mathsf{H}}_0(X) \subseteq \tilde{\mathsf{H}}_0(X)$.

以上定义的合理性可知实际上原本的 $\mathsf{H}_0(X)$ 过大.

命题 5.2 对于拓扑空间 X, $\tilde{\mathsf{H}}_0(X) = 0$ 当且仅当 X 道路连通.

[1]注意根据 $C_0(X)$ 的定义, 其就是 X 的所有点生成的自由 Abel 群

证明 首先证明充分性, 即证明增广奇异复形在 0 处正合, 任意给两个点 x, y, 则一条连接他们的道路 $p \in \tilde{S}_1(X)$ 满足 $\partial p = y - x$. 这样如果 $x = \sum_{i\in I} x_i$, 实际上

$$x = \sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} x_0 + (x_i - x_0) \equiv \sum_{i\in I} x_0 = |S|x_0 = \epsilon(x)x_0 \mod \tilde{\mathsf{B}}_0(X)$$

故若 $\epsilon(x) = 0$, 则 $x \in \tilde{\mathsf{B}}_0(X)$.

反之, 取两个不能用道路相连的点 x, y, 考虑 $y - x$, 此时 $\epsilon(y - x) = 0$, 但不满足 $x - y \in \tilde{\mathsf{B}}_0(X)$, 这不难证明[2]. □

命题 5.3 *对于拓扑空间 X, 若有开邻域覆盖[3] $\{U_i\}$, 可以定义*

$$C_n^\circ(X) = \bigcup_{i\in I} \left\{[\triangle_n \overset{\text{连续}}{\to} U_i \overset{\subsetneq}{\to} X]\right\} \text{生成自由 } Abel \text{ 群} \subseteq C_n(X)$$

即全部落在 U_i 的单形生成的复形. 则包含映射 ι 诱导了同构

$$\mathsf{H}_n(\iota) : \mathsf{H}_n(C_n^\circ(X)) \xrightarrow{\sim} \mathsf{H}_n(C_n(X)) = \mathsf{H}_n(X)$$

且上述改为增广复形和简约奇异同调群也对.

证明 实际上如下的证明可以按照 (1.27) 的方法更加抽象, 但是为了直观起见, 我们的想法是将任何一个 n 维复形即 $C_n(X)$ 中的元素切碎使之每部分都落入某个 U_i 之中, 由于切碎这件事儿只相差一个 "同伦", 故不改变同调群.

为了记号上的方便, 定义

$$\begin{array}{rccc} \text{cône}_{\boldsymbol{e}} : & C_n(X) & \longrightarrow & C_{n+1}(X) \\ & \left[\triangle_n \overset{\Delta}{\to} X\right] & \longmapsto & \left[\triangle_{n+1} \overset{\text{cône}_{\boldsymbol{e}}\,\Delta}{\to} \to X\right] \end{array}$$

其中 $\text{cône}_{\boldsymbol{e}}\,\Delta$ 是一个线性映射, 满足

$$(\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{n+1}) \mapsto (\bar{\boldsymbol{e}}, \boldsymbol{e}_0, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \mapsto X$$

[2]否则, 设 $y - x = \partial\left(\sum p\right)$, 通过调整顺序, 实际上可以连接成一条 x 通往的 y 的道路.

[3]即每个 U_i 都含一个开集 V_i, 使得 $\bigcup V_i = X$.

在一些情况下 $\boldsymbol{e}$ 还可以选在单形之外, 如果在组成的单形之外 Δ 也有定义的话. 不难验证

$$\partial\,\hat{\mathrm{cone}}_{\boldsymbol{e}} = \mathrm{id} - \hat{\mathrm{cone}}_{\boldsymbol{e}}\,\partial$$

为了选得典范, 先定义重心剖分: 对于标准单形 $\triangle_n$, 选取其重心 $\bar{\boldsymbol{e}}$, 递归地定义**重心重分 (barycentric subdivision)** 映射

$$\mathsf{Sd} : C_n(X) \longrightarrow C_n(X) \qquad \Delta \longmapsto \hat{\mathrm{cone}}_{\bar{\boldsymbol{e}}}\,\mathsf{Sd}\partial\Delta$$

以及同伦

$$\mathsf{T} : C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(X) \qquad \Delta \longmapsto \hat{\mathrm{cone}}_{\bar{\boldsymbol{e}}}(\mathsf{Sd}\Delta - \Delta - \mathsf{T}\partial\Delta)$$

直接计算得到

$$\partial\mathsf{Sd} = \mathsf{Sd}\partial \qquad \partial\mathsf{T} + \mathsf{T}\partial = \mathsf{Sd} - \mathrm{id}$$

几何解释如下图

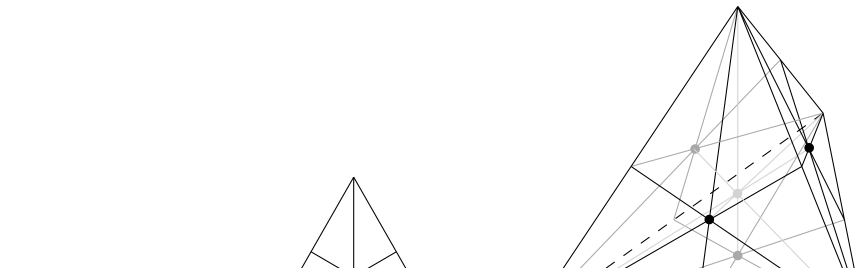


图 5.1: 重心剖分 Sd

一般地, 需要多次剖分. 对于 $\left[\triangle_n \xrightarrow{\Delta} X\right] \in C_n(X)$, 想要作 Δ 的像为 $\mathsf{Sd}^m(\Delta)$, 使得 $\mathsf{Sd}^m(\Delta) \in C_n^\circ(X)$, 根据 Δ 的连续性, 这只要 m 充分大这就一定可以做到, 同时取同伦为 $\mathsf{T}(\mathrm{id} + \mathsf{Sd} + \mathsf{Sd}^2 + \ldots + \mathsf{Sd}^{m-1})$, 但直接这样不构成复形间的同态, 不过好在他们几何上是一样的, 故只差一个同伦,

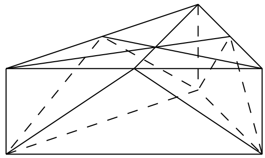


图 5.2: 同伦 T

为了修正这个问题, 我们直接把同伦加上. 记所需的最小重心充分次数为 $m(\Delta)$, 假设 $\partial\Delta=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\left[\triangle_{n-1}\xrightarrow{\iota_i}X\right]$, Sd^m 修正为

$$\mathsf{Sd}^\circ:\Delta\mapsto\mathsf{Sd}^{m(\Delta)}\Delta-\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\mathsf{T}(\mathsf{Sd}^{m(\iota_i)}+\ldots+\mathsf{Sd}^{m(\Delta)-1})\left[\triangle_{n-1}\xrightarrow{\iota_i}X\right]$$

同伦取作的

$$\mathsf{T}^\circ:C_n(X)\longrightarrow C_{n+1}(X)\qquad\Delta\longmapsto\mathsf{T}(\mathrm{id}+\mathsf{Sd}+\mathsf{Sd}^2+\ldots+\mathsf{Sd}^{m(\Delta)-1})\Delta$$

直接计算得到

$$\partial\mathsf{Sd}^\circ=\mathsf{Sd}^\circ\partial\qquad\partial\mathsf{T}^\circ+\mathsf{T}^\circ\partial=\mathsf{Sd}^\circ-\mathrm{id}$$

故这样构造好了 $C_\bullet(X)\xrightarrow{\mathsf{Sd}^\circ}C^\circ_\bullet(X)\xrightarrow{\subseteq}C_\bullet(X)$ 和 id 的同伦, 而不难验证, $C^\circ_\bullet(X)\xrightarrow{\subseteq}C_\bullet(X)\xrightarrow{\mathsf{Sd}^\circ}C^\circ_\bullet(X)$ 本身就等于 id, 根据 (1.18) 命题得证. □

我们也可以认为是同伦 T° 反过来决定了 Sd°, 这样理解更为直接.

5.2 切除

定义 5.4 对于拓扑空间 X, 子空间 $X_1,X_2\subseteq X$, 若包含映射

$$\iota:C_n(X_1)+C_n(X_2)\longrightarrow C_n(X_1\cup X_2)$$

诱导了同调群的同构即任意 n,

$$\mathsf{H}_n(\iota):\mathsf{H}_n(C_\bullet(X_1)+C_\bullet(X_2))\xrightarrow{\sim}\mathsf{H}_n(X_1\cup X_2)$$

其中 $C_n(X_1), C_n(X_2), C_n(X_1 \cup X_2)$ 均视为 $C_n(X)$ 的子群. 则称 (X_1, X_2) 是 **Mayer-Vietoris 耦 (pair)** .

例 5.5 对于拓扑空间 X, 子空间 $X_1, X_2 \subseteq X$, 若 X_1, X_2 是包含开集 V_1, V_2, 且 $V_1 \cup V_2 = X$, 根据 *(5.3)*, (X_1, X_2) 是 *Mayer-Vietoris* 耦.

定理 5.6 (Mayer-Vietoris) 对于拓扑空间 X, 子空间 $X_1, X_2 \subseteq X$, 则有复形的正合列 [4]

$$0 \to C_\bullet(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\text{差}} C_\bullet(X_1) \oplus C_\bullet(X_2) \xrightarrow{\text{和}} C_n(X_1) + C_n(X_2) \to 0$$

若 (X_1, X_2) 是 *Mayer-Vietoris* 耦, 则有如下的长正合序列

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, dashed] & \mathsf{H}_n(X_1 \cap X_2) \arrow[r, "\text{差}"] & \mathsf{H}_n(X_1) \oplus \mathsf{H}_n(X_2) \arrow[r, "\text{和}"] & \mathsf{H}_n(X_1 \cup X_2) \arrow[dll, "\partial_n"] & \\
& \mathsf{H}_{n-1}(X_1 \cap X_2) \arrow[r, "\text{差}"] & \mathsf{H}_{n-1}(X_1) \oplus \mathsf{H}_{n-1}(X_2) \arrow[r, "\text{和}"] & \mathsf{H}_{n-1}(X_1 \cup X_2) \arrow[r, dashed] & {}
\end{tikzcd}$$

且上述改为增广复形和简约奇异同调群也对.

证明 关于复形的正合列的部分是不难验证的. 然后, 长正合序列的部分根据 (1.29) 以及 Mayer-Vietoris 耦的定义知显然. □

为了应用起见, 我们给出更有用的如下定理. 最简单的应用莫过于求 n 维球面的同调群, 我们可以考虑用上半球面和下半球面交出一个 $n-1$ 维球面. 于是可以抽象出如下结果. 具体的计算在 (5.17).

命题 5.7 对于拓扑空间 X, 闭子空间 $X_1 \cup X_2 = X \subseteq X$, 若 $X_1 \cap X_2$ 是某个开邻域 V 的形变收缩核 [5], 则 (X_1, X_2) 是 *Mayer-Vietoris* 耦.

证明 想法是转化到 (5.5) 上, 考虑

$$V_1 = X_1 \cup V \qquad V_2 = X_2 \cup V$$

[4] "差" 是指将 Δ 映射到 $(\Delta, -\Delta)$, "和" 是指将 (Δ, Δ') 映射到 $\Delta + \Delta'$.

[5] 即存在收缩映射 $\varphi : V \to X_1 \cap X_2$ 若记包含映射 $\iota : X_1 \cap X_2 \to V$, 使得 $\varphi \circ \iota = \mathrm{id}$, $\iota \circ \varphi$ 同伦于 id. 显然, 他们的同调群自然同构.

不难通过构造得到 X_1 是 V_1 的形变收缩核, X_2 是 V_2 的形变收缩核, 方便起见, 在下面的图表中

$$\begin{cases}\cap_n^X = \mathsf{H}_n(X_1 \cap X_2) & \cap_n^V = \mathsf{H}_n(V_1 \cap V_2) \\ \oplus_n^X = \mathsf{H}_n(X_1) \oplus \mathsf{H}_n(X_2) & \oplus_n^V = \mathsf{H}_n(V_1) \oplus \mathsf{H}_n(V_2) \\ +_n^X = \mathsf{H}_n(C_\bullet(X_1) + C_\bullet(X_2)) & +_n^V = \mathsf{H}_n(C_\bullet(V_1) + C_\bullet(V_2))\end{cases}$$

考虑正合列

$$\begin{tikzcd}
\cap_n^X \arrow[r] \arrow[d] & \oplus_n^X \arrow[r] \arrow[d] & +_n^X \arrow[r] \arrow[d] & \cap_{n-1}^X \arrow[r] \arrow[d] & \oplus_{n-1}^X \arrow[d] \\
\cap_n^V \arrow[r] & \oplus_n^V \arrow[r] & +_n^V \arrow[r] & \cap_{n-1}^V \arrow[r] & \oplus_{n-1}^V
\end{tikzcd}$$

其中除了中间的同态其他都是同构, 根据五引理中间也是同构, 根据 (V_1, V_2) 是 Mayer-Vietoris 耦, 故 $+_n^V = \mathsf{H}_n(X)$, 这就是说 (X_1, X_2) 是 Mayer-Vietoris 耦. □

下面回忆相对同调群 (1.30). 注意到对于空间 X, Y, 各自的子空间 $A \subseteq X, B \subseteq Y$, 若映射 $f : X \to Y$ 使得 $f(A) \subseteq B$, 则实际上 f 诱导了 $C_n(X, A) \to C_n(Y, B)$ 的同态, 此时会记 $f : (X, A) \to (Y, B)$.

命题 5.8 *对于对于拓扑空间 X, 子空间 $X_1, X_2 \subseteq X$, (X_1, X_2) 是 Mayer-Vietoris 耦的充分必要条件是对任何 n 下列映射是同构*

$$\mathsf{H}_n(\iota) : \mathsf{H}_n(X_1, X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\sim} \mathsf{H}_n(X_1 \cup X_2, X_2)$$

其中 $\iota : (X_1, X_1 \cap X_2) \to (X_1 \cup X_2, X_2)$ 是包含映射.

证明 需要注意到

$$0 \to C_\bullet(X_2) \to C_\bullet(X_1) + C_\bullet(X_2) \to \underbrace{\frac{C_\bullet(X_1) + C_\bullet(X_2)}{C_\bullet(X_2)}}_{=\frac{C_\bullet(X_1)}{C_\bullet(X_1 \cap X_2)} = C_\bullet(X_1, X_1 \cap X_2)} \to 0$$

以及

$$0 \to C_\bullet(X_2) \to C_\bullet(X_1 \cup X_2) \to C_\bullet(X_1 \cup X_2, X_2) \to 0$$

故可以得到长正合列

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{H}_n(X_2) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathsf{H}_n(C_\bullet(X_1)+C_\bullet(X_2)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{H}_n(X_1, X_1\cap X_2) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-1}(X_2) \arrow[d, equal] \\
\mathsf{H}_n(X_2) \arrow[r] & \mathsf{H}_n(X_1\cup X_2) \arrow[r] & \mathsf{H}_n(X_1\cup X_2, X_2) \arrow[r] & H_{n-1}(X_2)
\end{tikzcd}$$

这张交换一直延展下去, 故任何偏左的同态是同构将导出偏右的同态是同构, 反之, 任何偏右的同态是同构将导出偏左的同态是同构, 命题得证. □

定理 5.9 (切除定理) 对拓扑子空间 $Z \subseteq A \subseteq X$, 使得 $\overline{Z} \subseteq A^\circ$, 那么对任何 n 下列映射是同构

$$\mathsf{H}_n(\iota) : \mathsf{H}_n(X \setminus Z, A \setminus Z) \xrightarrow{\sim} \mathsf{H}_n(X, A)$$

其中 $\iota : (X \setminus Z, A \setminus Z) \to (X, A)$ 是包含映射.

