李代数笔记

熊锐

2018 年 9 月 6 日

主要的参考文献是

- J-P.Serre. *Lie Algebras and Lie Groups.*
- J-P.Serre. *Complex Semisimple Lie Algebras.*
- W.Fulton & J.Harris. *Representation Theory.*
- J.S.Milne. *Lie Algebras, ALgebraic Groups and Lie Groups.*

但愿, 在远或不远的将来, Humphreys 的 GTM9 能在我生活或者我生活过的土地上永远消失.

Contents

Chapter 1

基本概念

1.1 李代数的定义

定义 1.1 (李代数) 令 k 是一个域, k-线性空间 $\mathfrak{g}$ 配上一个双线性映射的运算

$$[-,-]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}\qquad (x,y)\longmapsto[x,y]$$

被称为一个 k-**李代数 (Lie algebra)** 如果

- $\forall x\in\mathfrak{g}, [x,x]=0.$ *(反对称性)*
- $\forall x,y,z\in\mathfrak{g}, [[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=0.$ *(Jacobi 恒等式)*

注意到反对称性意味着对任意 $x,y\in\mathfrak{g}$, $[x,y]=-[y,x]$.

下面域 k 都被固定, 不再重新声明了.

记号 1.2 为了方便起见, 对李代数 $\mathfrak{g}$ 的子集 A,B, 定义

$$[A,B]=\{[a,b]:a\in A,b\in B\}\text{ 生产的线性空间}$$

定义 1.3 对于任何一个线性空间 V 都可以定义 $[x,y]=0$ 使之成为一个李代数. 反之, 如果一个李代数 $\mathfrak{g}$ 满足 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=0$, 这说明 $\mathfrak{g}$ 并不比线性空间有更多的结构. 这样的李代数被称为**交换李代数**.

任何李代数 $\mathfrak{g}$ 都可以定义其**中心**为 $\{x\in\mathfrak{g}:\forall y\in\mathfrak{g},[x,y]=0\}$.

定义 1.4 (子代数) 对于李代数 $\mathfrak{g}$, 若子空间 $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{g}$, 满足 $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subseteq \mathfrak{s}$, 则称 $\mathfrak{s}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数 .

定义 1.5 (理想, 商李代数) 对于李代数 $\mathfrak{g}$, 若子空间 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$, 满足 $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{a}$, 则称 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想 . 此时商空间 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 有自然的李代数结构, 被称为商代数 .

定义 1.6 (李代数同态) 对于李代数 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$, 若线性映射 $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 满足

$$\forall x, y \in \mathfrak{g} \qquad \varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$$

则称 φ 为李代数同态 .

事实 1.7 (同态定理) 类似群环模的定理, 有

- 对于李代数的同态 $\mathfrak{g} \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{h}$, $\ker\varphi$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想, $\operatorname{im}\varphi$ 是 $\mathfrak{h}$ 的子代数, 且

$$\mathfrak{g}/\ker\varphi \cong \operatorname{im}\varphi$$

- 对于李代数 $\mathfrak{g}$, 理想 $\mathfrak{h}, \mathfrak{a}$, 若 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{h}$, 则

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \cong (\mathfrak{g}/\mathfrak{a})/(\mathfrak{h}/\mathfrak{a})$$

- 对于李代数 $\mathfrak{g}$, 子代数 $\mathfrak{h}$, 理想 $\mathfrak{a}$, 则 $\mathfrak{h} + \mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数, $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{h}$ 的理想, 且

$$(\mathfrak{h} + \mathfrak{a})/\mathfrak{a} \cong \mathfrak{h}/(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a})$$

1.2 泛包络代数

定义 1.8 为了定义表示再补充如下定义

- 令 A 是一个结合代数, 通过定义 $[x, y] = xy - yx$ 可以赋予 A 一个李代数结构.

- 令 $\mathfrak{g}$ 是一个李代数, 则作为线性空间的张量代数 $T\mathfrak{g}$ 的商空间

$$U(\mathfrak{g}) := T\mathfrak{g}/\langle x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \rangle$$

  自然是一个结合代数, 这被称为 $\mathfrak{g}$ 的泛包络代数 . 显然, 存在自然映射 $\mathfrak{g} \xrightarrow{\iota} U(\mathfrak{g})$.

满足如下的泛性质

$$
\begin{aligned}
&\forall \text{结合代数} A,\\
&\forall \text{李代数同态} \mathfrak{g} \xrightarrow{\varphi} A,\\
&\exists! \text{结合代数同态} U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\hat{\varphi}} A,\\
&\quad \mathrm{s.\,t.}[\mathfrak{g} \xrightarrow{u} U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\varphi} A] = [\mathfrak{g} \xrightarrow{\hat{\varphi}} A]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\iota"'] & U(\mathfrak{g}) \arrow[d, "\hat{\varphi}"] \\
& A
\end{tikzcd}
$$

根据著名的 *Poincaré-Birkhoff-Witt* 定理, 其中的自然映射 ι 是嵌入.

定理 1.9 (Poincaré-Birkhoff-Witt) 对于李代数 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$ 到泛包络代数 $U(\mathfrak{g})$ 的自然映射 ι 是嵌入.

证明 先进行一些转化.

过滤. 首先根据定义, 虽然张量代数是分次的, 但商去的关系不是齐次的, 故整体不是分次的. 为了能够利用分次结构定义滤链

$$U_n\mathfrak{g} = \langle x_1 \otimes \ldots \otimes x_m : x_i \in \mathfrak{g}, m \le n \rangle$$

则

$$\underbrace{U_0\mathfrak{g}}_{=k} \subseteq \underbrace{U_1\mathfrak{g}}_{k \oplus \iota(\mathfrak{g})} \subseteq \ldots \subseteq U_n\mathfrak{g} \subseteq U_{n+1}\mathfrak{g} \subseteq \ldots$$

将其齐次化, 即考虑伴随分次代数

$$\operatorname{gr} U\mathfrak{g} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \operatorname{gr}_n \mathfrak{g} \qquad \operatorname{gr}_n(g) = U_n\mathfrak{g}/U_{n-1}\mathfrak{g}$$

其中的乘法诱导自 $U(\mathfrak{g})$ 的乘法. 不难验证

- $\operatorname{gr}_1 U\mathfrak{g} = \iota(\mathfrak{g})$ 实际上生成了 $\operatorname{gr} U\mathfrak{g}$.
- $\operatorname{gr} U\mathfrak{g}$ 实际上是交换的.

这样诱导了分次代数的映射 $\iota : S\mathfrak{g} \to \operatorname{gr} U\mathfrak{g}$. 我们下面的目标是证明这是一个同构. 一旦证明了同构就意味着 $\mathfrak{g} \xrightarrow{\iota} \iota(\mathfrak{g}) \cong S_1\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$. 我们已经知道如果 $\mathfrak{g}$ 有基 X, 如果赋予 X 一个全序, 则 $S_n\mathfrak{g}$ 就有一组基

$$\{x_1 \ldots x_n : \quad x_i \in X, x_1 \le \ldots \le x_n\}$$

我们只要证明 $\mathrm{gr}_n U\mathfrak{g}$ 中的

$$\{x_1 \otimes \ldots \otimes x_n : \quad x_i \in X, x_1 \leq \ldots \leq x_n\}$$

成为一组基即可. 因为我们已经得到了 $\mathrm{gr}\, U\mathfrak{g}$ 是交换的, 其生成 $\mathrm{gr}_n U\mathfrak{g}$ 的证明十分容易, 下面我们主要的证明是验证其其线性无关. 通过归纳法, 我们实际上就是要证明下列是 $U\mathfrak{g}$ 的一组基

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \{x_1 \otimes \ldots \otimes x_n : \quad x_i \in X, x_1 \leq \ldots \leq x_n\}$$

开始证明. 为了证明这件事, 我们采取构造模使得 $\mathfrak{g}$ 在其上具有自由的作用. 具体来说, 考虑 X 中全体长度为 n 的链

$$X_n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in X, x_1 \leq \ldots \leq x_n\}$$

考虑以 $\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ 为基生产的线性空间 V. 我们下面赋予 V 以 $\mathfrak{g}$-模结构, 递归地定义

$$x \cdot (x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} (x, x_1, \ldots, x_n) & x \leq x_1 \\ x_1 \cdot (x \cdot (x_2, \ldots, x_n)) + [x, x_1] \cdot (x_2, \ldots, x_n) & x > x_1 \end{cases}$$

分各种情况分别验证对每个 $v \in \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$

$$x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v) = [x, y] \cdot v$$

即可, 设 $v = (z, \ldots)$ 如下

- $x > y < z$ 时,

$$\begin{aligned} & x \cdot (y \cdot (z, \ldots)) - y \cdot (x \cdot (z, \ldots)) \\ = & x \cdot (y, z, \ldots) - y \cdot (x \cdot (z, \ldots)) && \because y < z \\ = & y \cdot (x \cdot (z, \ldots)) + [x, y] \cdot (z, \ldots) - y \cdot (x \cdot (z, \ldots)) && \because x > y \\ = & [x, y] \cdot (z, \ldots) \end{aligned}$$

- $y > x < z$ 时是类似的.

- $y > z < x$ 时, 不妨归纳 $(\ldots)$ 的长度,

$$\begin{aligned}
& x \cdot (y \cdot (z, \ldots)) - y \cdot (x \cdot (z, \ldots)) \\
= & x \cdot (z \cdot (y \cdot (\ldots))) - y \cdot (z \cdot (x \cdot (\ldots))) \\
& + x \cdot ([y, z] \cdot (\ldots)) - y \cdot ([x, z] \cdot (\ldots)) && \because x > z, y > z \\
= & z \cdot (x \cdot (y \cdot (\ldots))) - z \cdot (y \cdot (x \cdot (\ldots))) \\
& + [x, z] \cdot (y \cdot (\ldots)) - [y, z] \cdot (x \cdot (\ldots)) \\
& + x \cdot ([y, z] \cdot (\ldots)) - y \cdot ([x, z] \cdot (\ldots)) && \because x > z, y > z \\
= & z \cdot ([x, y] \cdot (\ldots)) + ([[x, z], y] + [x, [y, z]]) \cdot (\ldots) && \text{对 } (\ldots) \text{ 长度归纳} \\
= & z \cdot ([x, y] \cdot (\ldots)) - [[x, y], z] \cdot (\ldots) && \because \text{Jacobi 恒等式} \\
= & [x, y] \cdot (z \cdot (\ldots)) && \text{对 } (\ldots) \text{ 长度归纳}
\end{aligned}$$

这样就验证完 V 构成一个 $\mathfrak{g}$-模了, 这样 V 也是 $U\mathfrak{g}$-模, 如果在 $U\mathfrak{g}$ 中有线性关系

$$\sum_{(x_1, \ldots, x_n) \in \bigcup X_n} c_{(x_1, \ldots, x_n)} x_1 \otimes \ldots \otimes x_n = 0$$

将其作用在 $X_0 = \{\varnothing\}$ 上, 得到

$$\sum_{(x_1, \ldots, x_n) \in \bigcup X_n} c_{(x_1, \ldots, x_n)} (x_1, \ldots, x_n) = 0$$

从而 $c_* = 0$, 故线性无关, 命题得证. □

实际上我们证明了更强的结论.

定理 1.10 (Poincaré-Birkhoff-Witt) 对于李代数 $\mathfrak{g}$, 若 $\mathfrak{g}$ 有一组赋予了全序的基 X, 则 $U(\mathfrak{g})$ 以

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \{x_1 \otimes \ldots \otimes x_n : \quad x_i \in X, x_1 \leq \ldots \leq x_n\}$$

为一组基.

1.3 表示

定义 1.11 (表示) 对于一个线性空间 V, $\mathrm{Hom}(V, V)$ 可以通过 $[A, B] = A \circ B - B \circ A$ 成为一个李代数, 记为 $\mathfrak{gl}(V)$.

对于李代数 $\mathfrak{g}$, 一个线性空间 V, 称李代数同态 $\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$ 为一个**表示**. 由此诱导了 $\mathfrak{g}$ 在 V 上的作用, 不妨记为 $\cdot$, 即满足

$$\forall x,y\in\mathfrak{g}, v\in V \qquad [x,y]\cdot v = x\cdot(y\cdot x) - y\cdot(x\cdot x)$$

此时称 V 为 **$\mathfrak{g}$-模**. 根据上述泛性质, 等价于 V 是一个 $U(\mathfrak{g})$-模 (注意到 $U(\mathfrak{g})$ 是一个环).

约定 1.12 下面所谈及的表示涉及的线性空间和李代数都是有限维.

定义 1.13 (张量与 Hom) 对于 $\mathfrak{g}$-模 V,W, 则 $V\otimes_k W$ 有自然的 $\mathfrak{g}$-模结构

$$x\cdot(v\otimes w) = (xv)\otimes w + v\otimes(xw)$$

$\mathrm{Hom}_k(V,W)$ 有自然的 $\mathfrak{g}$-模结构

$$x\cdot f\in\mathrm{Hom}(V,W): v\longmapsto x\cdot(fv) - f(x\cdot v)$$

定义 1.14 (导数) 对于一个线性空间 V, 若有双线性映射的运算 $\cdot : V\times V\to V$, 一个线性映射 $D: V\to V$ 被称为一个**导数 (derivation)**, 如果满足

$$\forall x,y\in V \qquad D(x\cdot y) = Dx\cdot y + x\cdot Dy$$

对于李代数 $\mathfrak{g}$ 而言就是

$$\forall x,y\in\mathfrak{g} \qquad D[x,y] = [Dx,y] + [x,Dy]$$

将所有导数收集起来记为 $\mathfrak{Der}(V)$, 实际上这构成 $\mathfrak{gl}(V)$ 一个子代数, 即通过

$$[D_1,D_2] := D_1\circ D_2 - D_2\circ D_1$$

定义 1.15 (伴随表示) 对于李代数 $\mathfrak{g}$, $x\in\mathfrak{g}$, 可以定义 x 的**伴随表示**

$$\mathrm{ad}_x : \mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g} \qquad y\longmapsto[x,y]$$

命题 1.16 对于李代数 $\mathfrak{g}$, 关于伴随表示有如下结果.

