张量漫谈 第二篇

熊锐

2018 年 7 月 4 日

Abstract

张量为什么要如此定义？这或许是一个让人头疼的问题. 因为其复杂的而多样定义让人感到困惑. 简单的定义无法抓到本质, 复杂的定义缺乏解释. 更为关键的是, 似乎在目力所及的范围内也很难看到张量的用途.

本系列的目的在于将张量的体量给一个相对完善的介绍, 希望体例完善的同时, 更能把阐述明白其用途. 不同篇难度和基础知识要求不同, 本篇是第二篇, 需要一些抽象代数的基本概念. 本篇的目的在于介绍张量代数, 对称代数, 外代数.

Contents

1 代数

同样, 固定域 K. 回忆环的定义.

定义 1.1 (代数) 称一个线性空间 R 是一个**代数 (algebra)** 如果 R 上有乘法 $(x,y)\mapsto xy$ 使得

(1) $\forall x,y,z\in R,\quad x(yz)=(xy)z.$ *(结合律)*

(2) $\exists 1\in R,\forall x\in R,\quad \text{s.t. } 1x=x1=x.$ *(单位律)*

(3) $\forall x,y,z\in R,\quad x(y+z)=xy+xz,\ (x+y)z=xz+yz.$ *(分配率)*

等价地[1], R 是一个环, 配上一个环同态 $K\xrightarrow{\varphi}R$.

这里, 因为 K 是域, 任何环同态的核都是零理想, 故都是嵌入, 故可以认为 $K\subseteq R$.

评注 1.2 对于有限维代数 R, 如果选定一组基 $\{e_i\}_{i=1}^n$, 可以设

$$e_ie_j=\sum_{k=1}^n c_{ijk}e_k$$

实际上 $\{c_{ijk}\}_{i,j,k}$ 完全决定了 R 的结构, 这被称为**结构常数**. 但是我们这里不会用到这个概念.

例 1.3 例如全体矩阵 $\mathbb{M}_n(K)$ 就是一个代数. 乘法就是矩阵的乘法.

定义 1.4 (理想) 一个代数 R, 子集 $\mathfrak{A}\subseteq R$ 被称为一个**理想**如果

$$\forall x\in R, a\in\mathfrak{A},\qquad xa, ax\in\mathfrak{A}$$

可以取 $x=k\in K$, 可以直接得到 $\mathfrak{A}$ 是 R 的子空间. 对应的商空间 $R/\mathfrak{A}$ 上有自然的代数结构

$$(x+\mathfrak{A})(y+\mathfrak{A})=xy+\mathfrak{A}$$

这被称为**商代数**.

[1] 具体来说, 这三条已经得到是幺环, 同态取做 $k\mapsto k\cdot 1$. 反之, 需要补上数乘使得 R 是线性空间, 只需取 $k\cdot x=\varphi(k)x$.

定义 1.5 (代数同态) 称两个代数之间的映射 $R \xrightarrow{\psi} R'$ 是代数同态如果 ψ 既是线性映射, 又是环同态即 $\psi(1)=1, \psi(xy)=\psi(x)\psi(y)$.

假如等价地视作代数为环配上同态, 假设以上两个代数对应于 $K \xrightarrow{\varphi} R$ 和 $K \xrightarrow{\varphi'} R'$, 那么对 ψ 是代数同态当且仅当 ψ 是环同态, 且 $\psi \circ \varphi = \varphi'$.

定义 1.6 (分次代数) 一个代数 R 被称为分次代数, 如果指定一个作为线性空间的分解

$$R = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} R^i \quad \text{s.t.} \quad \forall x \in R^i, y \in R^j \Rightarrow xy \in R^{i+j}$$

称 R^i 为 R 的 i 次齐次部分, R_i 中的元素被称为 i 次齐次元. 对于任意 $x \in R$, 可以唯一地写 $x = \sum_{i \in \mathbb{Z}} x_i$, 其中 $x_i \in R^i$. 称 x_i 为 x 的 i 次齐次部分.