证明 记 $B = X \setminus A$, 则要证的事实变为

$$\mathsf{H}_n(\iota) : \mathsf{H}_n(B, A \cap B) \xrightarrow{\sim} \mathsf{H}_n(A \cup B, A)$$

而 A, B 是开领域覆盖, 故根据 (5.5) 和 (5.8) 得证. □

故实际上, **切除定理 (excision)** 和 Mayer-Vietoris 耦只不过是一样事物的两个方面而已.

一个常用的使用方式是对于 $p \in X$, 取 $A = X \setminus \{p\}$, 如果 X 是 Hausdorff 空集, 则 A 是开集, 任意取 p 的邻域 U, 取 $Z = X \setminus U$, 则

$$\overline{Z} = \overline{X \setminus U} = X \setminus U^\circ \subseteq X \setminus \{p\} = A = A^\circ$$

满足条件, 于是可以把 U 以外的广大部分切除, 从而得到

$$\mathsf{H}_n(U, U \setminus \{p\}) = \mathsf{H}_n(X, X \setminus \{p\})$$

事实上, $\mathsf{H}_n(X, X \setminus \{p\})$ 只关心围绕着 p 的那些 “圈”.

5.3 单纯

定义 5.10 (△-复形) 一个 n 维 **△-复形** K 是一些资料

- 对每个 $0 \leq i \leq n$, i 维单纯形组成的集合 $K^i = \{\triangle_i^j\}$.

  其中每个 $\triangle_i^j$ 都是标准单形 $\triangle_i$ 的拷贝, 且 K^i 有限.

- 对每个 $1 \leq i \leq n$, 每个 $\triangle_i^j \in K^i$ 的每个面, 都指定为 K^{i-1} 的某个单纯形.

记 $|K|$ 是他们的粘合.

在欧式空间中, 可以定义 n 维线性单形为 $n+1$ 个一般位置的点[6] 的凸包. 如果一些至多 n 维的有限线性单形组成的集合 K 满足内部[7] 两两不交, 则称为**单纯 (simple) 复形**. 显然, 将组成 K 的所有部件收集起来, 就符合我们上面单纯复形的定义.

如我们所见, 很多我们熟知的拓扑空间都是 Δ-复形, 例如 Klein 瓶, 轮胎面, Möbius 带, 球面.

定义 5.11 对于 △-复形 $K = K^0 \cup \ldots \cup K^n$, 若 $\triangle_m^\dagger$ 是 $\triangle_{m+1}^\ddagger$ 的第 k 个面, 则诱导了一个置换 σ

$$\triangle_m^\dagger \ni (\boldsymbol{e}_0, \ldots, \boldsymbol{e}_m) \xrightarrow{\sigma} (\boldsymbol{e}_0, \ldots, \widehat{\boldsymbol{e}_k}, \ldots, \boldsymbol{e}_{m+1}) \in \triangle_{m+1}^\ddagger$$

如果这个 σ 是偶置换, 则称 $\triangle_m^\dagger$ 和 $\triangle_{m+1}^\ddagger$ 的第 k 个面**同向**, 反之, 则称 $\triangle_m^\dagger$ 和 $\triangle_{m+1}^\ddagger$ 的第 k 个面**反向**.

定义 5.12 (单纯同调) 假设 $K = K^0 \cup \ldots \cup K^n$ 是 △-复形, 定义

$$C_i(K) = K^i \text{生成的自由 } Abel \text{ 群}$$

并定义

$$\partial : C_i(K) \longrightarrow C_{i-1}(K) \qquad \triangle_i^j \longmapsto \sum_{k=1}^{i} (-1)^k [\triangle_i^j \text{ 的第 } k \text{ 个有向面}]$$

[6] 即任何 n 个点都不在一个平面上

[7] 即 $\{\sum_{i=0}^n \lambda_i \boldsymbol{e}_i : \lambda_i > 0, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1\}$, 注意, 这里不是拓扑意义上的内部.

这里有向指的是如果第 k 个面是指如果同向则取 $+$, 反向则取 $-$. 这使得 $C_\bullet(K)$ 成为一个复形, 对应的同调群被称为**单纯同调**, 记为 $\mathsf{H}_n(K)$.

定理 5.13 对于 $\triangle$-复形 K, 单纯同调和奇异同调是等价的, 具体来说,

$$\mathsf{H}_n(K) = \mathsf{H}_n(|K|)$$

证明 这需要用到 (1.31) 的结论, 在证明中会用到其记号 $C_i^*(X)$. 记 $X = |K|$, 可以构造同态

$$\varphi : C_i(K) \longrightarrow C_i^*(X) \qquad \triangle_i^j \longmapsto \left[\triangle_i \overset{\mathrm{id}}{\to} \triangle_i^j \overset{\subsetneq}{\to} X\right]$$

不难验证 φ 和 ∂ 可以交换. 事实上, 以上两种同调理论不难定义相对同调群 (1.30). 记

$$K_i = K^0 \cup \ldots \cup K^i \qquad X_i = |K^0 \cup \ldots \cup K^i|$$

我们依次证明 (过程中会会用到 (5.17) 关于球面同调群的结果.)

- 单纯同调群 $\mathsf{H}_n(K_m, K_{m-1}) = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ C_n(K) & m = n \end{cases}$. 因为 $C_n(K_m)$ 和 $C(K_{m-1})$ 在 $n \geq m+1$ 都是平凡群, 在 $n \leq m-1$ 时都是相同的.

- 奇异同调群 $\mathsf{H}_n(X_m, X_{m-1}) = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ C_n(K) & m = n \end{cases}$. 记 K^i 中每个面的重心组成的集合 $V \subseteq X_m$, 再将这个在每个 V 中的元素在 $\triangle_m^j$ 里稍

微扩大为一个小的开球, 记这些球的的并为 U. 则 $n \geq 1$ 时,

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{H}_n(X_m, X_{m-1}) \\
&= \mathsf{H}_n(X_m, X_m \setminus V) && \because \begin{cases} V_{m-1} \text{ 是 } X_m \setminus V \text{ 的形变收缩核} \\ \text{长正合序列 + 五引理} \end{cases} \\
&= \mathsf{H}_n(U, U \setminus V) && \because \text{切除 } X_m \setminus U \\
&= \mathsf{H}_n\left(\bigsqcup_j \overline{\mathbb{D}}_m^j, \bigsqcup_j \mathbb{S}_{m-1}^j\right) && \because \begin{cases} U \setminus V \text{ 可以收缩到 } U \text{ 的边界上} \\ \text{长正合序列 + 五引理} \end{cases} \\
&= \bigoplus_{\triangle_m^j \in K^m} \mathsf{H}_n(\overline{\mathbb{D}}_m, \mathbb{S}_{m-1}) && \text{不难证明无交并对应复形的直和} \\
&= \tilde{\mathsf{H}}_{n-1}(\mathbb{S}_{m-1})^{\oplus K^m} && \because \begin{cases} n \geq 1 \quad \mathsf{H}_n(\mathbb{D}_m) = 0 \\ \text{长正合序列} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & m \neq n \\ C_n(K) & m = n \end{cases} && \because \tilde{\mathsf{H}}_n(\mathbb{S}_m) = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \mathbb{Z} & m = n \end{cases}
\end{aligned}
$$

- $\mathsf{H}_n^*(X_m, X_{m-1}) = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ C_n(K) & m = n \end{cases}$. 因为 H_n 有上述刻画, 根据长正合序列, 有

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{H}_n(X_{m-1}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathsf{H}_n(X_m) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathsf{H}_n(X_m, X_{m-1}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{H}_{n-1}(X_{m-1}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathsf{H}_{n-1}(X_m) \arrow[d, equal] \\
\mathsf{H}_n^*(X_{m-1}) \arrow[r] & \mathsf{H}_n^*(X_m) \arrow[r] & \mathsf{H}_n^*(X_m, X_{m-1}) \arrow[r] & \mathsf{H}_{n-1}^*(X_{m-1}) \arrow[r] & \mathsf{H}_{n-1}^*(X_m)
\end{tikzcd}
$$

根据五引理中间是同构.

然后继续使用五引理, 考虑长正合序列

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{H}_n(K_{m-1}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{H}_n(K_m) \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{H}_n(K_m, K_{m-1}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{H}_{n-1}(K_{m-1}) \arrow[d] \\
\mathsf{H}_n^*(X_{m-1}) \arrow[r] & \mathsf{H}_n^*(X_m) \arrow[r] & \mathsf{H}_n^*(X_m, X_{m-1}) \arrow[r] & \mathsf{H}_{n-1}^*(X_{m-1})
\end{tikzcd}
$$

然后使用归纳法, 不难得到 $m=0$ 时, 总有 $\mathsf{H}_n(K_0)=\mathsf{H}_n^*(X_0)$. 根据上面的计算 [8], 利用五引理不难从 $m-1$ 正确推到 m 正确. $\square$

上述 "戳洞" 的技巧是代数拓扑中常用的, 与其说是 "戳洞", 不如说是将边界 "增厚" 的方便化表述, 如下图.

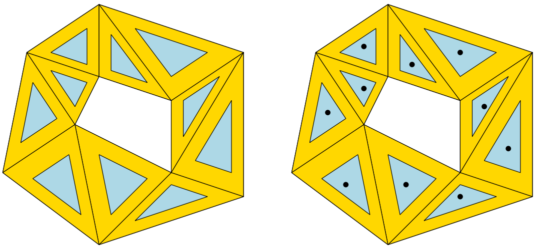


图 5.3: 增厚

命题 5.14 (Euler 示性数) 对于 $\triangle$-复形 $K=K^0\cup\ldots\cup K^n$, 可以定义**欧拉示性数 (characteristic)**

$$\chi(K)=|K^0|-|K^1|+\ldots+(-1)^n|K^n|$$

实际上

$$\chi(K)=\operatorname{rank}\mathsf{H}_0(K)-\operatorname{rank}\mathsf{H}_1(K)+\ldots+(-1)^n\operatorname{rank}\mathsf{H}_n(K)$$

证明 实际上 $|K_i|=\operatorname{rank}C_i(K)$. 这样就完全代数化了, 实际上这对所有有限生成正复形都是对的, 注意到若有有限生成的 Abel 群的正合列

$$0\to A\to B\to C\to 0$$

则 $\operatorname{rank}B=\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}C$. 考虑含义不言自明的正合列

$$0\to \mathsf{Z}_n\to C_n\to \mathsf{B}_{n-1}\to 0\qquad 0\to \mathsf{B}_n\to \mathsf{Z}_n\to \mathsf{H}_n\to 0$$

[8] 事实上还需要说明 φ 诱导的同调群是同构, 这个只需要小心验证长正合序列的映射, 以及知道 $\tilde{\mathsf{H}}_n(\mathbb{S}_m)$ 的代表元.

考虑 “母函数”$C(X)=\sum \operatorname{rank} C_n X^n, \mathsf{H}(X)=\sum \operatorname{rank} \mathsf{H}_n X^n$ 其他记号可以此类推, 于是

$$C(X)=X\mathsf{B}(X)+\mathsf{Z}(X) \qquad \mathsf{Z}(X)=\mathsf{B}(X)+\mathsf{H}(X)$$

消去 $\mathsf{Z}(X)$, 于是

$$C(X)-\mathsf{H}(X)=(X+1)\mathsf{B}(X)$$

带入 $X=-1$ 得到结果. □

例 5.15 关于欧拉示性数就不得不提正多面体, 他们的参数如下,

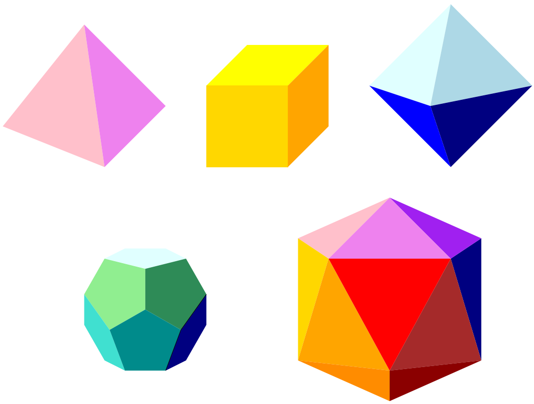


图 5.4: 正多面体

	顶点数	边数	面数	度数	对偶度
正四面体	4	6	4	3	3
正方体	8	12	6	3	4
正八面体	6	12	8	4	3
正十二面体	20	30	12	3	5
正二十面体	12	30	20	5	3

度数 = 每点连接的边数　　对偶度 = 每面连的边数

不难发现有如下恒等式

$$\text{顶点数} + \text{面数} - \text{边数} = 2$$

这实际上是球面的 *Euler* 示性数的反映, 因为这些多面体都可以再分为一些三角形, 不难算出分出三角形不会引发上述值的改变, 他们作为简单复形拼接起来都和球面同胚.

5.4 计算

下面我们来给一些具体的计算. 这里不止涉及同调的计算, 也将涉及上同调的计算. 回忆 (4.6), (4.7).

定理 5.16 关于单点集 $X = \{*\}$,

- 同调群和简约同调群.

$$\mathsf{H}_n(X) = \begin{cases} 0 & n \geq 1 \\ \mathbb{Z} & n = 1 \end{cases} \qquad \tilde{H}_n(X) = 0$$

  其中 $\mathsf{H}_0(X)$ 的生成元是这个点本身.

- 系数为 R 的上同调群 $\mathsf{H}^n(X; R) = 0$, 故对应的上同调环为零环.

证明 可以直接计算单点集对应的复形是

$$\ldots \xrightarrow{1} \underbrace{C_3(X)}_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{0} \underbrace{C_2(X)}_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{1} \underbrace{C_1(X)}_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{0} \underbrace{C_0(X)}_{\mathbb{Z}} \to 0$$

故同调群有这样的刻画. 关于简约同调群, 无非是将上复形最后改为 $\xrightarrow{1} \mathbb{Z}$, 也不难计算得到. 关于上同调, 注意到 (4.6) 最后的结论. □

定理 5.17 关于 m 维球面 $\mathbb{S}^m$,

- 同调群和简约同调群.

$$\mathsf{H}_n(\mathbb{S}^0)=\begin{cases}0 & n\geq 1\\ \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} & n=0\end{cases}\qquad \mathsf{H}_n(\mathbb{S}^m)\overset{m\geq 1}{=\!=}\begin{cases}0 & 1\leq n\neq m\\ \mathbb{Z} & 1\leq n=m\\ \mathbb{Z} & 0=n\end{cases}$$

简约同调群可以统一为

$$\tilde{\mathsf{H}}_n(\mathbb{S}^m)=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \mathbb{Z} & n=m\end{cases}$$

关于其中的生成元: $\mathsf{H}_0(\mathbb{S}^0)$ 的生成元分别是两个点; $n\geq 1$ 时, $\mathsf{H}_0(\mathbb{S}^n)$ 的生成元可以选做任意一个单点; 而 $\tilde{\mathsf{H}}_n(\mathbb{S}_n)$ 的生成元可以选做同胚 $\left[\triangle_{n+1}\to\overline{\mathbb{D}_n}\right]$ 的边界.