(1) $x \in \mathfrak{g}$, ad_x 是导数, 换言之,

$$\mathrm{ad}_x[y,z] = [\mathrm{ad}_x\, y, z] + [y, \mathrm{ad}_x\, z]$$

(2) 如下映射是同态

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{Der}(\mathfrak{g}) \qquad x \longmapsto \mathrm{ad}_x$$

且 $\ker \mathrm{ad}$ 正是 $\mathfrak{g}$ 的中心.

Chapter 2

幂零李代数与可解李代数

2.1 幂零李代数

定义 2.1 (幂零) 一个李代数 $\mathfrak{g}$ 被称为是幂零的, 如果存在理想滤链

$$\ldots \subseteq \mathfrak{a}_n \subseteq \mathfrak{a}_{n-1} \ldots \subseteq \mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{g} \qquad [\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_i] \subseteq \mathfrak{a}_{i+1} \tag{$*$}$$

使得 n 充分大时, $\mathfrak{a}_n = 0$. 注意到 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_i] \subseteq \mathfrak{a}_{i+1} \iff [\mathfrak{g}/\mathfrak{a}_{i+1}, \mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_{i+1}] = 0$, 即每个子商 $\mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_{i+1}$ 包含于 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}_{i+1}$ 的中心.

递归定义 $\mathcal{C}^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}, \mathcal{C}^{n+1}\mathfrak{g} = [\mathcal{C}^n\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, 可得如下降中心列

$$\ldots \subseteq \mathcal{C}^{n+1}\mathfrak{g} \subseteq \mathcal{C}^n\mathfrak{g} \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{C}^1\mathfrak{g} \subseteq \mathcal{C}^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \tag{$**$}$$

若 $\mathfrak{g}$ 幂零, 递归地验证, 对于形如 $(*)$ 的滤链有 $\mathcal{C}^n\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{a}_n$, 令 n 充分大可得 $\mathcal{C}^n\mathfrak{g} = 0$; 反之, 如果对充分大的 n, $\mathcal{C}^n\mathfrak{g} = 0$, 那么 $(**)$ 本身就给出一条理想滤链, 故 $\mathfrak{g}$ 幂零.

递归定义 $\mathcal{Z}_0\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的中心, $\mathcal{Z}_{n+1}\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{g}/\mathcal{Z}_n\mathfrak{g}$ 中心在 $\mathfrak{g}$ 中的原像, 可得如下升中心列

$$0 \subseteq \mathcal{Z}_0\mathfrak{g} \subseteq \mathcal{Z}_1\mathfrak{g} \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{Z}_n\mathfrak{g} \subseteq \mathcal{Z}_{n+1}\mathfrak{g} \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{g} \tag{$***$}$$

若 $\mathfrak{g}$ 幂零, 递归地验证, 对于形如 $(*)$ 的滤链有 $\mathfrak{a}_{n-i} \subseteq \mathcal{Z}_i\mathfrak{g}$, 令 i 充分大得到

$\mathcal{Z}_i\mathfrak{g}=\mathfrak{g}$; 反之, 如果对充分大的 n, $\mathcal{Z}_n\mathfrak{g}=\mathfrak{g}$, 那么 $(***)$ 本身就给出一条满足条件的理想滤链, 故 $\mathfrak{g}$ 幂零.

例 2.2 对于线性空间 V, 如果有一个极大旗

$$\mathcal{F}: 0=V_n\subseteq V_{n-1}\subseteq\ldots\subseteq V_1\subseteq V_0=V \qquad \dim V_i/V_{i+1}=1$$

令 $\mathfrak{nil}^{\mathcal{F}}(V)=\{x\in\mathrm{Hom}(V,V): x(V_i)\subseteq V_{i+1}\}$, 再令

$$\mathfrak{nil}_r(V)=\{x\in\mathfrak{gl}(V): x(V_i)\subseteq V_{i+r+1}\}$$

这样 $\{\mathfrak{nil}_{r+1}(V)\subseteq\mathfrak{nil}_r(V)\}_{r=0}^n$ 就是一个滤链. 从矩阵上看 $\mathfrak{nil}(V)$ 即严格上三角矩阵, $\mathfrak{nil}_r(V)$ 即 "冰线" 向上平移 r 个位置. 这是幂零李代数最典范的例子.

命题 2.3 幂零李代数的子代数和商代数都是幂零的.

引理 2.4 对于幂零李代数 $\mathfrak{g}$, 真子代数 $\mathfrak{h}$, 则 $\mathfrak{h}$ 真包含于其正规化子

$$\{x\in\mathfrak{g}:[x,\mathfrak{h}]=\mathfrak{h}\}$$

故任意一个极大子代数一定是一个理想.

证明 令 $\mathfrak{g}$ 被 $\{\mathfrak{a}_{i+1}\subseteq\mathfrak{a}_i\}_{i=0}^n$ 滤过, 挑选最小的 i 使得 $\mathfrak{a}_{i+1}\subseteq\mathfrak{h}$, 这样 $[\mathfrak{a}_i,\mathfrak{h}]\subseteq[\mathfrak{a}_i,\mathfrak{g}]\subseteq\mathfrak{a}_{i+1}\subseteq\mathfrak{h}$, 故 $\mathfrak{a}_i\subseteq\{x\in\mathfrak{g}:[x,\mathfrak{h}]=\mathfrak{h}\}$. 根据挑选方式知 $\mathfrak{h}$ 真包含于 $\mathfrak{a}_i+\mathfrak{h}$, 从而真包含于 $\{x\in\mathfrak{g}:[x,\mathfrak{h}]=\mathfrak{h}\}$. □

2.2 Engel 定理

定理 2.5 (Engel) 对于一个李代数的表示 $\mathfrak{g}\xrightarrow{\rho}\mathfrak{gl}(V)$, 如果 $\forall x\in\mathfrak{g},\rho(x)$ 作为线性变换是幂零的, 即 $k\gg 0\Rightarrow[\rho(x)]^k=0$, 则存在极大旗 $\mathcal{F}$ 使得 $\rho(\mathfrak{g})\subseteq\mathfrak{nil}^{\mathcal{F}}(V)$, 作为推论 $\rho(\mathfrak{g})$ 是幂零的.

用矩阵的语言说, 即 $\mathfrak{g}$ 的像可以同时相似到上三角形.

证明 先作一些转化.

一些转化. 首先不妨假设 $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$, ρ 就是包含映射. 注意到这个定理是说存在 V 的基 $e_1, \ldots, e_n$ 使得

$$\mathfrak{g}e_i \subseteq \langle e_1, \ldots, e_{i-1} \rangle$$

特别地要求 $\mathfrak{g}e_1 = 0$, 假如对所有满足条件的 $\mathfrak{g}$ 都能找到这样的 e_1, 那么再对 $V / \langle e_1 \rangle$ 继续寻找 e_2 以此类推, 即可得到结论. 于是问题转化到寻找一个一致的 $v \in V \setminus 0$ 使得 $\mathfrak{g}v = 0$.

开始证明. 若 $\dim \mathfrak{g} = 1$, 那么不过是找 $\mathfrak{g}$ 任意非零元素的 0 特征值, 熟知的线性代数结论是幂零矩阵的特征值均为 0. 对于一般情况, 考虑 $\mathfrak{g}$ 的极大真子代数 $\mathfrak{h}$, 根据 (2.4), 这是一个理想. 任意挑选 $x_0 \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$, 显然 $\langle x_0 \rangle$ 是一个交换子代数, 进而 $\mathfrak{h} + \langle x_0 \rangle$ 是一个子代数, 从而被迫必须等于整个 $\mathfrak{g}$, 这样

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{h} = (\mathfrak{h} + \langle x_0 \rangle)/\mathfrak{h} \cong \langle x_0 \rangle / (\mathfrak{h} \cap \langle x_0 \rangle) = \langle x_0 \rangle$$

根据归纳, $W = \{v \in V : \mathfrak{h}v = 0\} \neq 0$, 此时任意 $w \in W$

$$h(x_0 w) = \underbrace{[h, x_0]}_{\in \mathfrak{h}} w + x_0(hw) = 0$$

故 $x_0 W \subseteq W$, 即 W 是 x_0 的不变子空间, 这样只要寻找 x_0 在 W 中属于 0 的特征向量即可. □

推论 2.6 一个李代数 $\mathfrak{g}$ 是幂零的当且仅当 $\mathrm{ad}_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 作为线性映射是幂零的对任何 $x \in \mathfrak{g}$.

证明 注意到如果 $\mathfrak{g}$ 是幂零的, $\mathcal{C}^n\mathfrak{g} = 0$ 对充分大的 n, 而

$$\mathrm{ad}_x^n \underbrace{y}_{\in \mathfrak{g}} = \mathrm{ad}_x^{n-1} \underbrace{[x, y]}_{\in \mathcal{C}^1 \mathfrak{g}} = \ldots = \underbrace{[x, [x, [\ldots [x, y] \ldots]]]}_{\in \mathcal{C}^n \mathfrak{g} = 0}$$

故必要性得证. 反之根据 Engel 定理说明 $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 的像是幂零的, 若记 $\mathfrak{g}$ 中心是 $\mathfrak{z}$, 这就是说 $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ 是幂零的, 无非是升中心列多了一个初项, 从而 $\mathfrak{g}$ 是幂零的. □

2.3 可解李代数

定义 2.7 (可解) 一个李代数 $\mathfrak{g}$ 被称为是可解的，如果存在理想滤链

$$\ldots \subseteq \mathfrak{a}_n \subseteq \mathfrak{a}_{n-1} \ldots \subseteq \mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{g} \qquad [\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_i] \subseteq \mathfrak{a}_{i+1} \tag{$*$}$$

使得 n 充分大时，$\mathfrak{a}_n = 0$. 注意到 $[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_i] \subseteq \mathfrak{a}_{i+1} \iff [\mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_{i+1}, \mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_{i+1}] = 0$, 即每个子商 $\mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_{i+1}$ 都是交换的.

递归定义 $\mathcal{D}^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}, \mathcal{D}^{n+1}\mathfrak{g} = [\mathcal{D}^n\mathfrak{g}, \mathcal{D}^n\mathfrak{g}]$, 可得如下降导出列

$$\ldots \subseteq \mathcal{D}^{n+1}\mathfrak{g} \subseteq \mathcal{D}^n\mathfrak{g} \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{D}^1\mathfrak{g} \subseteq \mathcal{D}^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \tag{$**$}$$

若 $\mathfrak{g}$ 可解，递归地验证，对于形如 $(*)$ 的滤链有 $\mathcal{D}^n\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{a}_n$, 令 n 充分大可得 $\mathcal{D}^n\mathfrak{g} = 0$; 反之，如果对充分大的 n, $\mathcal{D}^n\mathfrak{g} = 0$, 那么 $(**)$ 本身就给出一条满足条件的理想滤链，故 $\mathfrak{g}$ 可解.

很多时候会像导数一样记 $\mathfrak{g}' = \mathcal{D}^1\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'' = \mathcal{D}^2\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(n)} = \mathcal{D}^n\mathfrak{g}$.

例 2.8 对于线性空间 V, 如果有一个极大旗

$$F: 0 = V_n \subseteq V_{n-1} \subseteq \ldots \subseteq V_1 \subseteq V_0 = V \qquad \dim V_i/V_{i+1} = 1$$

令 $\mathfrak{sol}^F(V) = \{x \in \mathrm{Hom}(V,V) : x(V_i) \subseteq V_i\}$, 再令

$$\mathfrak{sol}_r(V) = \{x \in \mathfrak{gl}(V) : x(V_i) \subseteq V_{i+r}\}$$

这样 $\{\mathfrak{sol}_{r+1}(V) \subseteq \mathfrak{sol}_r(V)\}_{r=0}^n$ 就是一个滤链. 从矩阵上看 $\mathfrak{sol}(V)$ 即上三角矩阵，$\mathfrak{sol}_r(V)$ 即 “冰线” 向上平移 r 个位置. 这是可解李代数最典范的例子.

命题 2.9 凡幂零李代数皆可解.

命题 2.10 一个李代数 $\mathfrak{g}$ 和一个理想 $\mathfrak{a}$, 则 $\mathfrak{g}$ 可解当且仅当 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 都可解.

证明 因为 $\mathfrak{g}$ 的子商不过是 $\mathfrak{a}$ 子商和 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 子商之并. □

命题 2.11 一个李代数 $\mathfrak{g}$, 理想 $\mathfrak{a}$, 子代数 $\mathfrak{h}$, 若 $\mathfrak{a}, \mathfrak{h}$ 都可解则 $\mathfrak{a} + \mathfrak{h}$ 可解.

证明 因为 $(\mathfrak{a} + \mathfrak{h})/\mathfrak{a} = \mathfrak{h}/(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a})$ 是可解的. □

2.4 Lie 定理

定理 2.12 (Lie) 假如 k 是特征为 0 的代数闭域. 对于一个李代数的表示 $\mathfrak{g} \xrightarrow{\rho} \mathfrak{gl}(V)$, 如果 $\mathfrak{g}$ 是可解的, 则存在极大旗 $\mathcal{F}$ 使得 $\rho(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{sol}^{\mathcal{F}}(V)$.

证明 先作一些转化.

一些转化. 首先不妨假设 $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$, ρ 就是包含映射. 注意到这个定理是说存在 V 的基 $e_1, \ldots, e_n$ 使得

$$\mathfrak{g}e_i \subseteq \langle e_1, \ldots, e_i \rangle$$

特别地要求 $\mathfrak{g}e_1 \in \langle e_1 \rangle$, 假如对所有满足条件的 $\mathfrak{g}$ 都能找到这样的 e_1, 那么再对 $V/\langle e_1 \rangle$ 继续寻找 e_2 以此类推, 即可得到结论. 于是问题转化到寻找一个一致的 $v \in V \setminus 0$ 使得 $\mathfrak{g}v = \langle v \rangle$, 即找 $\mathfrak{g}$ 公共的特征向量.