如下如果不作特别声明, 当提到分次代数时, $i<0$ 时, $R^i=0$.

例 1.7 全体一元多项式 $K[X]$ 就是一个分次代数. 其 i 次部分就是 $\{kX^i : k \in K\}$.

例 1.8 多元多项式 $K[X, \ldots, Y]$ 也是一个分次代数. 其 i 次部分就是所有 i 次单项式张成的线性空间.

定义 1.9 一个分次代数 $R = \bigoplus R^i$ 的理想 $\mathfrak{A}$ 被称为分次理想如果

$$\mathfrak{A} = \bigoplus (\mathfrak{A} \cap R^i)$$

换言之, $\mathfrak{A}$ 可以写成 R^i 一些子空间的直和, 等价地, $\mathfrak{A}$ 的齐次部分也在 $\mathfrak{A}$ 中. 对应的商代数 $R/\mathfrak{A}$ 有自然的分次结构

$$R/\mathfrak{A} = \bigoplus R^i/\mathfrak{A} \cap R^i$$

显然, 一个理想是分次理想当且仅当其由齐次元生成.

例 1.10 多元多项式 $K[X, \ldots, Y]$ 的理想 $\mathfrak{a}$ 是分次理想当且仅当 $\mathfrak{a}$ 由齐次多项式生成.

2 代数的张量积

命题 2.1 对于两个代数 R_1, R_2, 他们作为线性空间的张量积 $R_1 \otimes R_2$ 上有自然的 K-代数结构满足

$$(x_1 \otimes x_2)(y_1 \otimes y_2) = (x_1 y_1) \otimes (x_2 y_2)$$

证明 关键是验证良定义性, 考虑如下映射

$$\mu : R_1 \times R_2 \times R_1 \times R_2 \longrightarrow R_1 \otimes R_2 \qquad (x_1, x_2, y_1, y_2) \longmapsto (x_1 y_1) \otimes (x_2 y_2)$$

这显然是一个 4-线性同态, 从而诱导了 $R_1 \otimes R_2 \otimes R_1 \otimes R_2$ 出发的映射, 仔细观察下列映射

$$(R_1 \otimes R_2) \times (R_1 \otimes R_2) \to (R_1 \otimes R_2) \otimes (R_1 \otimes R_2) \xrightarrow{*} R_1 \otimes R_2$$

其中 $*$ 是 μ 诱导的, 这说明了良定义性. $\square$

下面我们会看到 $R_1 \otimes R_2$ 解出关于交换代数的余积.

命题 2.2 对于两个 K-交换代数 R_1, R_2, 则存在

$$(T, \iota_1, \iota_2) \quad \Bigg| \quad K\text{-交换代数 } T, \text{ 以及 } K\text{-代数同态} \begin{cases} \iota_1 : R_1 \to T \\ \iota_2 : R_2 \to T \end{cases}$$

满足如下的泛性质

$$\begin{aligned} & \forall K\text{-交换代数 } S \\ & \forall K\text{-代数同态} \begin{cases} \varphi_1 : R_1 \to S \\ \varphi_2 : R_2 \to S \end{cases} \\ & \exists! \lambda : T \to S \\ & \quad \text{s. t.} \begin{cases} \lambda \circ \iota_1 = \varphi_1 \\ \lambda \circ \iota_2 = \varphi_2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
R_1 \arrow[dr, "\iota_1"'] \arrow[drr, bend left, "\varphi_1"] & & \\
& T \arrow[r, dashed, "\lambda"] & S \\
R_2 \arrow[ur, "\iota_2"] \arrow[urr, bend right, "\varphi_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

且这样的 (T, ι_1, ι_2) 在同构意义下唯一.