- 系数为 R 的上同调群群

$$\mathsf{H}^n(\mathbb{S}^0)=\begin{cases}0 & n\geq 1\\ R\times R & n=0\end{cases}\qquad \mathsf{H}^n(\mathbb{S}^m)\overset{m\geq 1}{=\!=}\begin{cases}0 & 1\leq n\neq m\\ R & 1\leq n=m\\ R & 0=n\end{cases}$$

关于其中的生成元: $\mathsf{H}^0(\mathbb{S}^0)$ 的生成元分别是两个点处的特征函数; $n\geq 1$ 时, $\mathsf{H}^0(\mathbb{S}^n)$ 生成元是常函数 1; $\mathsf{H}^n(\mathbb{S}^n)$ 的生成元是在 $\mathsf{H}_n(\mathbb{S}^n)$ 的生成元处取 1 的函数, 这个即圈的环绕圈数. 关于同调环

$$\mathsf{H}^\bullet(\mathbb{S}^0)\cong\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

$\wedge$	$r\in\mathsf{H}^0(\mathbb{S}^n)$	$x\in\mathsf{H}^n(\mathbb{S}^n)$
$s\in\mathsf{H}^0(\mathbb{S}^n)$	$rs\in\mathsf{H}^0(\mathbb{S}^n)$	$sx\in\mathsf{H}^n(\mathbb{S}^n)$
$y\in\mathsf{H}^n(\mathbb{S}^n)$	$ry\in\mathsf{H}^n(\mathbb{S}^n)$	0

证明 将 $\mathbb{S}^m$ 视作上下半个球面 $\mathbb{S}^m_+$ 和 $\mathbb{S}^m_-$ 的拼接, 对此早有准备的我们利用 (5.7) 知道上下球面是 Mayer-Vietoris 耦, 由于

$$\mathbb{S}^m_+\cup\mathbb{S}^m_-=\mathbb{S}^m\qquad \mathbb{S}^m_+\cap\mathbb{S}^m_-=\mathbb{S}^{m-1}$$

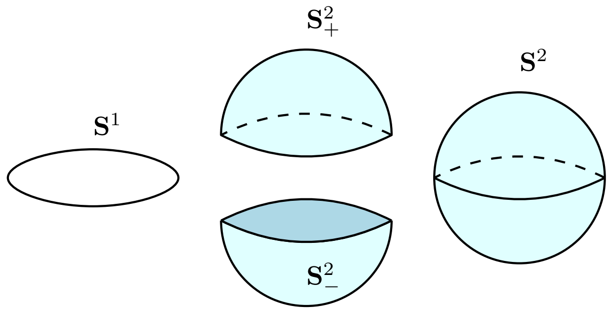


图 5.5: 球面

故有长正合序列

$$\underbrace{\tilde{\mathsf{H}}_n(\mathbb{S}^m_+)\oplus\tilde{\mathsf{H}}_n(\mathbb{S}^m_-)}_{=0}\to\tilde{\mathsf{H}}_n(\mathbb{S}^m)\to\tilde{\mathsf{H}}_{n-1}(\mathbb{S}^{m-1})\to\underbrace{\tilde{\mathsf{H}}_{n-1}(\mathbb{S}^m_+)\oplus\tilde{\mathsf{H}}_{n-1}(\mathbb{S}^m_-)}_{=0}$$

故对于简约同调群, 只需要证明 $n=0$ 的情况即可, 此时 $\mathbb{S}^0$ 是两个单点集, 于是对应的复形是

$$\ldots\xrightarrow{1}\underbrace{C_3(\mathbb{S}^0)}_{\mathbb{Z}^2}\xrightarrow{0}\underbrace{C_2(\mathbb{S}^0)}_{\mathbb{Z}^2}\xrightarrow{1}\underbrace{C_1(\mathbb{S}^0)}_{\mathbb{Z}^2}\xrightarrow{0}\underbrace{C_0(X)}_{\mathbb{Z}^2}\xrightarrow{(x,y)\mapsto x+y}\mathbb{Z}$$

不难直接计算出其简约同调群满足刻画. 关于同调群的部分无非是 $n=0$ 的情形需要再验证, 不难证明对于两个拓扑空间 X,Y, $\mathsf{H}_0(X\sqcup Y)=\mathsf{H}_0(X)\oplus\mathsf{H}_0(Y)$, 故关于 $\mathbb{S}^0$ 的论证得证. 同样不难验证, 对于道路连通空间 X, $\mathsf{H}_0(X)=\mathbb{Z}$. 关于生成元的论断只有关于 $\tilde{\mathsf{H}}_n(\mathbb{S}_n)$ 的部分是非平凡的, 根据蛇形引理的连接同态刻画, 可以发现 $\tilde{\mathsf{H}}_n(\mathbb{S}^n)$ 中我们所挑选的边界就映成 $\tilde{\mathsf{H}}_{n-1}(\mathbb{S}^n)$ 的生成元. 而上同调的论断只需要根据 (4.6) 最后的结论以及蒂积的定义 (4.7) 即可. $\square$

定理 5.18 关于 m 维轮胎 $\mathbb{T}^m=\underbrace{\mathbb{S}^1\times\ldots\times\mathbb{S}^1}_{m}$,

- 同调群.

$$\mathsf{H}_n(\mathbb{T}^m)=\mathbb{Z}^{\binom{n}{m}}$$

其中的生成元就是在 m 个 $\mathsf{H}_1(\mathbb{S}^1)$ 的复制中挑选 n 个出来选择生成元 *(即环绕一圈)*, 然后 "缔连"*(选定一个基点)*.

- 上同调环. 是外代数

$$\mathsf{H}^*(\mathbb{T}^m, R) = \bigwedge R^m$$

证明 根据 (4.11), 归纳地, 自动有

$$\mathsf{H}_n(\mathbb{T}^m) = \bigoplus_{i+j=n} (\mathsf{H}_i(\mathbb{T}^{m-1}) \oplus \mathsf{H}_j(\mathbb{S}^1))$$

然后只需仔细计算 $\mathbb{Z}$ 的个数. 生成元不难根据 (4.11) 给出的刻画得出.

关于上同调, 选定基点 $x_0 = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{T}^m$, 不妨假设 $\sigma \in \mathsf{H}_1(\mathbb{S}^1)$ 是生成元. 方便起见, 对于 $\mathsf{H}_k(\mathbb{T}^m)$ 的生成元 τ, 记 $\tau^* \in \mathsf{H}^k(\mathbb{T}^m)$ 为将 τ 映为 1, 其他生成元映为 0 的映射. 不难根据蒂积的定义得到

$$(\sigma, 0, 0, \ldots, 0)^* \wedge (0, \sigma, 0, \ldots, 0)^* = (\underbrace{*, *}_{\text{“缔连”}}, 0, \ldots, 0)^*$$

如下图 以此类推, 这和 $\bigwedge R^m$ 的乘法结构完全相同. □

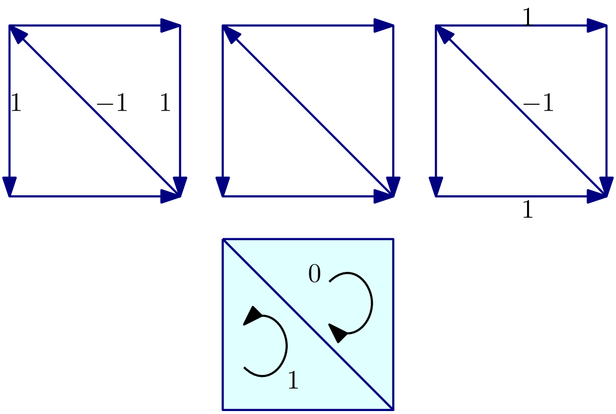


图 5.6: 轮胎面

5.5 光滑

回顾 (1.8), 我们可以看到, 当中无非是说 $\mathfrak{Diff}^\bullet$ 构成一个上链复形. 回顾 (1.31) 以及, 定理 (5.13). 一个同调的哲学互质欲出, 那就是对于不同类型的空间, 上面有很多 "同调理论", 他们的同调是相同的. 下面我们引入 de Rham 上同调. 以下证明来自 [7], P286, §V.9. 更多关于流形的同调理论, 甚至上升到层的层面的讨论可见 [15] Chapter 5.

定义 5.19 (光滑奇异同调) *对于流形 M, 我们可以仿照 (1.6) 定义光滑单形, 无非是要求当中的单形 $\Delta : \triangle_n \to M$ 不仅是连续的, 还是光滑的, 这样可以得到复形 $C_\bullet^{\mathrm{smooth}}(M)$. 我们将这种同调记为*

$$\mathsf{H}_n^{\mathrm{smooth}}(M) = \mathsf{H}^n(C_\bullet^{\mathrm{smooth}}(M))$$

称为 **光滑奇异同调**. *这同样也可以类似 (4.6) 定义* **光滑奇异上同调**

$$\mathsf{H}^n_{\mathrm{smooth}}(M) = \mathsf{H}^n(\mathrm{Hom}(C_\bullet^{\mathrm{smooth}}(M), \mathbb{R}))$$

定义 5.20 (de Rham 上同调) *对于一张流形 M, 考虑其上的 k-次微分形式 $\mathfrak{Diff}^k(M)$, 上面的微分 d 定义了一个 $\mathbb{R}$-模的上链复形, 记其同调模*

$$\mathsf{H}^n_{\mathrm{deRham}}(M) = \mathsf{H}^n(\mathfrak{Diff}^k(M))$$

被称为 **de Rham 上同调**.

命题 5.21 (Poincaré 引理) *对于欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 的凸的开集 U, $\mathsf{H}^k_{\mathrm{deRham}}(U) = 0$. 实际上有同伦 $S : \mathfrak{Diff}^\bullet(U) \to \mathfrak{Diff}^{\bullet+1}$, 使得 $S \circ \mathrm{d} + \mathrm{d} \circ S = \mathrm{id}$.*

证明 直接构造, 对于 $\omega \in \mathfrak{Diff}^{k+1}(U)$, 假设 $\omega = f\mathrm{d}x^{i_0} \wedge \ldots \mathrm{d}x^{i_k}$, 定义

$$S\omega : x \mapsto \left(\int_0^1 t^k f(tx)\mathrm{d}t\right)\left(\sum_{j=0}^{k}(-1)^j x^{i_j}\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^{i_j}} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}\right)$$

这样直接验证即可. □

定义 5.22 对于流形 M, 包含映射 $C^{\mathrm{smooth}}_\bullet(M)\to C_\bullet(M)$ 诱导了映射

$$\mathsf{H}^{\mathrm{smooth}}_n(M)\to \mathsf{H}_n(M)$$

通过取 $\mathrm{Hom}(-,\mathbb{R})$ 得到

$$\Phi:\mathsf{H}^n(M;\mathbb{R})\to \mathsf{H}^n_{\mathrm{smooth}}(M)$$

定义 5.23 对于流形 M, 在光滑奇异同调和微分形式之间有如下配合

$$\varphi: C^{\mathrm{smooth}}_n(M)\times \mathfrak{Diff}^k(M)\longrightarrow \mathbb{R}\qquad (\Delta,\omega)\longmapsto \int_\Delta \omega$$

这诱导了同态

$$\Psi:\mathfrak{Diff}^\bullet(M)\longrightarrow \mathrm{Hom}(C^{\mathrm{smooth}}_\bullet(M),\mathbb{R})\qquad \omega\longmapsto\left[\Delta\mapsto\int_\Delta\omega\right]$$

根据 *Stokes* 公式, 这是一个上链复形之间的同态, 从而诱导了

$$\Psi:\mathsf{H}^n_{\mathrm{deRham}}(M)\to \mathsf{H}^n_{\mathrm{smooth}}(M)$$

本节的一个目的就是为了证明 Φ,Ψ 都是同构, 从而 de Rham 上同调和系数是 $\mathbb{R}$ 的奇异上同调是同构的.

引理 5.24 对于流形 M, 开集 U,V, 总有长正和序列

$$\ldots\to \mathsf{H}^n_{\mathrm{smooth}}(U\cup V)\to \mathsf{H}^n_{\mathrm{smooth}}(U)\oplus \mathsf{H}^n_{\mathrm{deRham}}(V)\to \mathsf{H}^n_{\mathrm{smooth}}(U\cap V)\to\ldots$$

且这个正合列和上同调的 *Mayer-Vietoris* 正合列通过 *(5.22)* 定义的 Ψ 构成同态

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{H}^n(U\cup V) \arrow[r] \arrow[d, "\Psi"] & \mathsf{H}^n(U)\oplus\mathsf{H}^n(V) \arrow[r] \arrow[d, "\Psi\oplus\Psi"] & \mathsf{H}^n(U\cap V) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\Psi"] & \mathsf{H}^{n+1}(U\cup V) \arrow[d] \\
\mathsf{H}^n_{\mathrm{smooth}}(U\cup V) \arrow[r] & \mathsf{H}^n_{\mathrm{smooth}}(U)\oplus\mathsf{H}^n_{\mathrm{smooth}}(V) \arrow[r] & \mathsf{H}^n_{\mathrm{smooth}}(U\cap V) \arrow[r, "\delta"] & \mathsf{H}^{n+1}_{\mathrm{smooth}}(U\cup V)
\end{tikzcd}$$

证明 定理 (5.3) 的证明可以照例迁移到光滑的情形, 因为我们是用同伦证明的 (5.3), 所以自动保持到上同调. □

引理 5.25 *对于流形 M, 开集 U, V, 总有正合列*

$$0 \to \mathfrak{Diff}^\bullet(U \cup V) \to \mathfrak{Diff}^\bullet(U) \oplus \mathfrak{Diff}^\bullet(V) \to \mathfrak{Diff}^\bullet(U \cap V) \to 0$$

从而诱导了长正合序列

$$\ldots \to \mathsf{H}^n_{\mathrm{deRham}}(U \cup V) \to \mathsf{H}^n_{\mathrm{deRham}}(U) \oplus \mathsf{H}^n_{\mathrm{deRham}}(V) \to \mathsf{H}^n_{\mathrm{deRham}}(U \cap V) \to \ldots$$

且这个正合列和上同调的 Mayer-Vietoris 正合列通过 (5.23) 定义的 Ψ 构成同态

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{H}^n_{\mathrm{deRham}}(U\cup V) \arrow[r] \arrow[d, "\Psi"'] & \mathsf{H}^n_{\mathrm{deRham}}(U)\oplus\mathsf{H}^n_{\mathrm{deRham}}(V) \arrow[r] \arrow[d, "\Psi\oplus\Psi"'] & \mathsf{H}^n_{\mathrm{deRham}}(U\cap V) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\Psi"'] & \mathsf{H}^{n+1}_{\mathrm{deRham}}(U\cup V) \arrow[d] \\
\mathsf{H}^n_{\mathrm{smooth}}(U\cup V) \arrow[r] & \mathsf{H}^n_{\mathrm{smooth}}(U)\oplus\mathsf{H}^n_{\mathrm{smooth}}(V) \arrow[r] & \mathsf{H}^n_{\mathrm{smooth}}(U\cap V) \arrow[r, "\delta"] & \mathsf{H}^{n+1}_{\mathrm{smooth}}(U\cup V)
\end{tikzcd}$$

证明 取最后的映射为

$$\begin{aligned}
\pi: \quad \mathfrak{Diff}^\bullet(U) \oplus \mathfrak{Diff}^\bullet(V) &\longrightarrow \mathfrak{Diff}^\bullet(U \cap V) \\
(\omega_1, \omega_2) &\longmapsto \omega_1|_{U\cap V} - \omega_2|_{U\cap V}
\end{aligned}$$

不难验证核是 $\mathfrak{Diff}^\bullet(U \cup V)$. 同样不难验证这个映射和 d 可以交换. 于是诱导了命题中的正合列. □

定理 5.26 *对于流形 M,*

$$\mathsf{H}^n_{\mathrm{deRham}}(M) \cong \mathsf{H}^n(M; \mathbb{R})$$

证明 我们证明 (5.22) 和 (5.22) 定义的 Φ, Ψ 都是同构. 首先, 当 M 微分同胚于欧式空间凸的开集时, 这是显然的, 因为都是零线性空间. 其次, 注意到, U, V $U \cap V$ 满足, 根据五引理, $V \cap U$ 也满足, 再次, 如果不交的 $\{U_i\}$ 满足, 则 $\bigcup U_i$ 也满足. 这就已经足够杀死定理, 因为任何一个流形都是两个开集的并, 这两个开集又是有限个微分同胚于欧式空间凸开集的并. □

第六章　群的同调

6.1　定义

定义 6.1 (G-模) 对于群 G, *Abel* 群 M, 如果 G 加性地作用在 M 上, 即 M 被 G 作用, 且

$$g(m_1 + m_2) = gm_1 + gm_2$$

则称 M 为 **G-模**. 对于两个 G-模 M, N, 如果 *Abel* 群同态 $f : M \to N$ 还和 G 的作用可交换, 那么称 f 为 **G-模同态**. 将其组成的范畴记为 G-Mod.