开始证明. 若 $\dim \mathfrak{g} = 1$, 那么不过是找 $\mathfrak{g}$ 任意非零元素的 0 特征值. 对于一般情况, 考虑 $\mathfrak{g}' \subsetneq \mathfrak{g}$, 因为 $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ 是交换的, 无非就是线性空间, 可以将 $\mathfrak{g}'$ 扩充为余 1 维, 具体来说, 可以作理想 $\mathfrak{a}$ 和 $x_0 \in \mathfrak{g}$ 满足

$$\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \langle x_0 \rangle$$

这样运用归纳法存在线性函数 $\lambda : \mathfrak{a} \to k$ 使得 $W = \{v \in V : \forall a \in \mathfrak{a}, av = \lambda(a)v\} \neq 0$. 下面的目标是证明 $x_0 W \subseteq W$, 这样 W 就是 x_0 的不变子空间, 只需要在其中找属于 x_0 的特征值即可, 这对代数闭域总是成立的. 这个的证明来自下面的引理. □

引理 2.13 假如 k 特征为 0. 对于李代数 $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$, 理想 $\mathfrak{a}$, 任意线性函数 $\lambda : \mathfrak{a} \to k$, 属于 λ 的特征子空间

$$V_\lambda = \{v \in V : \forall a \in \mathfrak{a}, av = \lambda(a)v\}$$

实际上是 $\mathfrak{g}$ 的不变子空间.

证明 任意选择 $x \in \mathfrak{g}$, 有

$$a(xv) = \underbrace{[a,x]}_{\in\mathfrak{a}} v + x(av) = \lambda([a,x])v + \lambda(a)xv$$

我们的目标就是证明 $\lambda([a,x])v = 0$. 考虑

$$\langle v\rangle \subseteq \langle v, xv\rangle \subseteq \left\langle v, xv, x^2v\right\rangle \subseteq \dots$$

若 m 是第一个使得 $\langle v,\dots,x^{m-1}v\rangle = \langle v,\dots,x^m v\rangle = W$ 的正整数, 则 $v,\dots,x^{m-1}v$ 就是 W 的一组基, 不难归纳 $xW \subseteq W$, 以及 $\mathfrak{a}W_0 \subseteq W_0$, 且任意 $a \in \mathfrak{a}$ 有

$$a(v, xv, \dots, x^{m-1}v) = (v, xv, \dots, x^{m-1}v)\begin{pmatrix} \lambda(a) & * & \dots & * \\ & \lambda(a) & \dots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda(a) \end{pmatrix}$$

这样 $m\lambda(a) = \mathrm{tr}_W(a)$, 而从而

$$m\lambda([a,x]) = \mathrm{tr}_W([a,x]) = \mathrm{tr}_W(ax - xa) = 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda([a,x]) = 0$$

明天得证. □

推论 2.14 假如 k 特征为 0. 对于可解李代数 $\mathfrak{g}$, $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 一定是幂零的.

证明 不妨假设 k 是代数闭域, 因为域扩张不会改变可解性和幂零性, 具体来说 $\mathfrak{g}$ 幂零 (可解) $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{g} \otimes_k \overline{k}$ 幂零 (可解). 选择伴随表示, 根据 Lie 定理, 存在旗 $\mathcal{F}$, 使得 $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{sol}^{\mathcal{F}}(\mathfrak{g})$ 是上三角矩阵, 则 $\mathrm{ad}([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) \subseteq [\mathfrak{sol}^{\mathcal{F}}(\mathfrak{g}), \mathfrak{sol}^{\mathcal{F}}(\mathfrak{g})] \subseteq \mathfrak{nil}^{\mathcal{F}}(\mathfrak{g})$. 再根据 Engel 定理的推论 (2.6) 就得到了 $\mathfrak{g}$ 幂零的事实. □

推论 2.15 假如 k 特征为 0. $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的子代数, 则 $\mathfrak{g}$ 是可解意味着

$$\forall x \in \mathfrak{g}, y \in \mathfrak{g}' \qquad \mathrm{tr}(x \circ y) = 0$$

证明 根据 Lie 定理存在极大旗 $\mathcal{F}$ 使得 $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{sol}^{\mathcal{F}}$, 则 $\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{nil}^{\mathcal{F}}$, 这样用矩阵计算知 $\mathrm{tr}(\mathfrak{g}\mathfrak{g}') = 0$. □

2.5 Cartan 判据

事实 2.16 (Jordan 分解) 对于完美域 k, 线性变换 X, 存在唯一的分解

$$X = D + N \qquad D \text{ 可对角化}, N \text{ 幂零}, DN = ND$$

这里可对角化指的是在 k 的代数闭包中可以对角化. 且 D, N 都是 X 的多项式. 实际上用矩阵的语言说, 对应的矩阵可以同时在 k 的代数闭包中分别相似到对角阵和严格上三角矩阵.

引理 2.17 令 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的子代数, 如果 $x \in \mathfrak{g}$ 对应的 *Jordan* 分解为

$$x = d + n \qquad d \text{ 可对角化}, n \text{ 幂零}, dn = nd$$

若 $d, s \in \mathfrak{g}$, 则 ad_x 的 *Jordan* 分解为

$$\operatorname{ad}_x = \operatorname{ad}_d + \operatorname{ad}_n \qquad \operatorname{ad}_d \text{ 可对角化}, \operatorname{ad}_n \text{ 幂零}, \operatorname{ad}_d \operatorname{ad}_n = \operatorname{ad}_n \operatorname{ad}_d$$

证明 不妨换成矩阵的语言, 此时 $d = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ 是对角矩阵, n 是严格上三角矩阵. 关于 $\operatorname{ad}_x = \operatorname{ad}_d + \operatorname{ad}_n$ 不言自明. 令 e_{ij} 为 (i, j) 位置为 1 的矩阵, 则 $\operatorname{ad}_d e_{ij} = de_{ij} - e_{ij}d = (\lambda_i - \lambda_j)e_{ij}$ 故是 ad_d 可对角化. 假设 $n^k = 0$, 因为左乘 n 和右乘 n 可以交换, 故

$$(\operatorname{ad}_n)^{2k} y = \left(\text{左乘 } n - \text{右乘 } n\right)^{2k} y = \sum_{i+j=2k} (\text{左乘 } n)^i (\text{右乘 } n)^j y = 0$$

再考虑

$$(\operatorname{ad}_d \circ \operatorname{ad}_n)x = [d, [n, x]] = [\underbrace{[d, n]}_{=0}, x] + [n, [d, x]] = [n, [d, x]] = (\operatorname{ad}_n \circ \operatorname{ad}_d)x$$

故交换, 验证完毕. □

定理 2.18 (Cartan) 假如 k 特征为 0. $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的子代数, 若对任何 $x, y \in \mathfrak{g}$ 都有 $\operatorname{tr}_V(x \circ y) = 0$, 则 $\mathfrak{g}$ 可解.

证明 不妨假设是 k 是代数闭域. 我们的目标是证明 $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 是幂零的, 这样 $\mathfrak{g}$ 就自动可解了. 根据 Engel 定理, 只需要证明任意 $x \in \mathfrak{g}'$ 其特征值全为 0 即可. 令 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 是 x 的全体特征值, 根据 Jordan 分解定理, 可以选定一组基, 在这组基下, x 的矩阵

$$X = D + N \qquad D \text{ 是对角矩阵}, N \text{ 是严格上三角矩阵 } N$$

自然 $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. 考虑 $\overline{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. 我们希望证明

$$\operatorname{tr}(\overline{D} \circ X) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i} \lambda_i = 0$$

根据 x 的来源, X 是一些 $[Y, Z]$ 的和, 而

$$\operatorname{tr}(\overline{D} \circ [Y, Z]) = \operatorname{tr}(\overline{D} \circ Y \circ Z - \overline{D} \circ Z \circ Y) = \operatorname{tr}(\overline{D} \circ Y \circ Z - Y \circ \overline{D} \circ Z) = \operatorname{tr}([\overline{D}, Y], Z)$$

根据条件我们希望 $[\overline{D}, Y]$ 对应的线性变换在 $\mathfrak{g}$ 中, 于是根据条件上式为 0. 换言之, 我们希望证明 $\operatorname{ad}(\overline{D})\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g}$. 只要证明 $\operatorname{ad}(\overline{D})$ 是 $\operatorname{ad}(X)$ 的多项式, 根据 Jordan 分解的理论, 只要证明 $\operatorname{ad}(\overline{D})$ 是 $\operatorname{ad}(D)$ 的多项式即可, 因为他们在基 E_{ij} 下是对角阵, 只需要找一个多项式 $f : \lambda_i - \lambda_j \mapsto \overline{\lambda_i - \lambda_j}$, 这利用插值是容易做到的. □

推论 2.19 假如 k 特征为 0. $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的子代数, 有如下几个命题

$$q_0 = \mathfrak{g} \text{ 可解} \qquad p_{ij} = \text{对任意 } x \in \mathfrak{g}^{(i)}, y \in \mathfrak{g}^{(j)} \text{ 有 } \operatorname{tr}(x \circ y) = 0$$

则

$$^{\exists i \geq 0, j \geq 0} p_{ij} \quad \Rightarrow \quad q_0 \quad \Rightarrow \quad ^{\forall i \geq 0, j \geq 1} p_{ij}$$

证明 根据 Cartan 判据 (2.18) 和 (2.15). □

Chapter 3

半单李代数

3.1 半单李代数

定义 3.1 (根基) 对于李代数 $\mathfrak{g}$, 因为两个可解理想的和还是可解的故存在极大的可解理想, 这被称为 $\mathfrak{g}$ 的根基. 等价地, 理想 $\mathfrak{r}$ 是根基当且仅当对理想 $\mathfrak{a}$,

$$\mathfrak{a} \text{ 可解} \iff \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{r}$$

因为可解李代数的子代数还是可解的.

定义 3.2 (半单) 对于李代数 $\mathfrak{g}$, 称之为半单的如果 $\mathfrak{g}$ 的根基为 0. 等价地, $\mathfrak{g}$ 的所有可解理想皆为 0, 等价地, $\mathfrak{g}$ 没有交换的理想.

命题 3.3 对于李代数 $\mathfrak{g}$, 根基 $\mathfrak{r}$, 则 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 是半单的.

3.2 Cartan 判据

定义 3.4 (Killing 形式) 对于李代数 $\mathfrak{g}$, 记

$$\kappa_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow k \qquad (x, y) \longmapsto \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y)$$

这被称为 *Killing* 形式. 显然, $\kappa_{\mathfrak{g}}$ 是一个对称双线性形.

对于 $x, y, z \in \mathfrak{g}$, 有

$$\begin{aligned}\kappa_{\mathfrak{g}}([x,y],z) &= \operatorname{tr}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y \circ \mathrm{ad}_z - \mathrm{ad}_y \circ \mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_z) \\ &= \operatorname{tr}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y \circ \mathrm{ad}_z - \mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_z \circ \mathrm{ad}_y) = \kappa_{\mathfrak{g}}(x,[y,z])\end{aligned}$$

用导数的语言写就是

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_y\, x, z) + \kappa_{\mathfrak{g}}(x, \mathrm{ad}_y\, z) = 0$$

回忆一个双线性型 $B(-,-)$ 被称为非退化的, 如果任意非零的 x, 总存在 y 使得 $B(x,y) \neq 0$. 等价地, 即过渡矩阵可逆. 等价地, 即整个空间的正交补是 0.

定义 3.5 (Cartan) 李代数 $\mathfrak{g}$ 是半单的当且仅当 $\kappa_{\mathfrak{g}}$ 是非退化的.

证明 当 $\mathfrak{g}$ 半单时, $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 是单射, 或用表示论的术语曰 "忠实的". 我们证明 $\mathfrak{g}^{\perp} = 0$. 此时 $\kappa(\mathfrak{g}^{\perp}, \mathfrak{g}^{\perp}) = 0$, 根据 Cartan 判据 (2.18), $\mathfrak{g}$ 的像是可解的, 因为单射所以 $\mathfrak{g}$ 是可解的.

反之若 $\kappa_{\mathfrak{g}}$ 非退化, 任意取交换理想 $\mathfrak{a}$, 对任意 $x \in \mathfrak{g}, a \in \mathfrak{a}$, 考虑如下的映射的复合

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{\mathrm{ad}_x} \mathfrak{g} \xrightarrow{\mathrm{ad}_a} \mathfrak{a} \xrightarrow{\mathrm{ad}_x} \mathfrak{a} \xrightarrow{\mathrm{ad}_a} 0$$

即 $(\mathrm{ad}_a \circ \mathrm{ad}_x)^2 = 0$, 这说明 $\kappa_{\mathfrak{g}}(a,x) = \operatorname{tr}(\mathrm{ad}_a \circ \mathrm{ad}_x) = 0$, 根据 x 的任意性以及 $\kappa_{\mathfrak{g}}$ 非退化, 从而 $a = 0$. □

3.3 半单李代数的分解

引理 3.6 对于李代数 $\mathfrak{g}$, 理想 $\mathfrak{a}$, 则关于 *Killing* 形式的正交补

$$\mathfrak{a}^{\perp} = \{x \in \mathfrak{g} : \forall x \in \mathfrak{a}, \kappa_{\mathfrak{g}}(x,a) = 0\}$$

也是一个理想.