证明 我们断言 $T = R_1 \otimes R_2$, 以及

$$\begin{array}{rccc} \iota_1 : & R_1 & \longrightarrow & R_1 \otimes R_2 \\ & x & \longmapsto & x \otimes 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \iota_2 : & R_2 & \longrightarrow & R_1 \otimes R_2 \\ & y & \longmapsto & 1 \otimes y \end{array}$$

满足条件. 这样对于 φ_1, φ_2, 定义

$$\lambda : R_1 \otimes R_2 \longrightarrow S \qquad x \otimes y \longmapsto \varphi_1(x)\varphi_2(y)$$

不难知道这是良定义的, 因为交换所以是代数同态, 且不难知道这是唯一的选择. □

3 张量代数, 对称代数, 外代数

I. 张量代数 我们指出, 张量实际上是一种人为构造出来的, 有乘法分配律, 还能把域 K 中的元素里外换的乘法. 既然将其视为乘法, 我们希望将两个张量也相乘, 于是有了下面的定义.

定义 3.1 (张量代数) 对于线性空间 V, 我们要在[2]

$$T(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{n}$$

上定义自然的分次代数结构, 其线性结构不言自明, 关键在于其乘法结构, 定义乘法 $\otimes$ 为张量的拼接[3]

$$\underbrace{x_1 \otimes \ldots \otimes x_n}_{\in V^{\otimes n}} \otimes \underbrace{y_1 \otimes \ldots \otimes y_m}_{\in V^{\otimes m}} = \underbrace{x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_m}_{\in V^{\otimes (m+n)}}$$

这使 $T(V)$ 成为一个 K-分次代数, 这被称为 V 上的**张量代数**.

定义 3.2 (张量代数的同态) 对于线性映射 $V \overset{\varphi}{\to} W$, 可以规定

$$T(\varphi) : T(V) \longrightarrow T(W) \qquad x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \longmapsto \varphi(x_1) \otimes \ldots \otimes \varphi(x_n)$$

这是一个分次代数同态. 这让 $T(-)$ 成为一个函子.

[2]特别地, $V^{\otimes 0} = K$, 事实上 $T(M)$ 的单位元正是来自这里.

[3]好在, 代数的分配率保证我们只需要指定齐次元的乘法即可, 而张量积的分配率保证我们只要指定 $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$ 处的取值即可.

II. 对称代数

定义 3.3 (对称代数) 对于线性空间 V, 在 $T(V)$ 上考虑理想

$$I_S = \langle \quad x\otimes y - y\otimes x \ : \ x,y\in V \quad \rangle$$

这是由齐次元生成的理想, 对应的商代数 $T(V)/I_S$ 有自然的分次结构, 记为 $S(V)$, 这被称为对称代数. 上面诱导的乘法改写为 $\cdot$ 或者直接省略.

定义 3.4 (对称代数的同态) 对于线性映射 $V\xrightarrow{\varphi}W$, 可以规定

$$S(\varphi) : S(V) \longrightarrow S(W) \qquad x_1\dots x_n \longmapsto \varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)$$

这是一个分次代数同态. 这让 $S(-)$ 成为一个函子.

命题 3.5 (对称代数结构定理) 关于对称代数 $S(V)$ 有如下结构定理

(1) $S(V)$ 的 n 次齐次部分 $S^n(V)$, 每个元素可以表为

$$\sum k\cdot x_1\dots x_n \quad (\text{有限和}) \quad k\in K, x_i\in V$$

且满足

$$\begin{cases} \dots xy\dots = \dots yx\dots \\ \dots(x_1+x_2)y\dots = (\dots x_1y\dots)+(\dots x_2y\dots) \\ \dots x(y_1+y_2)\dots = (\dots xy_1\dots)+(\dots xy_2\dots) \\ \dots(kx)\dots = k(\dots x\dots) \end{cases}$$

且两个元素相等当且仅当可以用上述运算律能把一个化成另一个.