等价地, 一个 G-模就是一个 $\mathbb{Z}[G]$-模, G-模同态就是一个 $\mathbb{Z}[G]$-模.

定义 6.2 (群同调, 群上同调) 对于群 G, G-模 M, 定义

$$M^G = \{x \in M : \forall g \in G, gx = x\} \qquad M_G = M / \langle gx - x : g \in G, x \in M\rangle$$

这里 $\langle * \rangle$ 是生成的 G-子模. 这可以函子化为

$$\begin{tikzcd}
*^G : & G\text{-Mod} & M \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & M^G \arrow[d, "f|_{M^G}"] & G\text{-Mod} \\
& \cdots & N \arrow[r, mapsto] & N^G & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
*_G : & G\text{-Mod} & M \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & M_G \arrow[d, "f\text{自然}"] & G\text{-Mod} \\
& \cdots & N \arrow[r, mapsto] & N_G & \cdots
\end{tikzcd}$$

不难验证 $*^G$ 是一个左正合函子, $*_G$ 是一个右正合函子. 其对应的导出函子

$$\left[\boldsymbol{R}^n(*^G)\right](A) =: \mathsf{H}^n(G,A) \qquad [\boldsymbol{L}_n(*_G)](A) =: \mathsf{H}_n(G,A)$$

定义 6.3 (增广理想) 对于群 G, 定义同态

$$\epsilon : \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z} \qquad \sum_{g\in G} n_g g \longmapsto \sum_{g\in G} n_g$$

其中 G 在 $\mathbb{Z}$ 上作用是平凡的. 记 $\ker\epsilon = \mathbb{I}_G$, 这被成为 G 的**增广 (augmentation) 理想**. 显然, $\mathbb{I}_G = \bigoplus_{g\in G\setminus\{1\}} \mathbb{Z}(g-1)$. 且有正合列 $0 \to \mathbb{I}_G \to \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z} \to 0$.

定理 6.4 对于群 G, G-模 M,

$$M^G = \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, M) \qquad M_G = \mathbb{Z} \underset{G}{\otimes} M$$

这里 $\otimes_G$ 是 $\otimes_{\mathbb{Z}[G]}$ 的简写, Hom_G 是 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}$ 的简写.

证明 对于前者, 考虑

$$\varphi : \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, M) \longrightarrow M^G \qquad \varphi \longmapsto \varphi(1)$$

因为 $\varphi(1)$ 实际上决定了 φ, 故是单射. 而 $\varphi : n \mapsto nx$ 成为 g 模同态当且仅当

$$\forall g \in G, \quad g\varphi(1) = \varphi(g(1)) \quad \text{i. e.} \quad g(x) = g(1)x$$

但是 G 在 $\mathbb{Z}$ 上的作用是平凡的, 故 $g(1) = 1$, 于是 $g(x) = x$.

另一方面, 根据换环公式,

$$\mathbb{Z} \underset{G}{\otimes} M \cong \mathbb{Z} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} M \big/ \langle ng \otimes x - n \otimes gx : n \in \mathbb{Z}, g \in G, x \in M\rangle$$

同样因为 G 在 $\mathbb{Z}$ 上的作用是平凡的, 故在 $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} M = M$ 的等同下, $\mathbb{Z} \otimes_G M \cong M_G$. □

推论 6.5 对于群 G, G-模 M,

$$\mathsf{H}^n(G,A)=\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},M)\qquad \mathsf{H}_n(G,A)=\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},M)$$

证明 不难验证上面的同构是自然的. □

显然, 增广理想给出了 H^1 和 H_1 的计算方法.

定理 6.6 对于群 G, G-模 M,

$$M_G=\mathsf{H}_0(G,M)=M/\mathbb{I}_GM\qquad \mathsf{H}_1(G,M)=\ker[\mathbb{I}_G\underset{G}{\otimes}M\to\mathbb{I}_GM]$$

$$M^G=\mathsf{H}^0(G,M)=\{x\in M,\mathbb{I}_Gx=0\}\qquad \mathsf{H}^1(G,M)=\mathrm{cok}[M\to\mathrm{Hom}_G(\mathbb{I}_G,M)]$$

证明 利用正合列

$$0\to\mathbb{I}_G\to\mathbb{Z}[G]\to\mathbb{Z}\to 0$$

得到

$$0\to\underbrace{\mathrm{Tor}_n^G(\mathbb{Z},M)}_{=\mathsf{H}_1(G,M)}\to\mathbb{I}_G\underset{G}{\otimes}M\to\underbrace{\mathbb{Z}[G]\underset{G}{\otimes}M}_{=M}\to\mathbb{Z}\underset{G}{\otimes}M\to 0$$

以及

$$0\to\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z},M)\to\underbrace{\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G],M)}_{=M}\to\mathrm{Hom}_G(\mathbb{I}_G,M)\to\underbrace{\mathrm{Ext}^1_G(\mathbb{Z},M)}_{=\mathsf{H}^1(G,M)}\to 0$$

命题得证. □

推论 6.7 对于群 G, 如果 G-模 M 上 G 的作用是平凡的, 那么

$$M_G=\mathsf{H}_0(G,M)=M\qquad \mathsf{H}_1(G,M)=\mathbb{I}_G\underset{G}{\otimes}M=\mathbb{I}_G/\mathbb{I}_G^2\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}M$$

$$M^G=\mathsf{H}^0(G,M)=M\qquad \mathsf{H}^1(G,M)=\mathrm{Hom}_G(\mathbb{I}_G,M)=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{I}_G/\mathbb{I}_G^2,M)$$

证明 注意到

$$\varphi:\mathbb{I}_G\underset{G}{\otimes}M\longrightarrow\mathbb{I}_GM\qquad b\otimes(x-1)\longmapsto bx-b=0$$

故 $\mathsf{H}_1(G,M)=\mathbb{I}_G\otimes M$, 为了计算同样利用换环公式

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_G\otimes_G M &= \mathbb{I}_G\otimes_{\mathbb{Z}} M\big/\left\langle bg\otimes x-b\otimes gx : b\in\mathbb{I}_G, g\in G, x\in M\right\rangle\\ &= \mathbb{I}_G\otimes_{\mathbb{Z}} M\big/\left\langle b(g-1)\otimes x : b\in\mathbb{I}_G, g\in G, x\in M\right\rangle\\ &= \mathbb{I}_G\otimes_{\mathbb{Z}} M/\mathbb{I}_G^2\otimes_{\mathbb{Z}} M=\mathbb{I}_G/\mathbb{I}_G^2\otimes_{\mathbb{Z}} M\end{aligned}$$

上同调是类似的, 也能得到 $[M\to \mathrm{Hom}_G(\mathbb{I}_G,M)]=0$, 从而 $\mathsf{H}^1(G,M)=\mathrm{Hom}_G(\mathbb{I}_G,M)$, 计算时, 使用类似的方法,

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_G(\mathbb{I}_G,M) &= \{f\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{I}_G,\to M): \forall x,y\in G, yf(1-x)=f(y(1-x))\}\\ &= \{f\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{I}_G,\to M): \forall x,y\in G, f((x-1)(y-1))=0\}\\ &= \{f\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{I}_G,\to M): f(\mathbb{I}_G^2)=0\}\\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{I}_G/\mathbb{I}_G^2,M)\end{aligned}$$

命题得证. □

引理 6.8 对于群 G, $\mathbb{I}_G/\mathbb{I}_G^2\cong G/[G,G]=G$的交换化.

证明　考虑

$$\varphi:\mathbb{I}_G/\mathbb{I}_G^2\longrightarrow G/[G,G]\qquad x-1 \bmod (\ldots)\longmapsto x \bmod (\ldots)$$

因为

$$xy-1=(x-1)+(y-1)+(x-1)(y-1)\equiv (x-1)(y-1)\mod \mathbb{I}_G^2$$

不难验证是良定义的同态. 双射来自直接构造逆映射. □

推论 6.9 对于群 G, 如果 G-模 M 上 G 的作用是平凡的, 那么

$$\begin{aligned}\mathsf{H}_1(G,M) &= G\text{的交换化}\otimes_{\mathbb{Z}} M\\ \mathsf{H}^1(G,M) &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G\text{的交换化},M)=\mathrm{Hom}_{\mathsf{Group}}(G,M)\end{aligned}$$

特别地,

$$\mathsf{H}_1(G,\mathbb{Z})=G\text{的交换化}$$

6.2 预解

一个紧要的问题就是为 $\mathbb{Z}$ 寻找一个方便计算的 $\mathbb{Z}[G]$-模的预解.

定义 6.10 (Bar 预解) 对于群 G, 对于 $n\geq 0$, 令 $B_n=\mathbb{Z}[G]^{\oplus G^n}$, 但是记标准基为

$$\{\,[g_1\otimes\ldots\otimes g_n]:g_i\in G\,\}$$

特别地, 对于 $n=0$, 标准基为符号 [ ]. 定义

$$\begin{array}{rccl}\mathrm{d}: & B_n & \longrightarrow & B_{n-1}\\ & [g_1\otimes\ldots\otimes g_n] & \longmapsto & \left\{\begin{array}{l} g_1[g_2\otimes\ldots\otimes g_n]\\ \qquad +\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i[g_1\otimes\ldots\otimes g_ig_{i+1}\otimes\ldots\otimes g_n]\\ \qquad\qquad +(-1)^n[g_1\otimes\ldots\otimes g_{n-1}]\end{array}\right.\end{array}$$

这构成一个复形

$$\ldots\xrightarrow{\mathrm{d}}B_2\xrightarrow{\mathrm{d}}B_1\xrightarrow{\mathrm{d}}\underbrace{B_0}_{=\mathbb{Z}[G]}(\xrightarrow{\epsilon}\mathbb{Z})\to 0$$

为了证明这是一个预解, 我们需要证明正合性, 为此, 我们将其忘却到 *Abel* 群中, 这样可以构造同伦如下

$$s_{-1}:\mathbb{Z}\longrightarrow B_0\qquad 1\longmapsto[\ ]$$

$$s_n:B_n\longrightarrow B_{n+1}\qquad g_0[g_1\otimes\ldots\otimes g_n]\longmapsto[g_0\otimes g_1\ldots\otimes g_n]$$

不难验证

$$\epsilon\circ s_{-1}=\mathrm{id}\qquad \mathrm{d}s_0+s_{-1}\epsilon=\mathrm{id}\qquad \mathrm{d}s_n+s_{n-1}\mathrm{d}=\mathrm{d}$$

故正合.

评注 6.11 我们下面来解释为什么这样定义. 对于群 G, 类比 *(5.10)*, 可作 “无穷维无穷 $\triangle$-复形”K, 使得 $K^n=G^{\oplus(n+1)}$, 且

$$(x_0,x_1,\ldots,x_n)\in K^n \text{ 的 } n+1 \text{ 条边为 } \{(x_0,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_n)\}_i\subseteq K^{n-1}$$

这个空间是可缩的, 因为任何 $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ 上的点都和 $1 \in K^0$ 以 $(1, x_0, \ldots, x_n)$ 中的线段相连, 如下图. 为了标准化, 将 x_0 提出来假设

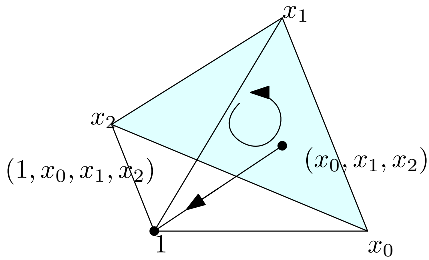


图 6.1: Bar 预解

$x_0 = 1$, 这样每个 n 次面可以唯一地表示成

$$g(\,1\,,\, x_1\,,\, x_1x_2\,,\ \ldots\,,\, x_1\ldots x_n\,) \qquad g, x_0, \ldots, x_n \in G$$

记

$$[x_1 \otimes \ldots \otimes x_n] = (\,1\,,\, x_1\,,\, x_1x_2\,,\ \ldots\,,\, x_1\ldots x_n\,)$$

记上面的面. 这样 $[x_1 \otimes \ldots \otimes x_n]$ 的各个边是

$$(\,x_1\,,\, x_1x_2\,,\ \ldots\,,\, x_1\ldots x_n\,) = x_1[1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_n]$$

$$(\,1,\ \ldots,\ \widehat{x_1\ldots x_i},\ \ldots,\ x_1\ldots x_n\,) = [x_1 \otimes \ldots \otimes x_i x_{i+1} \otimes \ldots \otimes x_n]$$

$$(1,\ x_1\,,\, x_1x_2\,,\ \ldots\,,\, x_1\ldots x_{n-1}\,) = [x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_{n-1}]$$

这就是 *Bar* 预解 *(6.10)*.