证明 任意的 $g \in \mathfrak{g}, x \in \mathfrak{a}^{\perp}$, 则任意 $a \in \mathfrak{a}$, 有

$$\kappa_{\mathfrak{g}}([g,x],a) = \kappa_{\mathfrak{g}}(g,[x,a]) = 0$$

故 $\mathfrak{a}^{\perp}$ 还是一个理想. □

引理 3.7 对于李代数 $\mathfrak{g}$, 理想 $\mathfrak{a}$, 则 *Killing* 形式有如下简单的关系

$$\forall a, b \in \mathfrak{a} \quad \kappa_{\mathfrak{a}}(a,b) = \kappa_{\mathfrak{g}}(a,b)$$

证明 假设作为线性空间 $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus W$, 则任意 $a \in \mathfrak{a}$, ad_a 写成矩阵形如

$$\mathrm{ad}_a \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} \qquad x \in \mathfrak{a}, w \in W$$

故 $\forall a, b \in \mathfrak{a}$, $\mathrm{ad}_a \circ \mathrm{ad}_b$ 具有相同的形式, 故

$$\kappa_{\mathfrak{a}}(a,b) = \mathrm{tr}_{\mathfrak{a}}(\mathrm{ad}_a \circ \mathrm{ad}_b) = \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_a \circ \mathrm{ad}_b) = \kappa_{\mathfrak{g}}(a,b)$$

命题得证. □

例 3.8 假设 k 特征为 0. 对 $n \geq 2$ 维线性空间 V, 考虑

$$\mathfrak{sl}(V) = \{x \in \mathfrak{gl}(V) : \mathrm{tr}\, x = 0\}$$

显然, $\mathfrak{sl}(V)$ 是一个理想, 想要计算 *Killing* 形式只需要在 $\mathfrak{gl}(V)$ 上计算. 注意到

$$\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y : T \mapsto XYT - XTY - YTX + TYX$$

下面要计算每一部分的迹

- 需要注意, $T \mapsto TA$ 这一 $\mathfrak{gl}(V)$ 中的线性变换迹就是 $n\,\mathrm{tr}\,A$, 因为 $\mathfrak{gl}(V)$ 不过是 n 列列向量而已. 故

$$\mathrm{tr}[T \mapsto XYT] = n\,\mathrm{tr}(XY) \qquad \mathrm{tr}[T \mapsto TYX] = n\,\mathrm{tr}(YX) = n\,\mathrm{tr}(XY)$$

- 对于 $T \mapsto ATB$ 这一 $\mathfrak{gl}(V)$ 中的线性变换可以通过标准基 E_{ij} 计算, 可以计算出 $\mathrm{tr}[T \mapsto ATB] = \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B)$

$$\mathrm{tr}[T \mapsto XTY] = \mathrm{tr}(X)\,\mathrm{tr}(Y) = 0 \qquad \mathrm{tr}[T \mapsto YTX] = \mathrm{tr}(X)\,\mathrm{tr}(Y) = 0$$

故 $\kappa(X,Y) = 2n\,\mathrm{tr}(XY)$. 此时再考虑 $\mathfrak{sl}(V)$ 的一组基, 他们是

$$E_{ij} \quad i \neq j \qquad X_i = E_{ii} - E_{i+1,i+1} \quad i = 1, \ldots, n-1$$

注意到任意

$$\kappa(E_{ij},E_{ji}) = 2n\,\mathrm{tr}(E_{ij}E_{ji}) = 2n \qquad \kappa(X_i,X_i) = 2n[\mathrm{tr}(X_iX_i)] = 4n$$

从而非退化, 这意味着 $\mathfrak{sl}(V)$ 是半单的. 这是最典型的半单李代数.

推论 3.9 对于李代数 $\mathfrak{g}$, 若有半单理想 $\mathfrak{a}$, 则 $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{a}^{\perp}$.

证明 首先 $\mathfrak{a}^{\perp}$ 是一个理想. 可以断言 $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp} = 0$, 任意取 $x \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp}, y \in \mathfrak{a}$, 则 $\kappa_{\mathfrak{a}}(x,y) = \kappa_{\mathfrak{g}}(x,y) = 0$, 因为 $\kappa_{\mathfrak{a}}$ 是非退化的, 故 $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp} = 0$. 然后计算维数得到 $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \mathfrak{a}^{\perp}$. □

推论 3.10 对于半单李代数 $\mathfrak{g}$, $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{Der}(\mathfrak{g})$ 是同构.

证明 不难验证 $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{Der}(\mathfrak{g})$ 的理想, 从而 $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \times \mathrm{ad}(\mathfrak{g})^{\perp}$. 任意 $D \in \mathrm{ad}(\mathfrak{g})^{\perp}, x \in \mathfrak{g}$, 则

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_{Dx}\, y &= [Dx,y] = D[x,y] - [x,Dy] \\ &= (D \cdot \mathrm{ad}_x - \mathrm{ad}_x \circ D)y \\ &= [D, \mathrm{ad}_x]y \end{aligned}$$

而 $[D,\mathrm{ad}_x] \subseteq [\mathrm{ad}(\mathfrak{g})^{\perp}, \mathrm{ad}(\mathfrak{g})] \subseteq \mathrm{ad}(\mathfrak{g})^{\perp} \cap \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) = 0$, 故 $\mathrm{ad}_{Dx} = 0$. 因为 ad 是单射, 从而 $D = 0$, 命题得证. □

定义 3.11 一个李代数 $\mathfrak{s}$ 被称为是**单的**, 如果 $\mathfrak{s}$ 不是交换的, 且没有 0 和 $\mathfrak{s}$ 以外的理想.

定理 3.12 一个半单李代数是单李代数的直积.

推论 3.13 对于半单李代数 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.

证明 因为对于单李代数这一结论正确. □

3.4 半单李代数的表示

定义 3.14 对于李代数 $\mathfrak{g}$, 一个 $\mathfrak{g}$-模 V, 称之为**单的**, 如果其子模只有 0 和 V; 称之为**半单的**, 如果是一些单模的直和.

事实 3.15 一般地, 对于环 R, R-模 M 是**单的**如果子模只有 0 和 M; 称之为**半单的**如果是一些单模的直和. 在选择公理下, 等价地, M 是半单的当且仅当 M 是单模的和, 等价地, 如果每一个 M 的子模都是 M 的直和项.

定义 3.16 (Casimir 元) 令 $\mathfrak{g}$ 是一个 n 维半单李代数, 令 $e_1,\ldots,e_n$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一组基, 其关于 *Killing* 形式的对偶基 $e_1',\ldots,e_n'$, 定义

$$c=\sum_{i=1}^{n} e_i\otimes e_i' \in U(\mathfrak{g})$$

为 $\mathfrak{g}$ 的 **Casimir 元**.

一般地, 对于表示 $\mathfrak{g}\xrightarrow{\rho}\mathfrak{gl}(V)$,

$$\beta_V:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\longrightarrow k \qquad (x,y)\longmapsto \operatorname{tr}(\rho(x)\circ\rho(y))$$

类似 *(3.5)* 首段的论证也是非退化的, 令 $e_1,\ldots,e_n$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一组基, 其关于 β_V 的对偶基 $e_1',\ldots,e_n'$,

$$c_V=\sum_{i=1}^{n} e_i\otimes e_i' \in U(\mathfrak{g})$$

为表示 $\mathfrak{g}\xrightarrow{\rho}\mathfrak{gl}(V)$ 的 **Casimir 元**.

显然 $\mathfrak{g}$ 的 *Casimir* 元就是伴随表示的 *Casimir* 元.

命题 3.17 令 $\mathfrak{g}$ 是一个 n 维半单李代数, 表示 $\mathfrak{g}\xrightarrow{\rho}\mathfrak{gl}(V)$, 关于 *Casimir* 元 c_V 有

- *Casimir* 元与基的选取无关.
- *Casimir* 元与 $U(\mathfrak{g})$ 中的其他元素交换.
- $\rho(c_V)$ 是一个 $\mathfrak{g}$-模同态.
- $\operatorname{tr}_V(\rho(c_V))=\dim\mathfrak{g}$.

证明 第一点是因为

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) & \cong & \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}^\vee & \overset{\beta}{\cong} & \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g} & \subseteq & T(\mathfrak{g}) & \to & U(\mathfrak{g}) \\ \mathrm{id} & \mapsto & \sum e_i\otimes e_i & \mapsto & \sum e_i\otimes e_i' & \mapsto & \sum e_i\otimes e_i' & \mapsto & \sum e_i\otimes e_i' \end{array}$$

第二点是因为

$$\begin{aligned} c\otimes x - x\otimes c &= \sum(e_i\otimes e_i'\otimes x - x\otimes e_i\otimes e_i') \\ &= \sum(e_i\otimes e_i'\otimes x - e_i\otimes x\otimes e_i' + e_i\otimes x\otimes e_i' - x\otimes e_i\otimes e_i') \\ &= \sum e_i\otimes[e_i',x] - \sum[x,e_i]\otimes e_i' \end{aligned}$$

因为

$$\begin{array}{ccc} \sum e_i\otimes[e_i',x] \text{ 中} & = \beta_V([e_i',x],e_j) = \beta_V(e_i',[x,e_j]) = & \sum[x,e_i]\otimes e_i' \text{ 中} \\ e_i\otimes e_j' \text{ 的系数} & & e_i\otimes e_j' \text{ 的系数} \end{array}$$

故上式为 0.

第三点是因为交换. 第四点是因为

$$\mathrm{tr}(\rho(c_V)) = \sum_{i=1}^n \mathrm{tr}(e_i\circ e_i') = \sum_{i=1}^n \beta_V(e_i,e_i') = n$$

命题得证. □

定理 3.18 (Weyl) *假设 k 特征为 0. 对于半单李代数 $\mathfrak{g}$, 所有有限维 $\mathfrak{g}$-模都是半单的.*

证明 同样, 首先可以假设 k 是代数闭域. 证明分几步. 令 V 是一个 $\mathfrak{g}$-模. 我们证明任意子模 W 都在 V 中有补.

假设 $\dim V = 1$. 假设 $\mathfrak{g}\xrightarrow{\rho}\mathfrak{gl}(V)$, 此时

$$\mathrm{tr}_V([\rho(x),\rho(y)]) = \mathrm{tr}_V(\rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x)) = 0$$

对 1 维空间的线性变换, 迹为 0 就意味着本身为 0, 因为 $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, 故表示是平凡的.

当 $\dim V/W = 1$. 不妨假设 W 是单的, 如果不是单的可以同时商去 W 的一个子模 W' 使得 W/W' 是单的. 此时 V/W 是一维的, 根据上面的讨论, 表示是平凡的. 令 c_V 是 V 对应的 Casimir 元, 因为在 V/W 上作用为平凡, 故 $\rho(c_V)W \subseteq W$, 根据 Schur 引理, c_V 在 W 的作用是数乘 a, 这个 $a \neq 0$, 否则计算迹与 $\dim(\rho(c_V)) = \dim \mathfrak{g}$ 矛盾. 这样 $\ker \rho(c_V)$ 就是满足条件 W 的补.

当 $\dim V/W \geq 2$. 回忆 (1.13) 定义的 $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ 所具有的自然的 $\mathfrak{g}$-模结构, 令

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \{f \in \mathrm{Hom}_k(V, W) : \exists a \in k, f|_W = a\,\mathrm{id}_W\} \\
&\supseteq \{f \in \mathrm{Hom}_k(V, W) : f|_W = 0\} \qquad\qquad = W_1
\end{aligned}
$$

此时 $\dim W_1/V_1 = 1$, 此时有补, 设为 $\langle f \rangle$, 因为 $\mathfrak{g}$ 在 $\langle f \rangle$ 上作用是平凡的, 故

$$
\forall x \in \mathfrak{g}, v \in V, \quad 0 = (xf)(v) = x \cdot f(v) - f(x \cdot v)
$$

这说明 f 是一个 $\mathfrak{g} : V \to W$ 的同态, 且 f 在 W 上的作用是数乘, 那么 $\ker f$ 就是满足条件 W 的补. □

实际上, 上述结论可以更加抽象地说用同调的语言来说, 对于半单李代数 $\mathfrak{g}$, 任意有限维 $\mathfrak{g}$-模 A, $H^1(\mathfrak{g}, A) = 0$. 这是由 Whitehead 证明的.

命题 3.19 *对于 $\mathfrak{gl}(V)$ 中的半单李代数 $\mathfrak{g}$, 任意 $x \in \mathfrak{g}$, 假设 x 的 Jordan 分解是 $x = d + n$, 则 $d, n \in \mathfrak{g}$.*

证明 对于所有 V 的 $\mathfrak{g}$ 子模 W 定义

$$
\mathfrak{sl}_W = \{X \in \mathfrak{gl}(V) : X(W) \subseteq W, \mathrm{tr}(X|_W) = 0\}
$$

显然, 因为 $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, 故 $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{sl}_W$. 显然 $\mathfrak{sl}_W$ 满足对 Jordan 分解封闭的条件. 再考虑

$$
\mathfrak{n} = \{X \in \mathfrak{gl}(V) : [X, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}\}
$$

显然, $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{n}$. 因为 $\mathrm{ad}_x \mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g}$, 因为 $\mathrm{ad}_x = \mathrm{ad}_n + \mathrm{ad}_s$ 是 Jordan 分解, 故 $\mathrm{ad}_n, \mathrm{ad}_s$ 都是 ad_x 的多项式, 从而 $\mathrm{ad}_n \mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g}, \mathrm{ad}_s \mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g}$, 故 $\mathfrak{n}$ 也对 Jordan 分解封闭. 我们断言

$$
\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \cap \bigcap_{W \subseteq_{\mathfrak{g}} V} \mathfrak{sl}_W
$$

否则, 记右边为 $\mathfrak{g}^*$ 可以写成 $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^\perp$. 任意 $Y \in \mathfrak{g}^\perp$, 在每个 V 的不可约子模 W 上, 因为 $[Y, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}^\perp \cap \mathfrak{g} = 0$, 故 Y 和 $\mathfrak{g}$ 的作用交换从而是一个 $\mathfrak{g}$-模同态, 但是 Schur 引理说明 Y 必须是数乘, 但是 $\mathrm{tr}(Y|_W) = 0$, 这就说明 $Y|_W = 0$. 而 V 可以写成一些不可约子模的直和, 这说明 $Y = 0$, 证明结束. □

定义 3.20 (抽象 Jordan 分解) 对于半单李代数 $\mathfrak{g}$, $x \in \mathfrak{g}$, 称 x 是**半单的**, 如果 ad_x 可以在 $\overline{k}$ 上对角化, 称 x 是**幂零的**, 如果 ad_x 是幂零的. 考虑正则表示 $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 将 $\mathfrak{g}$ 嵌入, 根据上面的结论, 任意 $x \in \mathfrak{g}$, 唯一的存在 $d, n \in \mathfrak{g}$ 使得

$$x = d + n \qquad d \text{ 半单}, n \text{ 幂零}$$

这被称为抽象 *Jordan* 分解.