(2) $S(V)$ 的每个元素可以唯一地表示成

$$\sum_{i=0}^{\infty} s_n \quad (\text{有限和}) \quad s_n\in S^n(V)$$

且乘法为字的拼接

$$\underbrace{x_1\dots x_n}_{\in S^n(V)}\underbrace{y_1\dots y_m}_{\in S^m(V)} = \underbrace{x_1\dots x_n y_1\dots y_m}_{S^{n+m}(V)}$$

证明 不难发现, 商掉 I_S 就是让所有的

$$\dots x\otimes y\dots \equiv \dots y\otimes x\dots \mod I_S$$

记 $x_1\otimes\dots\otimes x_n+I_S$ 为 $x_1\dots x_n$, 自然满足命题中的运算律. 而显然, $x\otimes y-y\otimes x$ 的线性组合可以改写成整系数线性组合, 再加上张量的结构定理, 故相等只需要有限步的运算律就可互化, 这就是 (1) 间所求的全部. (2) 直接根据商代数的乘法. □

命题 3.6 对于线性空间 V, 可以构造如下的

$$(W,\tau)\ \Big|\ W \text{ 是线性空间; } n\text{-重对称线性映射 } \tau: V^n\to W$$

满足如下的泛性质 [4]

$$\begin{array}{l|l} \forall\text{线性空间 } U & \\ \forall n\text{-重对称线性映射 } \varphi: V^n\to U & \\ \exists^!\text{线性映射 } \psi: W\to U & \\ \text{s.t. } \psi\circ\tau=\varphi & \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\varphi"'] & W \arrow[d, dashed, "\psi"] \\ & U \end{tikzcd}$$

且这样的 (W,τ) 在同构意义下唯一.

证明 取 $W=S^n(V)$, 取

$$\tau: V^n\longrightarrow S^n(V) \qquad (x_1,\dots,x_n)\longmapsto x_1\dots x_n$$

则

$$\psi: S^n(V)\longrightarrow U \qquad x_1\dots x_n\longmapsto \varphi(x_1,\dots,x_n)$$

是唯一的选择. □

命题 3.7 假如线性空间 V 有一组基 $\{x_i\}_{i\in I}$, 则 $S(V)$ 作为分次代数同构于多元多项式环 $K[X_i]_{i\in I}$. 具体来说

$$\varphi: S(V)\xrightarrow{\sim} K[X_i]_{i\in I} \qquad x_{i_1}\dots x_{i_n}\longmapsto X_{i_1}\dots X_{i_n}$$

[4]当中的 n 重对称线性映射 φ 指的是首先 φ 是 n 重线性映射, 且 $\varphi(\dots,x,y\dots)=\varphi(\dots,y,x,\dots)$.

证明 不难验证这是良定义的. 逆映射也不难构造. □

下面, 我们给出很多书中会给出的另一种对称代数的给法. 但是此时需要 K 的特征为 0.

定义 3.8 (对称化) 对于线性空间 $V^{\otimes n}$, 对称群 $\mathfrak{S}_n$ 作用在上面[5], 通过

$$\mathfrak{S}_n \ni \sigma : V^{\otimes n} \longrightarrow V^{\otimes n} \qquad x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \longmapsto x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)}$$

称一个张量 $x \in V^{\otimes n}$ 是**对称的**, 如果对任何 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, 都有 $\sigma(x) = x$. 可以定义**对称化**

$$\pi : V^{\otimes n} \longrightarrow V^{\otimes n} \qquad x \longmapsto \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma x$$

不难验证, π 有如下性质

- 若 x 对称, 则 $\pi(x) = x$.
- 特别地, π 的像是全体对称张量.
- $\pi(\pi(x)) = \pi(x)$.
- 特别地, $\operatorname{im}(1 - \pi) = \ker \pi$.