将 K^n 依次粘上 $n-1$ 维骨架, 一直下去得到 K. 此时 G 作用在 K 上

$$g \in G : K \longrightarrow K \qquad (x_0, \ldots, x_n) \text{ 上的点} \longmapsto (gx_0, \ldots, gx_n) \text{ 上的对应点}$$

可以得到轨道空间 K/G, 不难验证这是覆叠空间, 从而 K/G 的基本群是 G. 注意到 K/G 仍然是一个 "无穷维无穷 $\triangle$-复形", 其 n 次部分是

$$\{G(g_0, \ldots, g_1) : g_i \in G\}$$

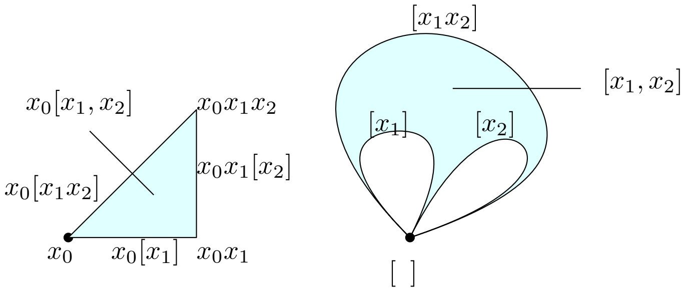


图 6.2: Bar 预解

故 n 次单纯复形为 $[x_1,\ldots,x_n]$ 生成自由 *Abel* 群, 不难验证其正是 $B_n \otimes_G \mathbb{Z}$. 由此连成的复形就是

$$\ldots \xrightarrow{\mathrm{d}} B_2 \underset{G}{\otimes} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{d}} B_1 \underset{G}{\otimes} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{d}} B_0 \underset{G}{\otimes} \mathbb{Z} (\xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \underset{G}{\otimes} \mathbb{Z}) \to 0$$

故 K/G 的 n 次单纯同调群是 $\mathrm{Tor}_n^G(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$, 即 $\mathsf{H}_n(G,\mathbb{Z})$. 注意到, $\mathsf{H}_1(G,\mathbb{Z}) = G$的交换化 是基本群的交换化 *(6.9)* 这是为代数拓扑学家所熟知的 *Hurewicz* 定理的推理. *Hurewicz* 定理断言第一个同调群是基本群的交换化.

定义 6.12 (简约 Bar 预解) 对于群 G, 令 $\widetilde{B}_0 = B_0$, 对于 $n \geq 1$, 令 $\widetilde{B}_n$ 为以

$$\{[g_1|\ldots|g_n] : g_i \in G \setminus \{1\}\}$$

生成的 $\mathbb{Z}[G]$ 群, 并且仿照 *(6.10)* 定义微分

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{d}: & \widetilde{B}_n & \longrightarrow & \widetilde{B}_{n-1} \\ & [g_1|\ldots|g_n] & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} g_1[g_2|\ldots|g_n] \\ \qquad + \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i [g_1|\ldots|g_i g_{i+1}|\ldots|g_n] \\ \qquad\qquad + (-1)^n [g_1|\ldots|g_{n-1}] \end{array} \right. \end{array}$$

其中如果 $g_i g_{i+1} = 1$ 则约定 $[g_1|\ldots|g_i g_{i+1}|\ldots|g_n]$ 整体为 0. 不难验证这

构成一个预解

$$\ldots \xrightarrow{\mathrm{d}} \widetilde{B}_2 \xrightarrow{\mathrm{d}} \widetilde{B}_1 \xrightarrow{\mathrm{d}} \underbrace{\widetilde{B}_0}_{=\mathbb{Z}[G]} (\xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}) \to 0$$

6.3 自由

一个自然的问题是 $\mathsf{H}(G,M)$ 对 M 可以用预解来求, G 是否也可以呢? 首要的第一个问题是自由群是否同调都为 0.

引理 6.13 对于集合 X 自由群 $G=F(X)$, 则增广理想 $\mathbb{I}_G$ 是以 $X-1=\{x-1: x\in G\}$ 为基的自由 $\mathbb{Z}[G]$-模.

证明 我们已经知道 $\mathbb{I}_G$ 由 $\{g-1: g\in G\setminus\{1\}\}$ 生成, 注意到

$$xy-1=x(y-1)+(x-1) \qquad (x^{-1}-1)=-x^{-1}(1-x)$$

故增广理想 $\mathbb{I}_G$ 可以由 $X-1$ 生成. 下面证明线性无关, 假如有关系

$$0=\sum_{x\in X} b_x(x-1) \qquad b_x\in\mathbb{Z}[G]\setminus\{0\}$$

$b_x=b'_x+b''_x x^{-1}$, b'_x 每一项都不以 x^{-1} 结尾, 将上市改写为

$$0=\sum_{x\in X} b'_x(x-1)-\sum_{x\in X} b''_x(x^{-1}-1) \qquad b_x\in\mathbb{Z}[G]\setminus\{0\}$$

则上述关系的展开不会发生约分, 不难发现展开得到的最长的项无法消去, 因为 $(\ldots)x\in G$ 只能出现在 $b'_x(x-1)$ 的展开中, $(\ldots)x^{-1}\in G$ 只能出现在 $b''_x(x^{-1}-1)$ 的展开中, 从而 $b'_x=b''_x=0$, 于是 $b_x=0$ 从而线性无关. □

定理 6.14 对于集合 X 自由群 $G=F(X)$, 任何 G-模 M, 则

$$\mathsf{H}^n(G,M)=\mathsf{H}_n(G,M)=0 \qquad n\geq 2$$

证明 考虑正合列

$$0\to\mathbb{I}_G\to\mathbb{Z}[G]\to\mathbb{Z}\to 0$$

于是根据长正合序列, $n \geq 2$ 时,

$$\underbrace{\mathrm{Tor}_n^G(\mathbb{Z}[G], M)}_{=0} \to \underbrace{\mathrm{Tor}_n^G(\mathbb{Z}, M)}_{=\mathsf{H}_n(G,M)} \to \underbrace{\mathrm{Tor}_{n-1}^G(\mathbb{I}_G, M)}_{=0}$$

并且

$$\underbrace{\mathrm{Ext}_G^{n-1}(\mathbb{I}_G, M)}_{=0} \to \underbrace{\mathrm{Ext}_G^n(\mathbb{Z}, M)}_{=\mathsf{H}^n(G,M)} \to \underbrace{\mathrm{Ext}_G^n(\mathbb{Z}[G], M)}_{=0}$$

于是 $\mathsf{H}_n(G, M) = \mathsf{H}^n(G, M) = 0$. □

推论 6.15 对于集合 X 自由群 $G = F(X)$, 则

$$\mathsf{H}^n(G, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ \mathbb{Z}^X & n = 1 \\ 0 & n \geq 2 \end{cases} \qquad \mathsf{H}_n(G, M) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ \mathbb{Z}^{\oplus X} & n = 1 \\ 0 & n \geq 2 \end{cases}$$

证明 根据 (6.7), $n = 0$ 情况显然, 而

$$\mathsf{H}_1(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{I}_G \underset{G}{\otimes} \mathbb{Z} = \bigoplus_{x \in X} (x - 1)\mathbb{Z}[G] \underset{G}{\otimes} \mathbb{Z} = \bigoplus_{x \in X} (x - 1)\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{\oplus X}$$

$$\mathsf{H}^1(G, \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\mathbb{I}_G, \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}\left(\bigoplus_{x \in X} (x - 1)\mathbb{Z}[G], \mathbb{Z}\right) = \prod_{x \in X} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[G], \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^X$$

命题得证. □

下面的问题是是否有长正合序列存在?

引理 6.16 对于群的正合列 $0 \to R \to F \to G \to 0$, 则 $\mathbb{Z}[G] = \mathbb{Z} \otimes_R \mathbb{Z}[F]$.

证明 注意到 $\mathbb{Z}[F]$ 是 $\mathbb{Z}[R]$-模, 其基是右陪集代表元, 即 G, 故

$$\mathbb{Z} \underset{R}{\otimes} \mathbb{Z}[F] = \mathbb{Z} \underset{R}{\otimes} \bigoplus_{g \in G} \mathbb{Z}[R]g = \bigoplus_{g \in G} \mathbb{Z}g = \mathbb{Z}[G]$$

命题得证. □

引理 6.17 对于群的正合列 $0\to R\to F\to G\to 0$, 则有 G-模正合列

$$0\to R_{\mathsf{ab}}\to \mathbb{Z}[G]\underset{F}{\otimes}\mathbb{I}_F\to \mathbb{I}_G\to 0$$

其中 R_{ab} 是 R 的交换化, 当中 G 在其上的作用是共轭作用 $g:[r\mapsto grg^{-1}]$.

证明 考虑

$$0\to \mathbb{I}_F\to \mathbb{Z}[F]\to \mathbb{Z}\to 0$$

在 $\mathbb{Z}[F]$ 上左边同时张量 $\mathbb{Z}[G]$, 根据 (6.16) 等价于, 在 $\mathbb{Z}[R]$ 上左边同时张量 $\mathbb{Z}$, 得到如下交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}^F(\mathbb{Z}[G],\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z}[G]\otimes_F\mathbb{I}_F \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z}[G]\otimes_F\mathbb{Z}[F] \arrow[r, "\dagger"] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z}[G]\otimes_F\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}^R(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \arrow[r, "\ddagger"'] & \mathbb{Z}\otimes_R\mathbb{I}_F \arrow[r] & \mathbb{Z}\otimes_R\mathbb{Z}[F] \arrow[r] & \mathbb{Z}\otimes_R\mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

根据换环公式

$$\mathbb{Z}[G]\underset{F}{\otimes}\mathbb{Z}=\mathbb{Z}[G]\underset{G}{\otimes}\mathbb{Z}\Big/\langle bf\otimes n-b\otimes n: b\in\mathbb{Z}[G], f\in F, n\in\mathbb{Z}\rangle=\mathbb{Z}$$

不难发现 $\dagger$ 通过同构, $\dagger=[\mathbb{Z}[G]\xrightarrow{\epsilon}\mathbb{Z}]$, 故 $\ker\dagger=\mathbb{I}_G$, 又因为 (6.9) 有 $\mathrm{Tor}^R(\mathbb{Z},\mathbb{Z})=\mathsf{H}_1(R,\mathbb{Z})=R_{\mathsf{ab}}$. 故得到

$$0\to R_{\mathsf{ab}}\to \mathbb{Z}[G]\underset{F}{\otimes}\mathbb{I}_F\to \mathbb{I}_G\to 0$$

命题得证. 为了计算出 G 在 R_{ab} 上的作用, 注意到

- $r \bmod (\dots)\in R_{\mathsf{ab}}$ 对应到 $\mathbb{I}_R/\mathbb{I}_R^2$ 根据 (6.8) 过程对应到 $r-1 \bmod (\dots)$.
- $r-1 \bmod (\dots)$ 对应到 $\mathbb{I}_R\otimes\mathbb{Z}$ 根据 (6.6) 过程对应到 $1\otimes(r-1)$.
- $1\otimes(r-1)\in\mathbb{Z}\otimes_R\mathbb{I}_R$ 通过 $\ddagger$ 映射到 $\mathbb{Z}\otimes_R\mathbb{I}_F$ 是 $1\otimes(r-1)$.
- $1\otimes(r-1)\in\mathbb{Z}\otimes_R\mathbb{I}_F$ 对应到 $\mathbb{Z}[G]\otimes_F\mathbb{I}_F$ 根据 (6.16) 过程对应到 $1\otimes(r-1)$.
- 显然 $g\in G$ 在 $\mathbb{Z}[G]\otimes_F\mathbb{I}_F$ 的作用是左乘

$$g(1\otimes(r-1))=g\otimes(r-1)=1\otimes(gr-g)=1\otimes(gr-1)-1\otimes(g-1)$$

- $1\otimes(gr-1)-1\otimes(g-1)\in\mathbb{Z}[G]\otimes_F\mathbb{I}_F$ 对应回到 $\mathbb{I}_R\otimes\mathbb{Z}$ 类似上面的过程还是 $1\otimes(gr-1)-1\otimes(g-1)$.

- $1\otimes(gr-1)-1\otimes(g-1)\in\mathbb{I}_R\otimes\mathbb{Z}$ 对应到 $r \bmod (\dots)\in R_{\mathsf{ab}}$ 根据 (6.8) 过程对应到 grg^{-1}.

论证完毕. $\square$

引理 6.18 对于群的正合列 $0\to R\to F\to G\to 0$, 则有右 G-模正合列

$$0\to R_{\mathsf{ab}}\to \mathbb{I}_F\underset{F}{\otimes}\mathbb{Z}[G]\to\mathbb{I}_G\to 0$$

其中 R_{ab} 是 R 的交换化, 当中 G 在其上的作用是共轭作用 $g:[r\mapsto g^{-1}rg]$.

证明 从 (6.16) 开始对偶地重写一遍. $\square$

定理 6.19 对于群的正合列

$$0\to R\to F\to G\to 0$$

对于 G-模 M, 有正合列

$$\begin{aligned}
\cdots &\to \mathrm{Tor}_{n-1}(R_{\mathsf{ab}},M)\to \mathsf{H}_n(F,M)\to \mathsf{H}_n(G,M)\to\\
&\to \mathrm{Tor}_{n-2}(R_{\mathsf{ab}},M)\to \mathsf{H}_{n-1}(F,M)\to \mathsf{H}_{n-1}(G,M)\to\cdots\\
\cdots &\to R_{\mathsf{ab}}\otimes_G M\to \mathsf{H}_1(F,M)\to \mathsf{H}_1(G,M)\to 0
\end{aligned}$$

其中 R_{ab} 是 R 的交换化.

证明 根据 (6.18) 有

$$0\to R_{\mathsf{ab}}\to \mathbb{I}_F\underset{F}{\otimes}\mathbb{Z}[G]\to\mathbb{I}_G\to 0$$

同时在 $\mathbb{Z}[G]$ 上张量 M 得到长正合序列

$$\begin{aligned}
\cdots &\to \mathrm{Tor}^G_{n-1}(R_{\mathsf{ab}},M)\to \mathrm{Tor}^G_{n-1}(\mathbb{I}_F\otimes_F\mathbb{Z}[G],M)\to \mathrm{Tor}^G_{n-1}(\mathbb{I}_G,M)\to\\
&\to \mathrm{Tor}^G_{n-2}(R_{\mathsf{ab}},M)\to \mathrm{Tor}^G_{n-2}(\mathbb{I}_F\otimes_F\mathbb{Z}[G],M)\to \mathrm{Tor}^G_{n-2}(\mathbb{I}_G,M)\to\cdots\\
\cdots &\to R_{\mathsf{ab}}\otimes_G M\to \mathbb{I}_F\otimes_F M\to \mathbb{I}_G\otimes_G M\to 0
\end{aligned}$$

因为 $\mathbb{I}_F \otimes_F \mathbb{Z}[G] \otimes_G - = \mathbb{I}_F \otimes_F -$, 故

$$\mathrm{Tor}^G_{n-1}(\mathbb{I}_F \underset{F}{\otimes} \mathbb{Z}[G], M) = \mathrm{Tor}^F_{n-1}(\mathbb{I}_F, M)$$

再利用 $0 \to \mathbb{I}_F \to \mathbb{Z}[F] \to \mathbb{Z} \to 0$ 和 $0 \to \mathbb{I}_G \to \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z} \to 0$ 的长正合序列得到

$$\mathrm{Tor}^F_{n-1}(\mathbb{I}_F, M) = \mathrm{Tor}^F_n(\mathbb{Z}, M) = \mathsf{H}_n(F, M) \qquad \mathrm{Tor}^G_{n-1}(\mathbb{I}_G, M) = \mathsf{H}_n(G, M)$$

以及正合列

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}^F_1(\mathbb{Z}, M) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{I}_F \otimes_F M \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}^G_1(\mathbb{Z}, M) \arrow[r] & \mathbb{I}_G \otimes_G M \arrow[r] & M \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

这样可以对正合列做如下的小手术, 利用下面的蛇形引理

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & R_{\mathsf{ab}} \otimes_G M \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{I}_F \otimes_F M \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{I}_G \otimes_G M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & M &
\end{tikzcd}$$

得到

$$\dots \to R_{\mathsf{ab}} \underset{G}{\otimes} M \to \underbrace{\mathrm{Tor}^F_1(\mathbb{Z}, M)}_{=\mathsf{H}_1(F,M)} \to \underbrace{\mathrm{Tor}^G_1(\mathbb{Z}, M)}_{=\mathsf{H}_1(G,M)} \to 0$$

将其 “接回” 原本的长正合序列的末尾, 命题得证. □

定理 6.20 对于群的正合列

$$0 \to R \to F \to G \to 0$$

对于 G-模 M, 有正合列

$$
\begin{aligned}
&0 \longrightarrow \mathsf{H}^1(G,M) \longrightarrow \mathsf{H}^1(F,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R_{\mathsf{ab}},M) - - \\
&\quad - \mathsf{H}^{n-1}(G,M) \longrightarrow \mathsf{H}^{n-1}(F,M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n-2}(R_{\mathsf{ab}},M) \\
&\longrightarrow \mathsf{H}^{n}(G,M) \longrightarrow \mathsf{H}^{n}(F,M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n-1}(R_{\mathsf{ab}},M) - - -
\end{aligned}
$$

其中 R_{ab} 是 R 的交换化.