Chapter 4

复半单李代数

下面均假设 k 是代数闭域.

4.1 $\mathfrak{sl}_2$ 的表示

定义 4.1 记

$$\mathfrak{sl}_2 = \{X \in \mathbb{M}_2(k) : \operatorname{tr} X = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a + d = 0 \right\}$$

如下元素是一组基

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

他们满足

$$[H, X] = 2X \qquad [H, Y] = -2Y \qquad [X, Y] = H$$

对于表示 $\mathfrak{sl}_2 \xrightarrow{\rho} \mathfrak{gl}(V)$, 一个重要的关切就是 $\rho(H)$ 的特征向量, 假如 $H \cdot v = \lambda v$, 那么

$$\begin{aligned} H \cdot (X \cdot v) &= [H, X] \cdot v + X \cdot (H \cdot v) = 2X \cdot v + \lambda X \cdot v = (\lambda + 2) X \cdot v \\ H \cdot (Y \cdot v) &= [H, Y] \cdot v + Y \cdot (H \cdot v) = -2Y \cdot v + \lambda Y \cdot v = (\lambda - 2) Y \cdot v \end{aligned}$$

这就意味着对于特征向量 v 而言, $X\cdot v$ 和 $Y\cdot v$ 要么为 0 要么还是特征向量, 且特征值对应地增加和减少 2. 这使我们作如下的定义.

定义 4.2 (权) 对于表示 $\mathfrak{sl}_2 \xrightarrow{\rho} \mathfrak{gl}(V)$, 称 $m\in k$ 是一个**权**如果 m 是 $\rho(H)$ 的特征值, 属于该特征值的特征向量被称为**权向量**, 对应的特征子空间被称为**权空间**, 特征子空间的维数被称为**权重数**.

定理 4.3 ($\mathfrak{sl}_2$ 的表示) 任意表示 $\mathfrak{sl}_2 \xrightarrow{\rho} \mathfrak{gl}(V)$, 若 V 是单的 (用表示论的术语, 不可约的), $\dim V = n+1$, 则

- 权非空且有限.
- 所有权都是整数且形如 $\{-n,-n+2,\ldots,n-2,n\}$.
- 每个权的重数为 1.
- 综上所述, 整个 V 是权空间的直和, 每个权的权向量构成一组基.

除此之外, 任意 n 都存在同构意义下唯一的单模 V 使得满足如上条件. 权最大的权向量被称为**最高权向量**, 换言之, 最高权向量决定了表示.

证明 权非空是因为假设了 k 是代数闭域, 有限是因为假设了 V 是有限维. 任意挑选权 λ, 对应的权向量 v, 那么

$$H\cdot(X^k\cdot v) = (\lambda+2k)X^k\cdot v$$

因为特征值是有限的, 故存在 N 使得

$$X^N\cdot v\neq 0 \qquad X^{N+1}\cdot v = 0$$

用 $X^N\cdot v$ 代替 v, $\lambda+2N$ 代替 λ, 这样 N 可以取 0, 这就是我们期望找的 "最高权向量". 再令

$$v_k = Y^k\cdot v \qquad k=0,1,\ldots \qquad H\cdot v_k = (\lambda-2k)v_k$$

同样的道理, 可以选择 m 使得 $v_m \neq 0, v_{m+1} = 0$, 这样得到的 $\{v_0, \dots, v_m\}$ 还是线性无关的. 再考虑

$$\begin{aligned}
X \cdot v_{k+1} &= X \cdot (Y \cdot v_k) = [X, Y] \cdot v_k + Y \cdot (X \cdot v_k) \\
&= H \cdot v_k + Y \cdot (X \cdot (Y \cdot v_{k-1})) \\
&= (\lambda - 2k) v_k + Y((\lambda - 2(k-1)) v_{k-1}) + Y^2 \cdot (X \cdot v_{k-2}) \\
&= \dots = \textstyle\sum_{\ell=0}^{m} (\lambda - 2(k-\ell)) v_k \\
&= [(k+1)\lambda - k(k+1)] v_k = (k+1)(\lambda - k) v_k
\end{aligned}$$

这说明

- $(k+1)(\lambda - k) v_k = X \cdot v_{k+1} = 0$, 故 $\lambda = m$.
- 任意 $1 \leq k \leq m$, $X \cdot v_k, Y \cdot v_k, H \cdot v_k \in \operatorname{span}\{v_0, \dots, v_m\}$, 故 $\{v_0, \dots, v_m\}$ 张成的空间是一个子模, 因为不可约, 所以他们就是 V 本身, 换言之 $m + 1 = n + 1$.
- 他们对应的权是 $\{-n, -n+2, \dots, n-2, n\}$.

这样对 V 的刻画就完成了. 存在性和唯一性来自上面的过程, 任意 $n+1$ 维的单模都同构于以 $\{v_0, \dots, v_n\}$ 为基的线性空间, 且作用为

$$X \cdot v_{k+1} = (k+1)(\lambda - k) v_k \qquad Y \cdot v_k = v_{k+1} \qquad H \cdot v_k = (n - 2k) v_k$$

在边界上 $X \cdot v_n = Y \cdot v_0 = 0$. 这样就完成了证明. □

从上面的过程中, 实际上我们还证明了如下的命题.

命题 4.4 任意表示 $\mathfrak{sl}_2 \xrightarrow{\rho} \mathfrak{gl}(V)$, 当中权最大的向量生成的子模是单的.

例 4.5 下面来计算伴随表示 $\mathrm{ad}: \mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{sl}_2)$ 的分解.

解 因为

$$[H, X] = 2X \qquad [H, Y] = -2Y \qquad [H, H] = 0$$

说明这个表示的权就是 $\{-2, 0, 2\}$, 唯一的可能是这是一个不可约表示. □

定义 4.6 定义 $\mathfrak{sl}_2$ 的根是伴随表示的权, 根据上面的讨论根是 $\{-2, 0, 2\}$, 对应的根向量是 Y, H, X.

例 4.7 令 V_n 为维数为 $n+1$ 的 $\mathfrak{sl}_2$ 的不可约表示, 求 $V_2\otimes V_3$ 的分解.

解　考虑 V_2 和 V_3 的权向量

$$\{v_{-2},v_0,v_2\}\qquad \{w_{-3},w_{-1},w_1,w_3\}$$

那么, 根据 (1.13)

$$H\cdot v_k\otimes w_h=(H\cdot v_k)\otimes w_h+v_k\otimes(H\cdot w_h)=(k+h)(v_k\otimes w_k)$$

故 $V_2\otimes V_3$ 的权是多重集 $\{-5,-3,-3,-1,-1,-1,1,1,1,3,3,5\}$, 故同构于 $V_5\oplus V_3\oplus V_1$. □

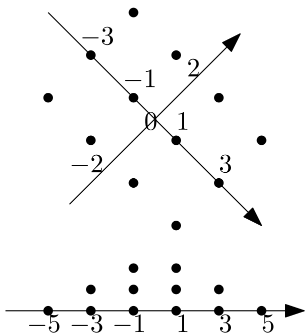

Figure 4.1: $V_2\otimes V_3$

4.2 $\mathfrak{sl}_n$ 的表示

受 $\mathfrak{sl}_2$ 的表示的启发, 我们定义如下的概念.

定义 4.8 令 $n\geq 2$, 定义

$$\mathfrak{sl}_n=\{X\in\mathbb{M}_n(k):\operatorname{tr}X=0\}$$

我们已经知道其是半单的了. 再定义如下记号

- $\mathfrak{h}=\{\operatorname{diag}(x_1,\ldots,x_n):x_1+\ldots+x_n=0\}$, 这是交换的.

- $\mathfrak{n}_+ = \{X \in \mathfrak{sl}_n : X \text{ 严格上三角}\}$, 这是幂零的.
- $\mathfrak{n}_- = \{X \in \mathfrak{sl}_n : X \text{ 严格下三角}\}$, 这是幂零的.
- $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} + \mathfrak{n}_+$, 这是可解的.

则作为线性空间 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$.

记号 4.9 令 $\mathfrak{h}^\vee$ 为 $\mathfrak{h}$ 的对偶空间. 方便起见, 对于 (i,j), $i \neq j$, 定义

- $\lambda_{ij} \in \mathfrak{h}^\vee$ 满足 $\mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_i - x_j$.
- $X_{ij} \in \mathfrak{n}_- + \mathfrak{n}_+$ 为在 (i,j) 位置为 1 其他位置为 0 的矩阵.
- $H_{ij} \in \mathfrak{h}$ 为在 (i,i) 位置为 1, (j,j) 位置为 -1, 其他位置为 0 的矩阵.

这样, $\{X_{ij}\}_{i<j}$ 是 $\mathfrak{n}_+$ 的基, $\{H_{ij}\}_{i<j}$ 是 $\mathfrak{h}$ 的基.

注意到任意一个 $\lambda \in \mathfrak{h}^\vee$ 作用在 $H = \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_n)$ 都可以表示成

$$\lambda(H) = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$$

因为 $x_1 + \ldots + x_n = 0$, 故在 λ_i 相差一个同一个常数下是唯一的.

命题 4.10 关于上述基本元素有如下事实,

- $\forall H \in \mathfrak{h}$, $[H, X_{ij}] = \lambda_{ij}(H) X_{ij}$.
- $\lambda_{ij} = -\lambda_{ji}$
- $[X_{ij}, X_{ji}] = H_{ij}$.

定义 4.11 (权, 根) 对于表示 $\mathfrak{sl}_n \xrightarrow{\rho} \mathfrak{gl}(V)$, 对于 $\lambda \in \mathfrak{h}^\vee$, 定义

$$V_\lambda = \{v \in V : \forall H \in \mathfrak{h}, H \cdot v = \lambda(H) v\}$$

称之为 λ 的特征子空间. 当 $V_\lambda \neq 0$ 时, 称 $\lambda \in \mathfrak{h}^\vee$ 是一个权, 这样非零的 v 都被称为权向量, V_λ 被称为权空间, 其维数被称为权重数. $\mathfrak{sl}_n$ 的根是伴随表示的权. 上面的论证表明 λ_{ij} 是 $\mathfrak{sl}_n$ 的所有根.

命题 4.12 对于表示 $\mathfrak{sl}_n \xrightarrow{\rho} \mathfrak{gl}(V)$, 如果 $v \in V_\lambda$, 则 $X_{ij} \cdot v \in V_{\lambda+\lambda_{ij}}$

证明 因为

$$\begin{aligned} H \cdot (X_{ij} v) &= [H, X_{ij}] \cdot v + X_{ij} \cdot (H \cdot v) \\ &= \lambda_{ij}(H) X_{ij} \cdot v + \lambda(H) X_{ij} \cdot v \\ &= (\lambda + \lambda_{ij})(H) X_{ij} \cdot v \end{aligned}$$

命题得证. □

命题 4.13 对于表示 $\mathfrak{sl}_n \xrightarrow{\rho} \mathfrak{gl}(V)$, $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^\vee} V_\lambda$.

证明 右边是直和且构成子模容易. 可以断言右边是全部的 V, 右边在 V 中有非 0 补, 熟知线性代数的结论, 有限个交换的矩阵有公共的特征向量. □

定义 4.14 (本原) 对于表示 $\mathfrak{sl}_n \xrightarrow{\rho} \mathfrak{gl}(V)$, 称非零向量 $v \in V$ 是**本原的**, 如果 v 是权向量, 且任意 $i < j$, $X_{ij} \cdot v = 0$.

命题 4.15 任何表示 $\mathfrak{sl}_n \xrightarrow{\rho} \mathfrak{gl}(V)$ 都有本原向量.

证明 类似 $\mathfrak{sl}_2$ 的论证, 必定存在一个权 λ 使得对任意 $i < j$, $V_{\lambda+\lambda_{ij}} = 0$, 为此只需要找一个恰当的 $\mathfrak{h}^\vee$ 上的线性函数 f 使得任意 i, j, $f(\lambda_{ij}) > 0$, 例如

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) + C \longmapsto (n-1)\lambda_1 + \ldots + 1\lambda_{n-1} - \frac{n(n-1)}{2}\lambda_n$$

然后根据权是有限的事实即可找到. □

定理 4.16 ($\mathfrak{sl}_n$ 的表示) 任意表示 $\mathfrak{sl}_n \xrightarrow{\rho} \mathfrak{gl}(V)$, 若 V 是单的, 则

- 在非零数乘意义下, 存在唯一的本原向量 v. 这被称为**最高权向量**, 对应的权被称为**最高权**, 设为 χ. 假设对于 $H = \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_n)$ 最高权

  $$\chi(H) = \chi_1 x_1 + \ldots + \chi_n x_n$$

  则 $\chi_i - \chi_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 其中 $i < j$.

- 权非空且有限.

- 所有权都形如 $\chi - \sum_{i<j} m_{ij}\lambda_{ij}$, 其中 $m_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

除此之外, 满足条件的**最高权**反过来决定了同构意义下唯一的一个不可约表示.

证明 权非空有限是显然的. 根据 (1.9) 对 $U(\mathfrak{g})$ 的刻画, $\mathfrak{g}$ 的作用总可以假设先作用 $\mathfrak{b}$ 再作用 $\mathfrak{n}_-$. 这一点也不难通过归纳得到. 从而选取本原向量 v, 其生成的子模就是 $\mathfrak{n}_- \cdot v$, 再根据 (1.9), 实际上就是一些 X_{ij} 依次作用在 v 上, 其中 $i > j$, 根据 (4.10) 的计算, 所有权的形式得证, 这还证明了只有一个本原向量. 为了看到最高权向量的形式, 只需要注意 $\mathrm{span}\{X_{ji}, H_{ij}, X_{ij}\} \cong \mathfrak{sl}_2$, 将之视为 $\mathfrak{sl}_2$ 模, 从而根据 (4.3) 即得. 实际上, 我们证明了任何一个表示的本原权生成的子模是单模 (4.17).