记 $V^{\otimes n}$ 中的全体对称张量为 $\overline{S}^n(V)$, 考虑 $\overline{S}(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \overline{S}^n(V)$, π 可以自动延拓到 $\overline{S}(V)$ 上. 在上面可以定义乘法, 对于 $x \in \overline{S}^m(V), y \in \overline{S}^n(V)$,

$$x \cdot y = \frac{(m+n)!}{m!n!} \pi(x \otimes y)$$

不难验证这让 $\overline{S}(V)$ 成为一个分次代数.

命题 3.9 有如下分次代数的同构

$$\varphi : \overline{S}(V) \xrightarrow{\sim} S(V) \qquad \sum x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \longmapsto \sum x_1 \ldots x_n$$

其逆映射是

$$\psi : S(V) \xrightarrow{\sim} \overline{S}(V) \qquad \sum x_1 \ldots x_n \longmapsto \pi\left(\sum x_1 \otimes \ldots \otimes x_n\right)$$

[5] 或者说, 表示在上面.

证明 回看 I_S, 实际上

$$\begin{aligned}
I_S \cap V^{\otimes n} &= \operatorname{span}\left\{ \begin{matrix} x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \\ -x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)} \end{matrix} : \begin{matrix} x_1, \ldots, x_n \in V \\ \sigma \in \mathfrak{S}_n \text{是交换相邻两位的置换} \end{matrix} \right\} \\
&= \operatorname{span}\left\{ \begin{matrix} x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \\ -\sigma(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) \end{matrix} : \begin{matrix} x_1, \ldots, x_n \in V \\ \sigma \in \mathfrak{S}_n \end{matrix} \right\} \\
&= \operatorname{span}\{x - \sigma x : x \in V^{\otimes n}, \sigma \in \mathfrak{S}_n\}
\end{aligned}$$

可以验证[6] $I_S \cap V^{\otimes n} = \ker \pi$, 故给出同构. □

III. 外代数 外代数来自于微积分中的微分形式的运算. 下面, 假定域的特征均不为 2.

定义 3.10 (外代数) 对于线性空间 V, 在 $T(V)$ 上考虑理想

$$I_\wedge = \langle \quad x \otimes x \, : \, x \in V \quad \rangle$$

这是由齐次元生成的理想, 对应的商代数 $T(V)/I_\wedge$ 有自然的分次结构, 记为 $\bigwedge(V)$, 这被称为外代数. 上面的诱导的乘法此时改记为 $\wedge$.

定义 3.11 (外代数的同态) 对于线性映射 $V \xrightarrow{\varphi} W$, 可以规定

$$\bigwedge(\varphi) : \bigwedge(V) \longrightarrow \bigwedge(W) \qquad x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \longmapsto \varphi(x_1) \wedge \ldots \wedge \varphi(x_n)$$

这是一个分次代数同态. 这让 $\bigwedge(-)$ 成为一个函子.

命题 3.12 (对称代数结构定理) 关于对称代数 $S(V)$ 有如下结构定理

(1) $\bigwedge(V)$ 的 n 次齐次部分 $\bigwedge^n(V)$, 每个元素可以表为

$$\sum k \cdot x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \quad (\text{有限和}) \quad k \in K, x_i \in V$$

---

[6] 因为 $\pi(x - \sigma(x)) = \frac{1}{n!}\left(\sum \tau x - \sum \tau\sigma x\right) = 0$; 反之, 因为 $\ker \pi = \operatorname{im}(1-\pi)$, 而 $(1-\pi)(x) = x - \frac{1}{n!}\sum(x - \sigma x) = \frac{1}{n!}\sum(x - \sigma x)$.

且满足

$$\begin{cases} \ldots\wedge x\wedge y\wedge\ldots=-(\ldots\wedge y\wedge x\wedge\ldots) \\ \ldots\wedge(x_1+x_2)\wedge y\wedge\ldots=(\ldots\wedge x_1\wedge y\wedge\ldots)+(\ldots\wedge x_2\wedge y\wedge\ldots) \\ \ldots\wedge x\wedge(y_1+y_2)\wedge\ldots=(\ldots\wedge x\wedge y_1\wedge\ldots)+(\ldots\wedge x\wedge y_2\wedge\ldots) \\ \ldots\wedge(kx)\wedge\ldots=k(\ldots\wedge x\wedge\ldots) \end{cases}$$

且两个元素相等当且仅当可以用上述运算律能把一个化成另一个.