作为一个应用, 我们考虑 $0 \to R \to F \to G \to 0$ 在 F 是自由的情形.

定理 6.21 (Hopf 公式) 对于群 G, 对于群展示 $0 \to R \to F \to G \to 0$, 则

$$\mathsf{H}_2(G,\mathbb{Z}) = \frac{R \cap [F,F]}{[F,R]}$$

其中 $[*,*]$ 是交换子.

证明 根据 (6.19) 有正合列

$$\ldots \to \underbrace{\mathsf{H}_2(F,\mathbb{Z})}_{=0} \to \mathsf{H}_2(G,\mathbb{Z}) \to R_{\mathsf{ab}} \underset{G}{\otimes} \mathbb{Z} \xrightarrow{\dagger} \underbrace{\mathsf{H}_1(F,\mathbb{Z})}_{=F\text{ 的交换化}} \to \underbrace{\mathsf{H}_1(G,\mathbb{Z})}_{=G\text{ 的交换化}} \to 0$$

注意到根据换环公式, 以及 (6.18) 得到的 R_{ab} 的右 G-模结构

$$
\begin{aligned}
R_{\mathsf{ab}} \otimes_G \mathbb{Z} \quad & R_{\mathsf{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} / \left\langle g^{-1} r g \otimes n - r \otimes g n : r \in R_{\mathsf{ab}}, g \in F/R \right\rangle \\
&= R_{\mathsf{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} / \left\langle f^{-1} r f \otimes n - r \otimes g n : r \in R_{\mathsf{ab}}, f \in F \right\rangle \\
&= R_{\mathsf{ab}} / \left\langle f r^{-1} f r^{-1} : r \in R_{\mathsf{ab}}, f \in F \right\rangle \\
&= R/[F,R]
\end{aligned}
$$

纵观上述过程, $\dagger$ 由 $[r \mapsto r-1]$ 诱导, 而同构到 F 的交换化则由 $[f-1 \mapsto f]$ 诱导, 故 $\dagger$ 正是自然映射 $\left[\frac{R}{[F,R]} \to \frac{F}{[F,F]}\right]$, 故

$$\mathsf{H}_2(G,\mathbb{Z}) = \ker \dagger = \ker \left[\frac{R}{[F,R]} \to \frac{F}{[F,F]}\right] = \frac{R \cap [F,F]}{[F,R]}$$

命题得证. □

6.4 有限

本节我们要考虑有限群.

定义 6.22 (正规元) 对于有限群 G, 定义**正规元** $N=\sum_{g\in G} g\in\mathbb{Z}[G]$. 对于 G-模 M, 这定义了一个同态

$$N: M \longrightarrow M \qquad x \longmapsto Nx$$

引理 6.23 对于有限群 G, 正规元 $N\in\mathbb{Z}[G]$, 则

$$\mathbb{I}_G=\ker[\mathbb{Z}[G]\xrightarrow{N}\mathbb{Z}[G]]$$

证明 注意到, 对于 $x=\sum_{g\in G} n_g g\in\mathbb{Z}[G]$,

$$Nx=0 \iff \sum_{g\in G} n_g N=0 \iff \sum_{g\in G} n_g=0 \iff x\in\mathbb{I}_G$$

命题得证. □

定义 6.24 (Tate 上同调) 对于有限群 G, G-模 M, 定义 **Tate 上同调**

$$\widehat{\mathsf{H}}^n(G,M)=\begin{cases}\mathsf{H}^n(G,A) & n\geq 1\\ A^G/NA & n=0\\ \{x\in M: Nx=0\}/\mathbb{I}_G M & n=-1\\ \mathsf{H}_{1-n}(G,A) & n\leq -2\end{cases}$$

其中 N 是 G 的正规元.

命题 6.25 对于有限群 G, G-模的短正合列 $0\to A\to B\to C\to 0$ 给出 *Tate* 上同调的长正合序列

$$\ldots\to\widehat{\mathsf{H}}^{n-1}(G,C)\to\widehat{\mathsf{H}}^n(G,A)\to\widehat{\mathsf{H}}^n(G,B)\to\widehat{\mathsf{H}}^n(G,C)\to\widehat{\mathsf{H}}^{n+1}(G,A)\to\ldots$$

证明 将 Tor 和 Ext 的长正合序列通过蛇形引理连接起来

$$
\begin{tikzcd}
 & & \widehat{\mathsf{H}}^0(G,A) \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{\mathsf{H}}^0(G,B) \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{\mathsf{H}}^0(G,C) \arrow[d] \arrow[dddll, rounded corners, bend left] & & \\
\cdots \arrow[r] & \mathsf{H}_1(G,C) \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & A_G \arrow[r] \arrow[d, "N"'] & B_G \arrow[r] \arrow[d, "N"'] & C_G \arrow[r] \arrow[d, "N"'] & 0 & \\
 & 0 \arrow[r] & A^G \arrow[r] \arrow[d] & B^G \arrow[r] \arrow[d] & C^G \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{H}^1(G,A) \arrow[r] & \cdots \\
 & & \widehat{\mathsf{H}}^{-1}(G,A) \arrow[r] & \widehat{\mathsf{H}}^{-1}(G,B) \arrow[r] & \widehat{\mathsf{H}}^{-1}(G,C) \arrow[ur, dashed] & &
\end{tikzcd}
$$

其中根据 (6.23), 不难得知 $A_G = A/\mathbb{I}_G A \xrightarrow{N} A^G$ 是良定义的. 命题得证. □

定理 6.26 对于 m 阶有限群 G, 如果 G-模 M 满足 $M \xrightarrow{[x \mapsto mx]} M$ 是同构, 那么

$$
\mathsf{H}_n(G,M) = \begin{cases} \frac{N}{m}M & n=0 \\ 0 & n \geq 1 \end{cases} \qquad \mathsf{H}^n(G,M) = \begin{cases} \frac{N}{m}M & n=0 \\ 0 & n \geq 1 \end{cases}
$$

其中 $N \in \mathbb{Z}[G]$ 是正规元.

证明 因为 $N \cdot N = mN$, 故 $e : M \xrightarrow{[x \mapsto Nx/m]} M$ 是幂等的, 故给出 M 的分解

$$
M = eM \oplus (1-e)M = \operatorname{im} e \oplus \ker e = M^G \oplus \ker N = M^G \oplus \mathbb{I}_G M
$$

其中 $eM = M^G$ 是因为一方面 $g(ex) = ex$, 另一方面如果 $gx = x$, 那么 $ex = x \in eM$. 这就证明了 H_0 和 H^0 的情况.

为了证明 $\mathsf{H}_n, \mathsf{H}^n$. 记 $\hat{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$, 注意到 M 实际上成为 $\hat{\mathbb{Z}}[G]$-模, 故

$$
M = \hat{\mathbb{Z}}[G] \underset{\hat{\mathbb{Z}}[G]}{\otimes} M = \operatorname{Hom}_{\hat{\mathbb{Z}}[G]}\left(\hat{\mathbb{Z}}[G], M\right)
$$

故

$$\begin{cases} -\otimes_G M & = -\otimes_G \hat{\mathbb{Z}}[G] \otimes_{\hat{\mathbb{Z}}[G]} M \\ \mathrm{Hom}_G(-, M) & = \mathrm{Hom}_G\left(-, \mathrm{Hom}_{\hat{\mathbb{Z}}[G]}\left(\hat{\mathbb{Z}}[G], M\right)\right) = \mathrm{Hom}_{\hat{\mathbb{Z}}[G]}(-\otimes_G \hat{\mathbb{Z}}[G], M) \end{cases}$$

不难直接验证 $-\otimes_G \hat{\mathbb{Z}}[G]$ 将 $\mathbb{Z}[G]$-右投射模映射为 $\hat{\mathbb{Z}}[G]$-右投射模. 故取预解知道

$$\begin{cases} \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}[G]}(-, M) & = \mathrm{Tor}_n^{\hat{\mathbb{Z}}[G]}(-\otimes \hat{\mathbb{Z}}[G], M) \\ \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}[G]} -, M & = \mathrm{Ext}^n_{\hat{\mathbb{Z}}[G]}(-\otimes \hat{\mathbb{Z}}[G], M) \end{cases}$$

考虑 $0 \to \mathbb{I}_G \to \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z} \to 0$, 注意到 $\hat{\mathbb{Z}}[G]$ 是平坦的 [1], 有正合列

$$0 \to \mathbb{I}_G \underset{G}{\otimes} \hat{\mathbb{Z}}[G] \to \underbrace{\mathbb{Z}[G] \underset{G}{\otimes} \hat{\mathbb{Z}}[G]}_{=\hat{\mathbb{Z}}[G]} \to \underbrace{\mathbb{Z} \underset{G}{\otimes} \hat{\mathbb{Z}}[G]}_{=\hat{\mathbb{Z}}} \to 0$$

但是这是分裂的, 因为可以取 $\left[\hat{\mathbb{Z}} \xrightarrow{n \mapsto \frac{n}{m} N} \hat{\mathbb{Z}}[G]\right]$. 从而 $\mathbb{Z} \otimes_G \hat{\mathbb{Z}}[G]$ 是投射 $\hat{\mathbb{Z}}[G]$-模, 故 $n \geq 1$ 时

$$\begin{cases} \mathsf{H}_n(G, M) & = \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M) = \mathrm{Tor}_n^{\hat{\mathbb{Z}}[G]}(\mathbb{Z} \otimes \hat{\mathbb{Z}}[G], M) = 0 \\ \mathsf{H}^n(G, M) & = \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M) = \mathrm{Ext}^n_{\hat{\mathbb{Z}}[G]}(\mathbb{Z} \otimes \hat{\mathbb{Z}}[G], M) = 0 \end{cases}$$

命题得证. □

推论 6.27 对于 m 阶有限群 G, 特征 p 的域 k, 如果 $p \nmid m$, 那么任何 $k[G]$-模 W 满足

$$n \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \mathsf{H}_n(G, W) = \mathsf{H}^n(G, W) = 0$$

证明 因为在 W 上数乘 m 是同构. □

定理 6.28 (Maschke) 对于 m 阶有限群 G, 特征 p 的域 k, 如果 $p \nmid m$, 那么任何 $k[G]$-模的正合列

$$0 \to V \xrightarrow{\alpha} V' \xrightarrow{\beta} V'' \to 0$$

都是分裂的.

[1] 实际上是局部化一般结论, 可以直接利用“通分”的技巧解决.

证明 他们是分裂的等价于其诱导出如下正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}_G(V'', V) \xrightarrow{-\circ\beta} \mathrm{Hom}_G(V', V) \xrightarrow{-\circ\alpha} \mathrm{Hom}_G(V, V) \to 0$$

因为 † 是满射意味着存在 $[V' \xrightarrow{\sigma} V]$ 使得 $[V \xrightarrow{\alpha} V' \xrightarrow{\sigma} V] = \mathrm{id}$, 这就让该正合列分裂.

首先, 一定有正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}_k(V'', V) \xrightarrow{-\circ\beta} \mathrm{Hom}_k(V', V) \xrightarrow{-\circ\alpha} \mathrm{Hom}_k(V, V) \to 0$$

因为作为线性空间一定是分裂的. 赋予 $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ 以 G-模结构通过

$$g : \mathrm{Hom}_K(V, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(V, W) \qquad f \longmapsto g \cdot f(g^{-1} \cdot *)$$

于是

$$\mathrm{Hom}_G(V, W) = \{f : V \to W : f(g \cdot *) = gf(*)\} = \mathrm{Hom}_k(V, W)^G$$

这样根据 (6.26), 同时取群的上同调, 立刻得到正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}_G(V'', V) \xrightarrow{-\circ\beta} \mathrm{Hom}_G(V', V) \xrightarrow{-\circ\alpha} \mathrm{Hom}_G(V, V) \to 0$$

命题得证. □

评注 6.29 (Maschke) 上述结论用表示论的术语描述就是经典的 *Maschke* 定理. 对于 m 阶有限群 G, 特征 p 的域 k, G 的 k-表示是完全可约的. 其初等的证明是将任何一个子表示 $V \subseteq V'$, 任意取线性的 $V' \xrightarrow{f} V$ 是投射, 作出其 "平均"

$$f^0(*) = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} g \cdot f(g^{-1} \cdot *)$$

这样 f^0 是 G-映射, 这就找到了 V 的补. 这其中就已经出现了正规元的影子.

定理 6.30 对于 m 阶有限群 G, 任何 G-模 M, $n \geq 1$ 时, 有

$$m\mathsf{H}_n(G, M) = 0 \qquad m\mathsf{H}^n(G, M) = 0$$

证明 我们要利用 Bar 预解 (6.10)

$$\ldots \to B_1 \to B_0 (\to \mathbb{Z}) \to 0$$

考虑

$$m_n : B_n \longrightarrow B_n \qquad x \longmapsto mx$$

我们要证明 $m_\bullet$ 在 $\bullet = n \geq 1$ 之后是零伦的, 这样就能够证明命题的结果. 定义

$$\begin{array}{rrcl} s_n: & B_n & \longrightarrow & B_{n+1} \\ & [g_1 \otimes \ldots \otimes g_n] & \longmapsto & (-1)^{n+1} \sum\limits_{g \in G} [g_1 \otimes \ldots \otimes g_n \otimes g] \end{array}$$

计算

$$\begin{aligned} & \mathrm{d}s_n[g_1 \otimes \ldots \otimes g_n] \\ = & \mathrm{d}\left((-1)^{n+1} \textstyle\sum_{g \in G} [g_1 \otimes \ldots \otimes g_n \otimes g]\right) \\ = & (-1)^{n+1} \textstyle\sum_{g \in G} g_1 [g_2 \otimes \ldots \otimes g_n \otimes g] \\ & \qquad + (-1)^{n+1} \textstyle\sum_{g \in G} \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i [g_1 \otimes \ldots g_i g_{i+1} \ldots \otimes g_n \otimes g] \\ & \qquad + (-1)^{n+1} \textstyle\sum_{g \in G} (-1)^n [g_1 \otimes \ldots \otimes g_n g] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*) \\ & \qquad\qquad + (-1)^{n+1} \textstyle\sum_{g \in G} (-1)^{n+1} [g_1 \otimes \ldots \otimes g_n] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & s_{n-1}\mathrm{d}[g_1 \otimes \ldots \otimes g_n] \\ = & (-1)^n \textstyle\sum_{g \in G} g_1 [g_2 \otimes \ldots \otimes g_n \otimes g] \\ & \qquad + (-1)^n \textstyle\sum_{g \in G} \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i [g_1 \otimes \ldots g_i g_{i+1} \ldots \otimes g_n \otimes g] \\ & \qquad\qquad + (-1)^n \textstyle\sum_{g \in G} (-1)^n [g_1 \otimes \ldots \otimes g_{n-1} \otimes g] \end{aligned}$$

注意到 $(*) = (-1)^{n+1} \sum_{g \in G} (-1)^n [g_1 \otimes \ldots \otimes g]$, 故

$$\mathrm{d}s_n + s_{n-1}\mathrm{d} = (-1)^{n+1} \sum_{g \in G} (-1)^{n+1} [g_1 \otimes \ldots \otimes g_n] = m[g_1 \otimes \ldots \otimes g_n]$$

命题得证. □

推论 6.31 *如果 G 是有限群, M 是有限生成 G-模, 那么 $\mathsf{H}_n(G, A), \mathsf{H}^n(G, A)$ 在 $n \geq 1$ 时都是有限群.*

证明 取 Bar 预解 (6.10)$B_\bullet$, 不难知道 $B_\bullet \otimes M$ 和 $\operatorname{Hom}_G(B_n, A)$ 都是有限生成 Abel 群, 但是根据 (6.30), 他们实际上是有限生成 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-模. □

6.5 扩张

本节是 §3.2Baer 和的推广.