下面问题放在存在性和唯一性上.

唯一性. 令 V_1, V_2 是两个有相同最高权的 $\mathfrak{g}$ 单模, 对应的最高权向量分别是 v_1, v_2, 考虑 $V_1 \oplus V_2$, 则 (v_1, v_2) 也是一个最高权, (v_1, v_2) 生成的子模 V_3 根据上面的论证也是单的, 但是对角线确保了 $V_1 \cong V_3 \cong V_2$.

存在性. 上述过程即 χ 的系数单调递减, 换句话说即 χ 是

$$\pi_i : \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_1 + \ldots + x_i$$

的非负整数系数组合. 只需要给每个 π_i 找到具有最高权 π_i 不可约表示 V_i 即可, 这样 $\chi = \sum_{i=1}^{n-1} m_j\lambda_i$ 就是 $\bigotimes_{i=1}^{n-1} m_i V_i$ 的一个本原权 (参见 (1.13)). 考虑表示 $\mathfrak{sl}_n \subseteq \mathfrak{gl}(\bigwedge^i k^n)$, 令 $e_1, \ldots, e_n$ 为标准基, 则 $e_1 \wedge \ldots \wedge e_i$ 是 $\bigwedge^i k^n$ 具有本原权 π_i 的本原向量 (通过多次作用 X_{ij} 替换 e_j 到 e_i, 实际上 $\bigwedge^i k^n$ 本身就是不可约的). □

从上面的过程中, 实际上我们还证明了如下的命题.

命题 4.17 任意表示 $\mathfrak{sl}_n \xrightarrow{\rho} \mathfrak{gl}(V)$, 当中本原向量生成的子模是单的.

4.3 Cartan 子代数

定义 4.18 (Cartan 子代数) 对于李代数 $\mathfrak{g}$, 子代数 $\mathfrak{h}$ 被称为 **Cartan 子代数** 如果 $\mathfrak{h}$ 是幂零的, 且 $\mathfrak{h}$ 是自己的正规化子, 既

$$\mathfrak{h} = \{x \in \mathfrak{g} : [x, \mathfrak{h}] = \mathfrak{h}\}$$

记号 4.19 令 $\mathfrak{g}$ 是一个李代数, 对于 $x \in \mathfrak{g}$ 考虑 ad_x 的特征多项式

$$P_x(T) = \det(T - \mathrm{ad}_x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x) T^i$$

令 $x_1, \ldots, x_n$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一组基, 那么 $a_i(x)$ 可以看成是关于 $x_1, \ldots, x_n$ 的 $n-i$ 此齐次多项式. **我们在本章固定 a_i 的这一记号.**

定义 4.20 (正则元) 选取最小的 ℓ 使得 $a_\ell \neq 0$, 就称一个李代数 $\mathfrak{g}$ 的**秩**为 ℓ. 换言之, T^ℓ 恰好整除 $P_x(T)$. 再换言之, $P_x(T)$ 可以写成 $P_x(T) = T^\ell \sum_{i=\ell}^{n} a_i(x) T^{i-\ell}$. 更换言之, ad_x 的 0 特征值的重数至少为 ℓ. 一个元素 $x \in \mathfrak{g}$ 被称为**正则元**如果 $a_\ell(x) \neq 0$.

命题 4.21 对于复李代数 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$ 的正则元在 $\mathfrak{g}$ 中是连通稠密的开集.

证明 令非正则元为 V, 他是非零多项式 $a_\ell(x)$ 的零点, 故 V 是闭集, 且没有内部. 如果 x, y 都是正则元, 考虑过他们的复平面 D, 此时 D 上只有 $a_\ell(x)$ 有限个零点, 对于复平面来说, 删去有限个点是不影响连通性的. □

定义 4.22 令 $\mathfrak{g}$ 是一个李代数, 对于 $x \in \mathfrak{g}$, $\lambda \in k$, 考虑 ad_x 属于 λ 的根子空间

$$\mathfrak{g}_x^\lambda = \{y \in \mathfrak{g} : \exists m > 0, (\mathrm{ad}_x - \lambda)^m y = 0\}$$

注意到 $\dim \mathfrak{g}_x^\lambda =$ 最小的 i 使得 $a_i(x) \neq 0$.

命题 4.23 对于复李代数 $\mathfrak{g}$, $x \in \mathfrak{g}$, 关于根子空间有

- $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} \mathfrak{g}_x^\lambda$.
- $[\mathfrak{g}_x^\lambda, \mathfrak{g}_x^\mu] \subseteq \mathfrak{g}_x^{\lambda+\mu}$.

- $\mathfrak{g}_x^0$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数.

证明 第一点就是线性代数. 第二点需要注意到

$$\begin{aligned}(\mathrm{ad}_x - \lambda - \mu)^n[y,z] &= (\mathrm{ad}_x - \lambda - \mu)^{n-1}\big[[(\mathrm{ad}_x y, z] + [y, \mathrm{ad}_x z] - [\lambda y, z] - [y, \mu z]\big] \\ &= (\mathrm{ad}_x - \lambda - \mu)^{n-1}\big[[(\mathrm{ad}_x - \lambda)y, z] + [y, (\mathrm{ad}_x - \mu)z]\big] \\ &= \ldots = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} [(\mathrm{ad}_x - \lambda)^i y, (\mathrm{ad}_x - \mu)^{n-i} z]\end{aligned}$$

第三点根据第二点是显然的. □

定理 4.24 *对于复李代数 $\mathfrak{g}$, 正则元 $x \in \mathfrak{g}$, 则 $\mathfrak{g}_x^0$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数.*

证明 先证明 $\mathfrak{g}_x^0$ 幂零, 根据 Engel 定理的推论 (2.6), 我们证明任意 $y \in \mathfrak{g}_x^0$, ad_y 在 $\mathfrak{g}_x^0$ 上是幂零的. 否则, 会有 ad_y 在 $\mathfrak{g}_x^0$ 上 0 的特征值的重数严格小于 $\dim \mathfrak{g}_x^0$, 假如 ad_y 在 $\mathfrak{g}_x^0$ 的补上是可逆的, 那么就产生了矛盾. 为了找到这样的 y 导出矛盾, 选择 g_x^0 的补空间 L 考虑

$$U = \{y \in \mathfrak{g}_x^0 : \mathrm{ad}_y|_{\mathfrak{g}_x^0}\text{不是幂零的}\} \qquad V = \{y \in \mathfrak{g}_x^0 : \mathrm{ad}_y|_L\text{是可逆的}\}$$

他们都是多项式的零点的补集, 如果非空必然有交, 这样就找了这样的 y.

再证明 $\mathfrak{g}_x^0$ 是自己的正规化子, 如果 $[z, \mathfrak{g}_x^0] \subseteq \mathfrak{g}_x^0$, 因为 $x \in \mathfrak{g}_x^0$, 再根据定义对充分大的 m 有 $\mathrm{ad}_x^m[z,x] = 0$, 即 $\mathrm{ad}_x^{m+1} z = 0$, 故 $z \in \mathfrak{g}_x^0$. 得证. □

实际上, 所有 Cartan 子代数都具有这一形式, 参见 Serre 的 *Complex Semisimple Lie Algebras* P32 §III.4 或 Fulton 与 Harris 的 *Representation Theory* P491 §D.3.

定理 4.25 *对于复半单李代数 $\mathfrak{g}$, 正则元 $x \in \mathfrak{g}$, 则 Cartan 子代数 $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_x^0$ 满足*

- *$\mathfrak{h}$ 是交换的.*
- *$\mathfrak{h}$ 是自己的交换化子, 既 $\mathfrak{h} = \{x \in \mathfrak{g} : \forall h \in \mathfrak{h}, [x,h] = h\}$*
- *每个 $\mathfrak{h}$ 的元素都是半单的 (参见 (3.20)).*
- *Killing 形式在 $\mathfrak{h}$ 上的限制是非退化的.*

作为推理, $\mathfrak{h}$ 是极大的交换子代数.

证明 令 $\kappa_{\mathfrak{g}}$ 是 Killing 形式, 任意选取 $y \in \mathfrak{g}_x^\lambda, z \in \mathfrak{g}_x^\mu$, 则 $(\mathrm{ad}_y \circ \mathrm{ad}_z)(\mathfrak{g}_x^\nu) \subseteq \mathfrak{g}_x^{\nu+\mu+\lambda}$, 故只要 $\lambda + \mu \neq 0$, $\kappa_{\mathfrak{g}}(y, z) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_y \circ \mathrm{ad}_z) = 0$. 于是得到正交分解, 其中后者 $\pm\lambda$ 只计算一次

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_x^0 \oplus \bigoplus_{\lambda \neq 0} (\mathfrak{g}_x^\lambda \oplus \mathfrak{g}_x^{-\lambda})$$

自然 $\kappa_{\mathfrak{g}}$ 限制在 $\mathfrak{g}_x^0$ 上也是非退化的, 具体来说 $y \in \mathfrak{g}_x^0$ 使得 $\kappa_{\mathfrak{g}}(y, \mathfrak{g}_x^0) = 0$, 则 $\kappa_{\mathfrak{g}}(y, \mathfrak{g}) = 0$, 故 $y = 0$.

由定义, $\mathfrak{h}$ 是幂零的, 从而是可解的, 根据 Cartan 判据 (2.18), 从而 $\kappa_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = 0$, 但是非退化, 这意味着 $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$.

关于中心化子是因为

$$\begin{aligned} \{x \in \mathfrak{g} : \forall h \in \mathfrak{h}, [x, h] = h\} &\subseteq \{x \in \mathfrak{g} : [x, \mathfrak{h}] = \mathfrak{h}\} = \mathfrak{h} && \because \text{定义} \\ &\subseteq \{x \in \mathfrak{g} : \forall h \in \mathfrak{h}, [x, h] = h\} && \because \mathfrak{h}\ \text{交换} \end{aligned}$$

关于半单, 令 $y \in \mathfrak{h}$, 令 $y = d + n$ 是抽象 Jordan 分解, 因为任意 $z \in \mathfrak{h}$ 都与 y 交换, 从而都与 d, n 交换, 从而根据中心化子的刻画, 有 $d, n \in \mathfrak{h}$. 这样 $\mathrm{ad}_z \circ \mathrm{ad}_n$ 还是幂零的, 从而 $\kappa_{\mathfrak{g}}(z, n) = 0$, 因为 z 是 $\mathfrak{h}$ 中任意的, 根据非退化从而 $n = 0$. □

4.4 Borel 子代数

下面对于复半单李代数 $\mathfrak{g}$, 固定 Cartan 子代数 $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$. 令 $\mathfrak{h}^\vee$ 是 $\mathfrak{h}$ 的对偶空间.

定义 4.26 (权, 根) 对于表示 $\mathfrak{g} \xrightarrow{\rho} \mathfrak{gl}(V)$, $\lambda \in \mathfrak{h}^\vee$, 定义

$$V_\lambda = \{v \in V : \forall H \in \mathfrak{h}, H \cdot v = \lambda(H) v\}$$

称之为 λ 的特征子空间. 当 $V_\lambda \neq 0$ 时, 称 $\lambda \in \mathfrak{h}^\vee$ 是一个**权**, 这样非零的 v 都被称为**权向量**, V_λ 被称为**权空间**, 其维数被称为**权重数**. $\mathfrak{g}$ 的**根**是伴随表示的**权**, 记所有非零权为 $R \subseteq \mathfrak{h}^\vee$.

保留上面的记号，

$$\mathfrak{g}_\lambda = \{x \in \mathfrak{g} : \forall h \in \mathfrak{h}, [h,x] = \lambda(h)x\}$$

命题 4.27 对于表示 $\mathfrak{g} \xrightarrow{\rho} \mathfrak{gl}(V)$, $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^\vee} V_\lambda$.

命题 4.28 对于复半单李代数 $\mathfrak{g}$, $x \in \mathfrak{g}$, 关于特征子空间有

- $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^\vee} \mathfrak{g}_\lambda$.
- $[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu] \subseteq \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$.
- $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$.

命题 4.29 对于复半单李代数 $\mathfrak{g}$, 在 *Killing* 形式 $\kappa_\mathfrak{g}$ 下, 对于 $\mathfrak{g}_\lambda$ 和 $\mathfrak{g}_\mu$ 有如下结论

- $\kappa_\mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{h}$ 上的限制是非退化的.
- 如果 $\lambda + \mu \neq 0$, 则二者是正交的, 即 $\kappa_\mathfrak{g}(\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu) = 0$.
- 如果 $\lambda + \mu = 0$, 则二者是对偶的, 即 $\mathfrak{g}_\lambda^\vee$ 通过 $\kappa_\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}_{-\lambda}$ 同构. 且

$$\forall h \in \mathfrak{h}, x \in \mathfrak{g}_\lambda, y \in \mathfrak{g}_{-\lambda} \qquad \kappa_\mathfrak{g}(h, [x,y]) = \lambda(h)\kappa_\mathfrak{g}(x,y)$$

等价地, 利用 $\kappa_\mathfrak{g}$ 得到的同构 $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{h}^\vee$, 如果 λ 对应的元素是 $h_\lambda \in \mathfrak{h}$, 则

$$[x,y] = \kappa_\mathfrak{g}(x,y)h_\lambda$$

证明 事实上, 任意的 $h \in \mathfrak{h}, x \in \mathfrak{g}_\lambda, y \in \mathfrak{g}_\mu$,

$$0 = \kappa_\mathfrak{g}([h,x],y) + \kappa_\mathfrak{g}(x,[h,y]) = (\lambda(h)+\mu(h))\kappa_\mathfrak{g}(x,y)$$

这样, 下面就是一个正交分解, 下面的直和符号 $\pm\lambda$ 只计算一次

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \bigoplus_{\lambda \in R \backslash 0} (\mathfrak{g}_\lambda \oplus \mathfrak{g}_{-\lambda})$$

这样 $\kappa_{\mathfrak{g}}$ 在 $\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{g}_\lambda \oplus \mathfrak{g}_{-\lambda}$ 上的限制就是非退化的了, 从而 $\mathfrak{g}_\lambda^\vee$ 和 $\mathfrak{g}_{-\lambda}$ 是对偶的. 然后关于计算的结论是因为

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(h, [x, y]) = \kappa_{\mathfrak{g}}([h, x], y) = \lambda(h)\kappa_{\mathfrak{g}}(x, y)$$

而 h_λ 满足 $\kappa_{\mathfrak{g}}(h, h_\lambda) = \lambda(h)$. 即

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(h, [x, y]) = \lambda(h)\kappa_{\mathfrak{g}}(x, y) = \kappa_{\mathfrak{g}}(h, h_\lambda)\kappa_{\mathfrak{g}}(x, y) = \kappa_{\mathfrak{g}}(h, \kappa_{\mathfrak{g}}(x, y)h_\lambda)$$

因为 $\mathfrak{h}$ 的任意性和 $\kappa_{\mathfrak{g}}$ 在 $\mathfrak{h}$ 上非退化得证. □

命题 4.30 对于复半单李代数 $\mathfrak{g}$, 任意 $\lambda \in R$, 假如令 $\mathfrak{h}_\lambda = [\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_{-\lambda}]$, 则

$$\mathfrak{g}_\lambda \oplus \mathfrak{g}_{-\lambda} \oplus \mathfrak{h}_\lambda \cong \mathfrak{sl}_2$$

具体来说, $\dim \mathfrak{g}_\lambda = \dim \mathfrak{g}_{-\lambda} = \dim \mathfrak{h}_\lambda = 1$. 且存在唯一的 $H_\lambda \in \mathfrak{h}_\lambda$ 使得 $\lambda(H_\lambda) = 2$. 任意 $X_\lambda \in \mathfrak{g}_\lambda$, 总存在唯一的 $Y_\lambda \in \mathfrak{g}_{-\lambda}$ 使得

$$[H_\lambda, X_\lambda] = 2X_\lambda \qquad [H_\lambda, Y_\lambda] = -2Y_\lambda \qquad [X_\lambda, Y_\lambda] = H_\lambda$$

证明 首先, $\dim \mathfrak{h}_\lambda = 1$, 这是因为 (4.29) 说明 $\mathfrak{h}_\lambda$ 都是 h_λ 的倍数. 为了看到存在唯一的 $H_\lambda \in \mathfrak{h}_\lambda$ 使得 $\lambda(H_\lambda) = 2$, 只需要说明 $\lambda(\mathfrak{h}_\lambda) \neq 0$, 否则的话, 存在 $x \in \mathfrak{g}_\lambda, y \in \mathfrak{g}_{-\lambda}$ 使得 $z = [x, y] \neq 0$ 使得 $\lambda(z) = 0$, 这样

$$[z, x] = 0 \qquad [z, y] = 0 \qquad [x, y] = z$$

这说明子代数 $\operatorname{span}(x, y, z)$ 是可解的, 根据 Lie 定理 (2.12), z 的正则表示是幂零的, 再根据 (4.25), z 还是半单的, 从而 $z = 0$ 矛盾.

下面, 对于存在性, 因为 $\mathfrak{g}_\lambda$ 与 $\mathfrak{g}_{-\lambda}$ 对偶, 所以任意 $X_\lambda \in \mathfrak{g}_\lambda$, 总存在 $Y_\lambda \in \mathfrak{g}_{-\lambda}$ 使得 $\kappa_{\mathfrak{g}}(X_\lambda, Y_\lambda) \neq 0$, 根据 (4.29), 通过调整一个常数, 可以选择 Y_λ 使得 $[X_\lambda, Y_\lambda] = H_\lambda$, 这样

$$[H_\lambda, X_\lambda] = \lambda(H_\lambda)X_\lambda = 2X_\lambda \qquad [H_\lambda, Y_\lambda] = -\lambda(H_\lambda)Y_\lambda = -2Y_\lambda$$

这样 $\operatorname{span}(X_\lambda, Y_\lambda, H_\lambda) \cong \mathfrak{sl}_2$.

最后我们来论证 $\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_{-\lambda}$ 的维数. 否则, 将存在 $y \in \mathfrak{g}_{-\lambda}$, 使得 $\kappa_{\mathfrak{g}}(y, X_\lambda) = 0$, 这样, 根据 (4.29), $[X_\lambda, y] = 0$, $[H_\lambda, y] = -\lambda(H_\lambda)y = -2y$, 这使得 $\mathfrak{g}$ 作为

$\mathrm{span}(X_\lambda, Y_\lambda, H_\lambda) \cong \mathfrak{sl}_2$-模有一个权为 -2 的最高权向量, 这在有限维是不可能的 (4.3). □

命题 4.31 *相比较 (4.28) 更强的是, 对于 $\lambda, \mu \in R, \lambda + \mu \neq 0$*

$$[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu] = \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$$

证明 当 $\mathfrak{g}_{\lambda+\mu} = 0$ 时, 将自动成立, 故只需要考虑 $\lambda+\mu \in R$ 的情况. 考虑经过 μ 以 λ 为增长的 "直线" $E = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\mu+k\lambda}$, 显然, 这是一个 $\mathrm{span}(X_\lambda, Y_\lambda, H_\lambda) \cong \mathfrak{sl}_2$-模, 令 p 是最大的整数使得 $\mathfrak{g}_{\mu+p\lambda} \neq 0$, q 时最小的整数使得 $\mathfrak{g}_{\mu+q\lambda} \neq 0$, 那么根据 $\mathfrak{sl}_2$ 的表示 (4.3), 对于 $q \leq k \leq p$, $\mathfrak{g}_{\mu+k\lambda} \neq 0$, 并且

$$\mu(H_\lambda) + 2p + \mu(H_\lambda) + 2q = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu(H_\lambda) = p - q$$

且如下映射是同构

$$\mathrm{ad}_{X_\lambda} : \mathfrak{g}_{\mu+k\lambda} \to \mathfrak{g}_{\mu+(k+1)\lambda} \qquad p \leq k \leq q-1$$

如果 $\lambda + \mu \in R$, 从而 $q \geq 1$, $p \leq 0$ 从而得证. □

命题 4.32 *对于复半单李代数 $\mathfrak{g}$, 其所有根 R 构成一个既约根系 (A.6).*

证明 首先, R 有限不含零为显然. 而 R 张成了 $\mathfrak{h}^\vee$, 不然, 存在非零 $h \in \mathfrak{h}$ 使得任意 $\lambda \in R$ 有 $\lambda(h) = 0$, 这样, $\mathrm{ad}_h = 0$, 因为对于半单李代数 ad 是单射, 故 $h = 0$ 矛盾.

根据 (4.30) 找 H_λ, 那么定义

$$S_\lambda \mu = \mu - \mu(H_\lambda)\lambda$$

我们要说明

- $\mu(H_\lambda) \in \mathbb{Z}$. 取 $y \in \mathfrak{g}_\mu \setminus \{0\}$, 则 $[H_\lambda, y] = \mu(H_\lambda)y$, 这说明将 $\mathfrak{g}$ 视为 $\mathrm{span}(X_\lambda, Y_\lambda, H_\lambda) \cong \mathfrak{sl}_2$-模, 根据 $\mathfrak{sl}_2$ 的表示 (4.3), y 具有权 $\mu(H_\lambda)$, 因为有限维, 故 $\mu(H_\lambda) \in \mathbb{Z}$.

- $S_\lambda\mu \in R$. 同样, 既然 y 具有权 $\mu(H_\lambda)$, 势必存在 $z \in \mathfrak{g}$ 的权为 $-\mu(H_\lambda)$, 具体来说, 若 $p = \mu(H_\lambda)$

$$z = Y_\lambda^{|p|} \quad p \geq 0 \qquad z = X_\lambda^{|p|} \quad p \leq 0$$

  这样非零的 $z \in \mathfrak{g}_{\mu-\mu(H_\lambda)\lambda}$, 这样 $S_\lambda\mu \in R$.

- $\lambda \in R \Rightarrow 2\lambda \notin R$. 否则存在 $\lambda, 2\lambda \in R$, 令 $y \in \mathfrak{g}_{2\lambda} \setminus \{0\}$, 则

$$[H_\lambda, y] = 2\lambda(H_\lambda)y = 4y$$

  另一方面

$$[H_\lambda, y] = [[X_\lambda, Y_\lambda], y] = [\underbrace{[X_\lambda, y]}_{\in\mathfrak{g}_{3\lambda}=0}, Y_\lambda] + [X_\lambda, \underbrace{[Y_\lambda, y]}_{\in\mathfrak{g}_\lambda \Rightarrow /\!/ X_\lambda}] = 0$$

  前者为 0 是因为以上两点已经说明 R 是根系了, 故 $3\lambda \notin R$, 后者为 0 是因为 $\dim \mathfrak{g}_\lambda = 1$, 从而都是 X_λ 的数乘.

以上就说明 R 是一个既约根系. □

实际上既约根系完全决定了复半单李代数的结构. 具体来说, 一个复半单李代数不论 Cartan 子代数如何选取, 导出的根系都是一样的. 反之, 任何一个既约根系都存在唯一一个复半单李代数使得其根系同构于之. 参见 Serre 的 *Complex semisimple Lie Algebras* P50 §VI.5.

定义 4.33 (Borel 子代数) 对于复半单李代数 $\mathfrak{g}$, 在根系 R 中选定根系的基 S, 记

$$\mathfrak{n}_+ = \sum_{\lambda\in R^+} \mathfrak{g}_\lambda \qquad \mathfrak{n}_- = \sum_{\lambda<0} \mathfrak{g}_\lambda \qquad \mathfrak{b} = \mathfrak{h} + \mathfrak{n}_+$$

其中 $\mathfrak{b}$ 被称为 **Borel 子代数**.

命题 4.34 对于复半单李代数 $\mathfrak{g}$, 有

- 作为线性空间的分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+ = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{b}$.

- 其中 $\mathfrak{n}_-, \mathfrak{n}_+$ 中都是幂零元, 从而是幂零的.

- $\mathfrak{b}$ 是可解的, 且 $[\mathfrak{b},\mathfrak{b}]=\mathfrak{n}_+$.

证明　关于第二点是因为当 n 充分大时, $\mathrm{ad}_{X_\lambda}^n\mathfrak{g}_\mu\subseteq\mathfrak{g}_{\mu+n\lambda}=0$, 而 R 是有限的. 第三点是因为 $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]=0$, $[\mathfrak{h},\mathfrak{g}_\lambda]=\lambda(\mathfrak{h})\mathfrak{g}_\lambda=\mathfrak{g}_\lambda$. □

4.5 复半单李代数的表示

上述两节所进行的操作无非是为了在一般的复半单李代数中模拟 $\mathfrak{sl}_n$ 的几个重要的子代数, 那么其表示的分类证明也是完全类似的.

下面, 固定复半单李代数 $\mathfrak{g}$, Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$, 根系挑选为 R, 从而定义了 $\mathfrak{g}_\lambda$, 选定基 S, 从而确定了 $\mathfrak{n}_+,\mathfrak{n}_-$Borel 子代数 $\mathfrak{b}$.

命题 4.35 对于表示 $\mathfrak{g}_n\xrightarrow{\rho}\mathfrak{gl}(V)$, 如果 $v\in V_\mu$, $x\in\mathfrak{g}_\lambda$, 则 $x\cdot v\in V_{\mu+\lambda}$

证明　因为

$$\begin{aligned}h\cdot(xv)\quad&=[h,x]\cdot v+x\cdot(h\cdot v)\\&=\mu(h)x\cdot v+\lambda(h)x\cdot v\\&=(\mu+\lambda)(h)x\cdot v\end{aligned}$$

命题得证. □

命题 4.36 对于表示 $\mathfrak{g}\xrightarrow{\rho}\mathfrak{gl}(V)$, $V=\bigoplus_{\lambda\in\mathfrak{h}^\vee}V_\lambda$.

定义 4.37 (本原) 对于表示 $\mathfrak{g}\xrightarrow{\rho}\mathfrak{gl}(V)$, 称非零向量 $v\in V$ 是**本原的**, 如果 v 是权向量, 且任意 $x\in\mathfrak{n}_+$, $x\cdot v=0$.

命题 4.38 任何表示 $\mathfrak{g}\xrightarrow{\rho}\mathfrak{gl}(V)$ 都有本原向量.

证明　根据 Lie 定理 (2.12), 存在 $\mathfrak{b}=\mathfrak{h}+\mathfrak{n}_+$ 的公共特征值. 再根据 Lie 定理 (2.12), 存在极大旗使得 $\rho(\mathfrak{b})$ 同时上三角, 因为 $[\mathfrak{b},\mathfrak{b}]=\mathfrak{n}_+$, 从而 $\rho(\mathfrak{n}_+)$ 被同时严格上三角, 从而 $\rho(\mathfrak{n}_+)$ 的特征值都是 0. □

定理 4.39 任意表示 $\mathfrak{g}\xrightarrow{\rho}\mathfrak{gl}(V)$, 若 V 是单的, 则

- 在非零数乘意义下, 存在唯一的本原向量 v. 这被称为**最高权向量**, 对应的权被称为**最高权**, 设为 χ. 且任意 $\lambda\in R^+$, $\chi(H_\lambda)$ 都是非负整数.

- 权非空且有限.
- 所有权都形如 $\chi - \sum_{\lambda\in S} m_\lambda \lambda$, 其中 $m_\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

除此之外, 满足条件的最高权反过来决定了同构意义下唯一的一个不可约表示.

证明 前段的论证和唯一性的证明与 (4.16) 完全类似. 下面要证明存在性.