定义 6.32 (群扩张) 对于群 G, *Abel* 群 A, 一个 G 沿着 A 的**群扩张**是正合列

$$0 \to A \to E \xrightarrow{\pi} G \to 1$$

其中 A 通常写成加法. 通过共轭作用, G 作用在 A 上通过 $g = xA : [a \mapsto xax^{-1}]$ 使得 A 成为 G-模. 如果存在群同态 $[G \xrightarrow{\sigma} E]$ 满足 $[E \xrightarrow{\pi} G \xrightarrow{\sigma} E] = \mathrm{id}$, 那么称上述群扩张分裂.

定义 6.33 对于两个群扩张

$$0 \to A \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} G \to 0 \qquad 0 \to A \xrightarrow{\iota'} E' \xrightarrow{\pi'} G \to 0$$

其间的同态是群同态 $E \xrightarrow{\varphi} E'$

右图交换

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi"'] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\iota'"'] & E' \arrow[r, "\pi'"'] & G \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

通过追图知这一定是同构. 如果存在这样的同态, 称两个扩张**等价**.

定义 6.34 (半直积) 对于群 G, 如果 A 是 G-模, 那么可以在 $A \times G$ 上定义新的群结构满足

$$(a, g) \cdot (b, h) = (a + gb, gh)$$

这样 $1 = (0, 1)$, $(a, g)^{-1} = (-g^{-1}a, g^{-1})$, 记这种群结构为 $A \rtimes G$. 更有趣的记法是

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ a & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ b & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ a + gb & gh \end{pmatrix}$$

定理 6.35 对于群扩张

$$0 \to A \to E \to G \to 1$$

是分裂的, 则上述扩张和

$$0 \to A \xrightarrow{a \mapsto (a,1)} A \rtimes G \xrightarrow{(a,g) \mapsto g} G \to 0$$

等价.

证明 假设群同态 $\sigma : G \xrightarrow{\sigma} E$ 满足 $\sigma \circ \pi = \mathrm{id}$, 定义

$$\psi : A \rtimes G \longrightarrow E \qquad (a, g) \longmapsto a\sigma(g)$$

不难发现

$$\begin{aligned} \psi(a,g) \cdot \psi(b,h) &= a\sigma(g)b\sigma(h) \\ \psi(a + g \cdot b, gh) &= a \cdot \sigma(g)b\sigma(g)^{-1}\sigma(gh) \end{aligned}$$

故是同态. 容易验证, ψ 是扩张的同态. □

定义 6.36 (因子集) 对于群扩张

$$0 \to A \to E \xrightarrow{\pi} G \to 1$$

取定某个映射 $[G \to \sigma E]$ 使得 $[E \xrightarrow{\pi} G \xrightarrow{\sigma} E] = \mathrm{id}$, 一般而言 σ 不是群同态, 考虑

$$f : G \times G \longrightarrow A \qquad (x, y) \longmapsto \sigma(x)\sigma(y)\sigma(xy)^{-1}$$

这被称为 σ 对应的因子.

定义 6.37 (半直积) 对于群 G, 如果 A 是 G-模, 以及 $f : G \times G \to A$ 满足

$$\forall x, y, z \in G \qquad \begin{cases} f(x, 1) = f(1, x) = 0 \\ xf(y, z) - f(xy, z) + f(x, yz) - f(x, y) = 0 \end{cases}$$

则在 $A\times G$ 上可以定义群结构

$$(a,g)\cdot(b,h)=(a+gb+f(g,h),gh)$$

这样 $1=(0,1)$, $(a,g)^{-1}=(-g^{-1}a-g^{-1}f(g,g^{-1}),g^{-1})$, 记这种群结构为 $A\rtimes_f G$. 显然 $A\rtimes_0 G=A\rtimes G$.

定理 6.38 对于群扩张

$$0\to A\to E\to G\to 1$$

任意选择使得 $\sigma\circ\pi=\mathrm{id}$ 的 $\sigma:G\to E$ 对应的因子 f, 则上述扩张和

$$0\to A\xrightarrow{a\mapsto(a,1)}A\rtimes_f G\xrightarrow{(a,g)\mapsto g}G\to 0$$

等价.

证明 定义

$$\psi:A\rtimes_f G\longrightarrow E\qquad (a,g)\longmapsto a\sigma(g)$$

不难发现

$$\begin{aligned}\psi(a,g)\cdot\psi(b,h)&=a\sigma(g)b\sigma(h)\\ \psi(a+g\cdot b+f(g,h),gh)&=a\cdot\sigma(g)b\sigma(g)^{-1}\sigma(g)\sigma(h)\sigma(gh)^{-1}\sigma(gh)\end{aligned}$$

故是同态. 容易验证, ψ 是扩张的同态. □

定理 6.39 对于群 G, 如果 A 是 G-模, 以及 $f_1,f_2:G\times G\to A$ 满足对任意 $i=1,2$

$$\forall x,y,z\in G\qquad \begin{cases}f_i(x,1)=f_i(1,x)=0\\ xf_i(y,z)-f_i(xy,z)+f_i(x,yz)-f_i(x,y)=0\end{cases}$$

则

$$0\to A\to A\rtimes_{f_i}G\to G\to 0$$

等价当且仅当存在 $c:G\to A$ 使得

$$\forall x,y\in G,\qquad \begin{cases}c(1)=0\\ f_1(x,y)-f_2(x,y)=xc(x)-c(xy)+c(x)\end{cases}$$

证明 假设同态 $\varphi: A\rtimes_{f_1} G\to A\rtimes_{f_2} G$, 是扩张的同态. 根据交换性的条件, $\varphi(a,1)=(a,1), \varphi(a,g)=(*,g)$, 假设 $\varphi(0,g)\to(c(g),g)$ 于是

$$\varphi(a,g)=\varphi[(a,1)(0,g)]=(a,1)(c(g),g)=(a+c(g),g)$$

这样

$$\begin{aligned}\varphi(a,g)\cdot\varphi(b,h) &= (a+c(g),g)\cdot(b+c(h),h)\\ &= (a+c(g)+gb+gc(h)+f_2(g,h),gh)\\ \varphi(a+gb+f_1(x,y),gh) &= (a+gb+f_1(x,y)+c(gh),gh)\end{aligned}$$

于是不难得到 $\begin{cases}c(1)=0\\ f_1(x,y)-f_2(x,y)=xc(x)-c(xy)+c(x)\end{cases}$. 反之, 直接构造

$$\varphi: A\rtimes_{f_1} G\longrightarrow A\rtimes_{f_2} G \qquad (a,g)\longmapsto(a+c(g),g)$$

不难验证这是扩张的同态. □

记号 6.40 *对于群 G, G-模 A, 所有形如下列的扩张*

$$0\to A\to E\to G\to 0$$

使得 G 在 A 上的共轭作用和 A 的 G-模结构相同, 记为 $\textsc{Ext}(G,A)$, 记等价关系是 $\textsc{Eqv}$.

定理 6.41 (Schreier) *对于群 G, G-模 A, 存在双射*

$$\textsc{Ext}(G,A)/\textsc{Eqv}\overset{1:1}{\leftrightarrow}\mathsf{H}^2(G,A)$$

且 $0\in\mathsf{H}^2(G,A)$ 对应的就是分裂的情况, 根据 (6.35).

证明 我们要用简约 Bar 预解 (6.12)

$$\ldots\to\tilde{B}_3\to\tilde{B}_2\to\tilde{B}_1\to\tilde{B}_0(\to\mathbb{Z})\to 0$$

因为 $\tilde{B}_n = \mathbb{Z}[G]^{\oplus(G\setminus\{1\})^n}$ 则可以认为

$$\mathrm{Hom}_G(B_n, A) = \{\text{映射} G^n \xrightarrow{f} A : f(\ldots,1,\ldots) = 0\}$$

我们得到复形

$$\ldots \to \mathrm{Hom}_G(B_1, A) \underset{\dagger}{\overset{-\circ\mathrm{d}}{\to}} \mathrm{Hom}_G(B_2, A) \underset{\ddagger}{\overset{-\circ\mathrm{d}}{\to}} \mathrm{Hom}_G(B_3, A) \to \ldots$$

下面我们计算 $\mathrm{im}\,\dagger$ 以及 $\ker\ddagger$. 对于 $c : G \to A$, 那么

$$(\dagger c)(x, y) = (\dagger c)[x \otimes y] = c(\mathrm{d}[x \otimes y]) = c(x[y]-[xy]+[x]) = xc(y)-c(xy)+c(x)$$

故

$$f \in \mathrm{im}\,\dagger \iff \exists c : G \to A, \mathrm{s.\,t.} \forall x, y \in G, f(x, y) = xc(y) - c(xy) + c(x)$$

对于 $f \in G \times G \to A$, 那么

$$(\ddagger f)(x, y, z) = f(\mathrm{d}[x \otimes y \otimes z]) = xf(y, z) - f(xy, z) + f(x, yz) - f(x, y)$$

故

$$f \in \ker\ddagger \iff \forall x, y, z \in G, xf(y, z) - f(xy, z) + f(x, yz) - f(x, y) = 0$$

根据上面的讨论 (6.35), (6.38) 和 (6.39), 命题得证. □

定理 6.42 (Schur-Zassenhaus) *对于互质的 m, n, 如果 mn 阶群 G 具有一个 n 阶正规子群 A, 则存在 G 存在一个 m 阶子群 B, 从而*

$$1 \to A \to G \to G/A \to 0$$

是分裂的, 换言之, $G = A \rtimes G/A$.

证明 换句话说有正合列

$$1 \to \underbrace{A}_{|\cdot|=n} \to G \to \underbrace{G/A}_{|\cdot|=m} \to 0$$

如果 A 是 Abel 的, 因为 m,n 互质, 根据 (6.26), $\mathsf{H}^2(G/A,A)=0$, 故只有可能分裂, 自然存在 m 阶子群.

如果 A 不是 Abel 的, 我们对 n 归纳. 考虑 A 的 Sylow 子群 S, 因为互质, 这也是 G 的 Sylow 子群, 再考虑 S 的中心 Z, 因为 p 群具有非平凡的中心, 故 $Z\neq 1$.

注意到[2]

$$N_G(Z)=\{x\in G: xZ=Zx\}\supseteq\{x\in G: xS=Sx\}=N_G(S)$$

而因为 Sylow 子群都共轭, G 有 $[G:N_G(S)]$ 个 Sylow 子群, A 有 $[A:N_A(S)]$. 而 G 的 Sylow 子群在 A 中, 从而

$$[G:N_G(S)]=[A:N_A(S)]$$

因为 $N_A(S)=N_G(S)\cap A\subseteq N_G(S)$, 这迫使 $m|\#(N_G(S))$, 从而 $m|\#(N)$.

如果 $N_G(Z)=G$, 那么直接商去 Z 得到

$$1\to A/Z\to G/Z\to G/A\to 0$$

利用归纳假设存在 G 的子群 B' 使得 $|B'/Z|=m$, 再考虑

$$0\to Z\to B'\to B'/Z\to 0$$

此时 Z 是 Abel 的, 命题得证.

如果 $N_G(Z)\neq G$, 那么有正合列

$$0\to A\cap N_G(Z)\to N_G(Z)\to G/A\to 0$$

利用归纳假设立得. $\square$

关于群的同调还有更多的故事, 可以参见 [16] 第 6 章, [11] 第 9 章.

---

[2] 具体来说, 如果 $x\in N_G(S)$, 任意 $z\in Z, s\in S$,

$$(xzx^{-1})s(xzx^{-1})^{-1}=xz(x^{-1}sx)z^{-1}x^{-1}=x(x^{-1}sx)x^{-1}=s$$

故 $x\in Z$.

代数学小词典

本部分将快速介绍文中提到的代数学概念, 其中有些并不严格, 但是将让读者不至于过分困惑 (有些时候严格了会更加困惑). 本部分另一个功能是让读者快速想起这些概念.

余核 对于 R-模同态 $A \xrightarrow{\varphi} B$, **余核 (cokernel)** $\operatorname{cok}\varphi := B/\operatorname{im}\varphi$. 其和核有着对偶的泛性质. 具体来说, 任何 $B \xrightarrow{\psi} C$ 且使得 $\psi\varphi = 0$ 的同态必然唯一地通过 $\operatorname{cok}\varphi$, 即存在同态 $[\operatorname{cok}\varphi \to C]$ 使得 $[B \xrightarrow{\text{自然同态}} \operatorname{cok}\varphi \to C]$. 参见 [4] 或 [8].

自由模 对于集合 I, 集合 $R^{\oplus I} = \{(r_i)_{i\in I} : \text{只有有限的 } i \in I \text{ 使得 } r_i \neq 0\}$ 上有自然的 R-模结构, 这被称为自由模. 一个 R-模 M 被称为是**自由的 (free)** 如果同构于某个自由模. 这等价于如果 M 存在一组基 $\{e_i\}_{i\in I}$ 使得 $M = \bigoplus_{i\in I} Re_i$. 显然, 一个自由模总是投射模, 因为一个自由模到模的同态等同于基到模的映射, 只要对每个基顺着同态找一个原像就可. 参见 [4] 或 [8].

投射模 一个 R-模 M 被称为是**投射的**, 如果任何满同态 $A \twoheadrightarrow B$, 任何同态 $M \xrightarrow{\varphi} B$ 都可以提升为 $M \to A$, 使得 $[M \to A \to B] = [M \to B]$. 参见 [4] 或 [8].

正合 对于同态 $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$, 若 $\ker\psi = \operatorname{im}\varphi$, 则称在 B 处**正合 (exact)**. 例如 $0 \to A \xrightarrow{\varphi} B$ 在 A 处正合指的是 φ 是单射, $A \xrightarrow{\varphi} B \to 0$ 在 B 处正合指的是 φ 是满射. 参见 [4] 或 [8].

短正合 对于同态 $0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$, 若在每一点都正合, 则称这是**短 (short) 正合列**. 即, 在同构意义下, $B/A = C$. 有时也会说

$A \to B \to C$ 是短正合的, 如果两边接上 0 同态是短正合列. 参见 [4] 或 [8].