存在性. 先构造 $\mathfrak{b}$ 的一维表示 $L_\chi = \mathrm{span}(v)$ 通过

$$hv = \chi(h) \quad h \in \mathfrak{h} \qquad xv = 0 \quad x \in \mathfrak{n}_+$$

考虑

$$V_\chi = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} L_\chi$$

这是由 $1 \otimes v$ 生成的李代数, 因为根据 (1.9), $U(\mathfrak{g})$ 是自由 $U(\mathfrak{b})$ 模, 且 $1 \otimes v$ 是权为 χ 的本原权. 下面我们来说明 V_χ 在命题条件下一定是有限维. 只要证明权是有限的即可. 类似 (4.32) 的证明, 可以证明若 μ 是 V 的权, 则任意 $\lambda \in R$ 都有 $S_\lambda \mu$ 是 V 的权. 因为 $-S$ 也是一组基, 根据 (A.15), 存在 $w \in W(R)$ 使得 $w(S) = -S$, 这样所有权被限制在如下形式

$$\chi - \sum_{\lambda\in S} m_\lambda \lambda m_\lambda \geq 0 \qquad w(\chi) + \sum_{\lambda\in S} n_\lambda \lambda \qquad n_\lambda \geq 0$$

之中, 故任何一个权按照上述展开, 得到的 $m_\lambda, n_\lambda \geq 0$ 满足 $m_\lambda + n_\lambda$ 是 $\chi - w(\chi)$ 中 λ 的系数, 从而是有限的. □

命题 4.40 任意表示 $\mathfrak{g} \xrightarrow{\rho} \mathfrak{gl}(V)$, 当中本原向量生成的子模是单的.

需要指出, 与 $\mathfrak{sl}_2$ 的表示不同, 不可约表示存在根空间重数超过 1 的情况, 其刻画是著名的 Weyl 公式, 参见 Serre 的 *Complex Semisimple Lie Algebras* P64 VII.8.

Appendix A

根系

A.1 定义

定义 A.1 (反射) 令 V 是一个 $\mathbb{R}$-线性空间, 非零向量 $v \in V$, 定义关于 v 的反射是一个线性变换 $S: V \to V$ 使得

$$S(v) = -v \qquad \operatorname{Fix} S = \{w \in V : Sw = w\}\text{是一个超平面}$$

显然 $V = \operatorname{Fix} S \oplus \mathbb{R}v$. 等价地, 反射是一个 $v^\vee \in V^\vee$, 使得 $\langle v^\vee, v\rangle = 2$, 这样反射就被定义成

$$S : w \longmapsto w - \langle v^\vee, w\rangle\, v$$

此时 $\ker v^\vee = \operatorname{Fix} S$.

引理 A.2 令 V 是一个 $\mathbb{R}$-线性空间, $v \in V$, 有限集 $R \subseteq V$ 长成了整个空间 V, 则至多存在一个 v 的反射 S 使得 $S(R) = R$.

证明　两个这样的反射 S, S' 的复合满足

$$(S \circ S')(R) = R \qquad (S \circ S')(v) = v \qquad (S \circ S')\text{在 } V/\mathbb{R}v \text{ 上是 id}$$

因为 R 是有限集合, 故 n 充分大时 $(S \circ S')^n = \mathrm{id}$, 这说明可以对角化, 但是后两点说明 $S \circ S'$ 的特征值都是 1, 故 $S \circ S' = \mathrm{id}$. □

定义 A.3 (根系) 令 V 是一个 $\mathbb{R}$-线性空间, $R \subseteq V$ 被称为是一个**根系**如果,

- R 是不含 0 的有限集, 且张成了 V.
- 对每个 $v \in R$, 配上一个 v 的反射 S_v 使得 $S_v(R) = R$.
- 对每个 $v, w \in R$, $S_v(w) - w \in \mathbb{Z}v$.

对每个 $v \in R$, 假设 $v^\vee \in V^\vee$ 使得 $S_v(w) = w - (v^\vee, w)v$, 等价地, 第三条可以写成 $\langle v^\vee, w\rangle \in \mathbb{Z}$.

定义 A.4 (Weyl 群) 取 V 中的根系 R, 令 $\{S_v : v \in R\}$ 在 $\mathrm{GL}(V)$ 中生成的群为 $W(R)$, 这被称为 **Weyl 群**, 显然这是一个有限群. 令 $V \setminus \bigcup_{v\in R} \mathrm{Fix}\, S_v$ 的各个连通分支为 **Weyl 室**, 显然, V 只被分为有限个 *Weyl* 室.

评注 A.5 (典范内积) 任意取 V 上一个内积 $(-,-)$, 考虑

$$\langle x, y\rangle = \sum_{A\in W(R)} \langle Ax, Ay\rangle$$

这依旧是一个内积, 此时对任意 $v \in R$, $\langle S_v x, S_v y\rangle = \langle x, y\rangle$, 说明 S_v 是关于 v 的正交反射. 这样, 就变成了 $S_v x = x - \frac{\langle x,v\rangle}{\langle v,v\rangle} v$, 故 $\langle v^\vee, x\rangle = 2\frac{\langle v,x\rangle}{\langle v,v\rangle}$. 换言之, 通过此内积将 V 等同于 $V^\vee$, 将 $v^\vee$ 等同于 $\frac{2v}{\langle v,v\rangle}$.

定义 A.6 (既约) 一个 V 的根系 R 被称为是**既约的**, 如果对任意 $v \in R$, v 和 $-v$ 是唯二 R 中平行于 v 的向量.

注意到, 如果不是既约的, 那么存在 $w = tv$, 对某个 $0 < t < 1$, 此时 $S_v w - w = -2tv$, 故 $2t \in \mathbb{Z}$, 故 $t = \frac{1}{2}$.

评注 A.7 取 V 的根系 R, 下面可以研究 R 中元素的两两相对位置. 对于 $v \in R$, 定义 $|v| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$, 对于 $v, w \in R$, 定义 v, w 的夹角为 $[0, \pi)$ 上唯一的 θ 使得 $\langle v, w\rangle = |v| \cdot |w| \cos\theta$. 因为 $\langle v^\vee, w\rangle, \langle w^\vee, v\rangle$ 是整数所以

$$\langle v^\vee, w\rangle = \frac{2\langle v, w\rangle}{\langle v, v\rangle} = 2\cos\theta \frac{|w|}{|v|} \in \mathbb{Z} \qquad \langle w^\vee, v\rangle = \frac{2\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} = 2\cos\theta \frac{|v|}{|w|} \in \mathbb{Z}$$

这要求 $4\cos^2\theta \in \mathbb{Z}$. 这样的 θ 只有 $0, 1, 2, 3, 4$ 五种选择, 不妨假设 $|w| \geq |v|$ 且 w, v 不共线, 列成表格是

θ	$\cos\theta$	$\langle v^\vee, w\rangle$	$\langle w^\vee, v\rangle$	$\lvert w\rvert = *\lvert v\rvert$
$\pi/2$	0	0	0	-
$\pi/3$	$\frac{1}{2}$	1	1	$\lvert w\rvert = \lvert v\rvert$
$2\pi/3$	$-\frac{1}{2}$	-1	-1	$\lvert w\rvert = \lvert v\rvert$
$\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	2	1	$\lvert w\rvert = \sqrt{2}\lvert v\rvert$
$3\pi/4$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-2	-1	$\lvert w\rvert = \sqrt{2}\lvert v\rvert$
$\pi/6$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	3	1	$\lvert w\rvert = \sqrt{3}\lvert v\rvert$
$5\pi/6$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-3	-1	$\lvert w\rvert = \sqrt{3}\lvert v\rvert$

推论 A.8 取 V 的根系 R, $v, w \in R$, 若 v, w 不共线, 且 $\langle v^\vee, w\rangle > 0$, 即 $\langle v, w\rangle > 0$, 即夹角为锐角, 则 $v - w \in R$.

证明 根据上表, 或者 $\langle v^\vee, w\rangle = 1$ 或者 $\langle w^\vee, v\rangle = 1$, 不妨设为后者, 这样

$$v - w = v - \langle w^\vee, v\rangle\, w = S_w(v) \in R$$

对于前者只需要注意到 $w - v \in R \iff v - w \in R$. □

A.2 基

定义 A.9 (基) 取 V 的根系 R, 称 $S \subseteq R$ 是一组**基**如果

- S 是 V 的一组基.
- 每一个 $v \in R$, 在 S 的坐标下的系数是同号的整数 (同时 ≥ 0 或同时 ≤ 0), 即

$$v = \pm \sum_{s\in S} m_s s \qquad \{m_s : s \in S\} \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

  换言之, $R \subseteq \left(\sum_{s\in S} \mathbb{Z}_{\geq 0} s\right) \cup \left(\sum_{s\in S} \mathbb{Z}_{\leq 0} s\right)$.

选定基之后, 可以谈论**正根**和**负根**

$$R^+ = R \cap \left(\sum_{s\in S} \mathbb{Z}_{\geq 0} s\right) \qquad R^- = -R^+$$

定理 A.10 任何 V 的根系 R, 都存在基.

证明 证明的想法是先挑选 $f \in V^\vee$ 使得任意 $v \in R$ 都有 $\langle f, v\rangle \neq 0$, 这样就把 R 分成两部分

$$R = R_f^+ \sqcup (-R_f^+) \qquad R_f^+ = \{v \in R : \langle f, v\rangle > 0\}$$

挑选 R_f^+ 中不能写成两个 R 中元素之和的元素, 设之为 S_f, 我们证明 S_f 是基. 逐个验证基的定义.

首先, R_f^+ 是 S_f 的非负整数线性组合. 否则的话, 选取不满足条件的 $v \in R_f^+$ 使得 $f(v) > 0$ 最小, 这迫使 v 既可约又不可约产生矛盾.

接着, S_f 中两两成钝角, 否则 (A.8) 表明其一可约.

最后, 这说明 S_f 张成整个空间 V, 下面说明其线性无关. 假设有线性关系, 可以按照正负号整理到两边得到

$$\sum_{i\in P} x_i v_i = \sum_{i\in N} x_i v_i \qquad x_i > 0$$

这样两边同时和左边作内积, 左边 ≥ 0, 而右边逐项展开 ≤ 0, 这迫使左边 $= 0$, 同样的方法迫使右边 $= 0$. 故不妨假设线性关系的系数都是正数, 这样两边同时作用 f 即得到矛盾. □

评注 A.11 实际上, 任何基都是证明中所构造的那样的, 因为对于基 S, 总可以找 $f \in V^\vee$ 使得 $f(S) = 1$.

命题 A.12 任何 V 的根系 R, 选定基 S, 则任何一个正根 $v \in R^+$, 都可以写成

$$v = s_1 + \ldots + s_k \qquad s_i \in S$$

且对任意 $0 \leq h \leq k$, 前 h 个任何部分和 $s_1 + \ldots + s_h \in R^+$. 换言之, 假如以 $R^+ \cup \{0\}$ 为棋盘, 每步按照 S 中的某个元素跳到另一个点, 则从原点出发可以跳到每一个 R^+.

证明 找 $f \in V^\vee$ 使得 $f(S) = 1$, 这样 $f(v)$ 就是正整数. 首先, 因为 $\langle v, v\rangle > 0$, 而 v 是 S 的非负整数组合, 所以 $\langle v, s_i\rangle$ 不能总 ≤ 0, 所以存在 s_i

使得 $\langle v, s_i \rangle < 0$, 当 v, s_i 共线时, 那么根据 (A.6), $v = s_i$ 或 $2s_i$, 已经完成了证明, 否则 v, s_i 不共线, 根据 (A.8), $v - s_i$ 还是根, 注意到 $s_i = v - (v - s_i)$, 根据 s_i 不可约的假设, $v - s_i \in R^+$, 这样 $f(v - s_i) = f(v) - 1$ 完成了递降. □

命题 A.13 *任何 V 的既约根系 R, 选定基 S, 任意 $s \in S$, 则 $S_v(R^+ \setminus \{s\}) = R^+ \setminus \{s\}$.*

证明 令 $v \in R^+ \setminus \{s\}$, 设 $v = \sum_{t \in S} m_t t$, 其中 $m_t \geq 0$, 这样,

$$S_s(v) = v - \langle s^\vee, v \rangle s = (m_s - \langle t_0^\vee, s \rangle)t + \sum_{t \neq s} m_t t \in R$$

因为既约, 存在 $t \neq s$ 使得 $m_t > 0$, 这迫使 $S_s(v) \in R^+$. □

推论 A.14 *任何 V 的既约根系 R, 选定基 S, 令 $r = \frac{1}{2} \sum_{r \in R^+} r$, 则*

$$\forall s \in S \qquad S_s(r) = r - s$$

证明 直接计算

$$S_s(r) = \frac{1}{2}\left[S_s(s) + S_s\left(\sum_{r \in R^+ \setminus \{s\}} r\right)\right] = \frac{1}{2}\left[-s + \sum_{r \in R^+ \setminus \{s\}} r\right] = r - s$$

得证. □

定理 A.15 (Wely 群的结构) *关于根系 R 的 Wely 群 $W(R)$, 有如下结果*

- *$\forall f \in V^\vee$, 存在 $w \in W(R)$ 使得 $f(w(S)) \geq 0$.*
- *S, S' 是两组基, 则存在 $w \in W$ 使得 $w(S) = S'$.*
- *对任意 $v \in R$, 基 S, 存在 $w \in W$ 使得 $w(v) \in S$.*
- *W 是被 $\{S_s : s \in S\}$ 生成的.*

证明 取 $r = \frac{1}{2} \sum_{r \in R^+} r$, 取 w 使得 $f(w(r))$ 最大, 从而根据 (A.14)

$$f(w(r)) \geq f(w(r - s)) = f(w(r)) - f(w(s)) \quad \Rightarrow \quad f(w(s)) \geq 0$$

这就证明了第一点. 第二点根据 (A.11) 显然. 第三点无非是说明存在 $f \in V\vee$ 使得其不可约, 只需要找 f 使得 $f(R) \neq 0$, $f(\beta)$ 是 f 在 R 上唯一的最小的正数即可.

注意上上述证明将 W 改为 $\{S_s : s \in S\}$ 生成的子群也对, 但是根据第三点, 任何一个反射都共轭于一个基的反射. □

关于根系的分类还有更多的探讨, 其分类完成了, 就意味着对复半单李代数分类的完成. 参见 Serre 的 *Complex Semisimple Lie Algebras* P34 §V.11-17. 而各种半单李代数的具体表示, 以及其内在的几何意义则可以移步 Fulton 和 Harris 的 *Representation Theory* Part III.