模展示 对于任意 R-模 A, 一个**模展示 (presentation)** 是一个短正合列 $0 \to R \to P \to A \to 0$, 其中 P 是自由的. 其中 R 称为**关系**. 一个模总是存在模展示, 例如取 $P = R^{\oplus A}$, 这样自然有 P 到 A 的满同态, 取 R 为其核即可. 参见 [4] 或 [8].

蛇形引理 若下图中的 $M - N$ 中间是交换的, 两行是正合的, 则存在 δ 连接 $\ker''$ 和 cok', 使得下图串联的 $\ker, \mathrm{cok}$ 蛇形同态链是正合的

$$\begin{tikzcd}
 & \ker' \arrow[r] \arrow[d] & \ker \arrow[r] \arrow[d] & \ker'' \arrow[d] \arrow[dddll, rounded corners, "\delta"] & \\
 & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & N'' \arrow[d] & \\
 & \mathrm{cok}' \arrow[r] & \mathrm{cok} \arrow[r] & \mathrm{cok}'' &
\end{tikzcd}$$

特别地, 如果 $M' \hookrightarrow M$, 则 $\ker' \hookrightarrow \ker$, 如果 $N \twoheadrightarrow N''$, 则 $\mathrm{cok} \twoheadrightarrow \mathrm{cok}''$. 其中 δ 的行为是如同向左下台阶 $[\ker'' \to M'' \overset{\text{原像}}{\to} M \to N \overset{\text{原像}}{\to} N' \to \mathrm{cok}']$. 这被称为**蛇形引理 (snake lemma)**. 参见 [4] §6.8.6 或 [8].

函子 **函子 (functor)** 就是一个范畴之间的映射, 且保持其中的态射. 所谓**加性 (additive) 函子**, 指的是保持同态的加法的函子. 参见 [9]I.3 P13 或 [12] 第一章.

张量积 对于环 R, A, B 分别是右, 左 R-模, 则**张量积 (tensor product)** $A \otimes_R B$ 是一个 Abel 群, 其中元素形如 $a \otimes b$ 的有限和, 其中 $a \in A, b \in B$, 且满足 $ar \otimes b = a \otimes rb$ 以及两个分配率 $(a + a') \otimes b = a \otimes b + a' \otimes b, a \otimes (b + b') = a \otimes b + a \otimes b'$. 如果 $A \overset{\varphi}{\to} B, A' \overset{\varphi'}{\to} B'$ 是两个同态, 则自然有 $A \otimes_R B \overset{\varphi \otimes \varphi'}{\to} A' \otimes_R B'$. 参见 [4] 或 [8].

自然变换 对于两个函子 $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}$, 如果任意 A, 都有 $\varphi_A : \boldsymbol{F}A \to \boldsymbol{G}A$ 的自然同态, 则称这个 φ 是**自然变换 (natural transform)**. 其中自然

同态指的是和态射可以交换. **自然同构**指的是 φ_A 还是同构. 参见 [9]I.4 P16.

左正合 一个函子被称为是**左正合**的, 如果把正合列 $0 \to A \to B \to C$ 映到正合列. 一个反变函子被称为是**左正合**的, 如果把正合列 $A \to B \to C \to 0$ 映到正合列 (因为反变函子将箭头反向). 一个函子被称为是**右正合**的, 如果把正合列 $A \to B \to C \to 0$ 映到正合列. 一个反变函子被称为是**右正合**的, 如果把正合列 $0 \to A \to B \to C$ 映到正合列 (因为反变函子将箭头反向). 称之为**正合**的, 如果把所有正合列映成正合列, 即把短正合列映成短正合列, 即既左正合又右正合.

裂正合 对于短正合列 $0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$, 如果存在提升 $C \xrightarrow{\tau} B$ 使得 $\psi\tau = \mathrm{id}_C$, 则称这个正合列是**裂 (split) 正合**的. 等价地, 存在截面 $B \xrightarrow{\sigma} A$ 使得 $\sigma\varphi = \mathrm{id}_A$. 裂正合说明在同构意义下是 $0 \to A \xrightarrow{\iota} A \oplus C \xrightarrow{\pi} C \to 0$, 其中 ι 是包含同态, π 是投影同态. 换言之, 裂正合是用映射复合的等式定义的关系, 故在加性函子下依旧裂正合. 事实上, 对于短正合列 $0 \to A \to B \to C \to 0$, 如果 C 是投射模, 则必定裂正合. 参见 [4] 或 [8].

内射模 一个 R-模 M 被称为是**内射的 (injective)**, 如果任何单同态 $A \hookrightarrow B$, 任何同态 $A \xrightarrow{\varphi} M$ 都可以延拓为 $B \to M$, 使得 $[A \to B \to M] = [A \to M]$. 一个定理是说在主理想整环, 例如 $\mathbb{Z}$ 上, 一个模是内射当且仅当可除, 即任意 $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $x \in M$, 总存在 $y \in M$ 使得 $ny = x$. 故 $\mathbb{Q}$ 是内射模, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 也是内射模, 且后者性质更好, 任何一个 Abel 群 A 都存在非零同态 $A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. 实际上 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 正是单位圆上的所有单位根 (乘法群). 参见 [8].

Abel 范畴 如果一个范畴中两个同起点终点的态射可以作加法, 且满足单位率结合律等一系列好的性质, 则被称为**预加范畴**. 一个范畴被称为**加性范畴**如果存在零对象和有限直和; 被称为 **Abel 范畴**如果进一步还总有 ker 和 cok. 参见经典的 [9] VIII 或 [12] 第 4 章.

平坦 一个模被称为**平坦的 (flat)**, 如果正合列和其作张量还是正合的, 因为张量积函子是右正合的, 平坦即将单射张量为单射. $\mathbb{Z}_2$ 就不是平

坦模, 让他作用在 $\mathbb{Z}\xrightarrow{\times 2}\mathbb{Z}$ 会破坏单射. 投射模必是平坦模, 故自由模必是平坦模. 例如参见 [5]9 或 [6]P28.

无挠 一个 R-模 M 被称为是**无挠 (torsion-free)** 的, 如果任何一个非零元素 $x\in M$, 非零元素 $r\in R$, 都有 $rx\neq 0$. 对于 P 是主理想整环的情况, 有限生成无挠能推出自由 (例如, 根据结构定理). 例如参见 [4] §6.7.

有限生成 Abel 群结构 有限生成的 Abel 群同构于一些 $\mathbb{Z}_n$ 和 $\mathbb{Z}$ 的直和, 参见 [4] §6.7.

局部化 对于交换环 R, 对乘法封闭的子集 $S\subseteq R$, 一个 R-模 M 关于一个的**局部化 (localization)** 指的是形如 $\frac{x}{s}, x\in M, s\in S$ 组成的分式, 两个分式 $\frac{x}{s}$ 和 $\frac{y}{t}$ 相等当且仅当存在 $u\in S$ 使得 $xtu=yst$, 换句话说可以通分成同一个分式, $\frac{xtu}{stu}=\frac{yst}{stu}$, 这构成一个模, 记为 $S^{-1}M$. 对环本身也可以这么操作得到一个新的环, 记为 $S^{-1}R$. 实际上, $S^{-1}(M)$ 还是 $S^{-1}R$-模. 参见 [5]11,12 或 [6] 第三章.

自由部分, 挠部分 对于有限生成 Abel 群 G, 其总可以写成自由部分和挠部分的直和, 自由部分是那些阶为无穷的元素, 他们组成的子群同构于 $\mathbb{Z}^n$, 挠部分是那些阶有限的元素, 他们组成的子群同构于某个有限 Abel 群, 容易从有限生成 Abel 群结构定理推知.

五引理 若有如下的交换图

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] \\
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E'
\end{tikzcd}$$

若行正合, 除了中间的纵向同态都是同构, 那么中间的同态也是同构, 这被称为**五引理**. 参见 [4] §6.8.7.

群环 对于群 G, 环 R, 可以定义 $R[G]$ 为全体形如

$$\sum_{g\in G} rg \qquad (\text{有限和})$$

的形式和, 其中加法是形式地, 乘法满足 $(rg)\cdot(sh)=(rs)(gh)$. 这构成一个环, 这被称为**群环**. 参见 [4] §5.6.

换环公式 对于环同态 $\varphi: R \to S$, 则任何 S-模都通过 φ 自然地视作 R-模, r 的作用为 $\varphi(r)$. 这样对于 S-右模 M, S-左模 N, 有

$$M \underset{S}{\otimes} N = M \underset{R}{\otimes} N \Big/ \langle ms \otimes n - m \otimes sn : m \in M, n \in N, s \in S \rangle$$

这利用张量积的构造是容易的. 参见 [3]§2.12 以及交换的情况 [5]§8.9.

书籍推荐

关于同调代数, 比较深入介绍是如下三本

[16] Weibel, *An Introduction to Homological Algebra.*

[12] Schapira, *Categories and Homological Algebra.*

[11] Rotman, *An Introduction to Homological Algebra.*

关于代数拓扑, 基础的书是

[10] Rotman, *An Introduction to Algebraic Topology.*

[7] Bredon, *Topology and Geometry.*

[1] 姜伯驹, *同调论.*

比较深入的如

[14] Dieck, *Algebraic Topology.*

[13] Switzer, *Algebraic Topology—Homotopy and Homology.*

如果要补充模论的基础知识可以参考

[4] 李文威, *代数学方法 (卷一).*

[8] Hilton& Stammbach, *A Course in Homological Algebra.*

插图

1.1 标准单纯形 6
1.2 边缘同态 7
1.3 洞 8
1.4 同伦 13
1.5 柱形的分解 13
1.6 同伦映射 14
1.7 三角形还是方形? 19

4.1 例如这是一个 3-连通区域 57
4.2 Riemman 的定理 57
4.3 系数是 $\mathbb{R}$ 57
4.4 等高线 59
4.5 出入平衡 59
4.6 轮胎面 60
4.7 蒂积 61
4.8 复形的乘积 65
4.9 复形的乘积 66

5.1 重心剖分 Sd 70
5.2 同伦 T 71
5.3 增厚 78

5.4 正多面体 79
5.5 球面 82
5.6 轮胎面 83

6.1 Bar 预解 92
6.2 Bar 预解 93

逻辑符号

为了方便讨论, 我们定义一些常用的逻辑符号. 在本书中, 也是多数文献中出现的逻辑符号与含义如下表所示:

符号	含义	其他记法
$\forall$	对于任意的 (for all)	
$\exists$	存在 (exist)	
$\exists^!$	存在唯一的 (unique)	$\exists!$, $\exists\vert$
s. t.	使得 (such that)	
i. e.	即 (that is, in other word)	
$\Rightarrow$	所以, 蕴含 (imply)	
$\Leftarrow$	因为, 由于	
$\Longleftrightarrow$	当且仅当 (if and only if), 等价于 (are equivalent)	
$:=$	定义为, 设为 (let be)	$\triangleq$, $\stackrel{\text{Def}}{=}$
$\square$	Halmos 记号, 证毕 (Q.E.D.), 得解	$\blacksquare$, $\blacktriangleleft$, ///
$\because$	因为 (because)	
$\therefore$	所以 (therefore)	

参考文献

[1] 姜伯驹. *同调论 (研究生数学基础课教材)*. 北京大学出版社, 2006.

[2] 熊锐. *数学入门*, volume 1 of *本科数学讲义*. 2018. www.cnblogs.com/XiongRuiMath/articles/8992691.html.

[3] 熊锐. *张量漫谈第三篇*, 2018. 可以在 www.cnblogs.com/XiongRuiMath/p/9443600.html 下载.

[4] 李文威. *代数学方法, 卷一*. 北京, 高等教育出版社, 2018. 在http://www.wwli.url.tw可以下载.

[5] Steven Kleniman Allen Altman. *a term of commutative algebra*. Worldwide Center of Mathematics, LLC, 2013. Available at http://www.centerofmathematics.com/wwcomstore/index.php/commalg.html.

[6] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.

[7] Glen E. Bredon. *Topology and geometry*, volume 139 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997. Corrected third printing of the 1993 original.

[8] P. J. Hilton and U. Stammbach. *A course in homological algebra*, volume 4 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1997.

[9] Saunders MacLane. *Categories for the working mathematician*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1971. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5.

[10] Joseph J. Rotman. *An introduction to algebraic topology*, volume 119 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1988.

[11] Joseph J. Rotman. *An introduction to homological algebra*. Universitext. Springer, New York, second edition, 2009.

[12] P. Schapira. *Categories and Homological Algebra*. 2015. available at `webusers.imj-prg.fr/~pierre.schapira/lectnotes/`.

[13] Robert M. Switzer. *Algebraic topology—homotopy and homology*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2002. Reprint of the 1975 original [Springer, New York; MR0385836 (52 #6695)].

[14] Tammo tom Dieck. *Algebraic topology*. EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008.

[15] Frank W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, volume 94 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983. Corrected reprint of the 1971 edition.

[16] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[17] Charles A. Weibel. History of homological algebra. In *History of topology*, pages 797–836. North-Holland, Amsterdam, 1999.

索引

G-模, 87
G-模同态, 87

Abel 范畴, 113
Alexander-Whitney 映射, 65

Baer 和, 41
Bar 预解, 90

cok, 111

De Rham 上同调, 8
de Rham 上同调, 84
$\triangle$-复形, 75

Halmos 记号, 119
Horseshoe 引理, 28

Künneth 公式, 62

Maschke, 102, 103
Mayer, 72
Mayer-Vietoris 耦, 72

n 扩张, 39

Vietoris, 72

万有系数定理, 54, 56
上同调模, 31
上链复形, 30
五引理, 114
余核, 111

光滑奇异上同调, 84
光滑奇异同调, 84
关系, 112
内射上链复形, 31
内射模, 113
函子, 112
切除定理, 74
加性函子, 112
加性范畴, 113
单形, 6
单纯同调, 8
单纯复形, 75
单纯形, 6
反向, 75
右导出函子, 32, 33
右正合, 113
同伦, 10, 31

同伦不变性, 11
同向, 75
同态, 10, 31
因子, 106
增广奇异复兴, 68
增广理想, 88
复形, 3, 6
奇异同调, 7
导出函子, 25, 32, 33
局部化, 114
左导出函子, 25, 33
左正合, 113
平坦, 47, 113
平坦预解, 46
张量积, 112
微分, 3, 30

扩张, 39
扩张函子, 35, 36
投射模, 111
投射的, 15
挠部分, 114
换环公式, 115
收缩同伦, 14
无挠, 114
有限生成 Abel 群结构定理, 114
标准单形, 5
标准单纯形, 5
模型, 20
模展示, 112
模性, 24
欧拉示性数, 78
正上链复形, 31
正合, 20, 111
正合形式, 31
正合的, 15
正规元, 99
比较定理, 16, 32

相对同调群, 22
相对链复形, 22
短正合, 20, 111
等价, 105
等价 (n 扩张的), 39
简单复形, 8
简约奇异同调群, 68
群扩张, 104
群环, 114

自然变换, 112
自然同构, 112
自由, 111
自由的, 15
自由部分, 114
蒂积, 61
蛇形引理, 112
裂正合, 113
边缘同态, 3, 30

重心重分, 70
链复形, 3

长正合序列, 20, 29, 32, 33
闭形式, 31
零伦, 47
零伦上链复形, 31
零伦的, 15
预加范畴, 113