(2) $S(V)$ 的每个元素可以唯一地表示成

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_n \quad (\text{有限和}) \quad a_n\in\bigwedge^n(V)$$

且乘法为字的拼接

$$\underbrace{x_1\wedge\ldots\wedge x_n}_{\in\bigwedge^n(V)}\wedge\underbrace{y_1\wedge\ldots\wedge y_m}_{\in\bigwedge^m(V)}=\underbrace{x_1\wedge\ldots\wedge x_n\wedge y_1\wedge\ldots\wedge y_m}_{\in\bigwedge^{n+m}(V)}$$

证明 我们要说明

$$I_\wedge=\langle\quad x\otimes x\ :\ x\in V\quad\rangle=\langle\quad x\otimes y+y\otimes x\ :\ x,y\in V\quad\rangle$$

然后就和 (3.5) 的过程一样了. 包含于是因为 $x\otimes x=\frac{1}{2}(x\otimes x+x\otimes x)$, 包含是因为 $x\otimes y+y\otimes x=(x+y)\otimes(x+y)-x\otimes y-y\otimes x$. □

命题 3.13 对于线性空间 V, 可以构造如下的

$$(W,\tau)\ \Big|\ W\ \text{是线性空间};\ n\text{-重反对称线性映射}\ \tau:V^n\to W$$

满足如下的泛性质 [7]

$\forall$线性空间 U

$\forall n$-重反对称线性映射 $\varphi:V^n\to U$

$\exists!$线性映射 $\psi:W\to U$

s. t. $\psi\circ\tau=\varphi$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\varphi"'] & W \arrow[d, dashed, "\psi"] \\ & U \end{tikzcd}$$

且这样的 (W,τ) 在同构意义下唯一.

[7] 当中的 n 重反对称线性映射 φ 指的是首先 φ 是 n 重线性映射, 且 $\varphi(\ldots,x,y\ldots)=-\varphi(\ldots,y,x,\ldots)$.

证明 取 $W = \bigwedge^n(V)$, 取

$$\tau : V^n \longrightarrow \bigwedge^n(V) \qquad (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$$

则

$$\psi : \bigwedge^n(V) \longrightarrow U \qquad x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \longmapsto \varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

是唯一的选择. □

命题 3.14 假如线性空间 V 有一组基 $\{x_i\}_{i \in I}$, 对 I 任意赋予全序, 则 $\bigwedge^n(V)$ 的有如下一组基

$$\{x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_n} : i_1 < \ldots < i_n\}$$

证明 根据 (3.13), 任何一个 n 重反对称线性映射 φ 都由且只有上述基处的值决定. 从而是一组基. □

推论 3.15 假如线性空间 V 满足 $\dim V = m$, 则 $\bigwedge^n(V) = \binom{m}{n}$. 特别地, $\bigwedge^0(V) = K$; $\bigwedge^1(V) = V$; $n > m$ 时, $\bigwedge^n(V) = 0$.

评注 3.16 (行列式) 对于 n 维线性空间 V 上的线性变换 A, 则 $\bigwedge^n(V) \xrightarrow{\bigwedge^n(A)} \bigwedge^n(V)$ 上是一个位似, 其比例就是 $\det A$. 换言之, 挑选非零元 $e \in \bigwedge^n(V)$, 则 $(\bigwedge^n(A))(e) = (\det A)e$. 具体来说, $A = I$ 时位似比为 1, 而 $\bigwedge^n(A)$ 还是 n 重反对称线性函数, 这只能是行列式.

评注 3.17 (叉乘) 对于 $V = \mathbb{R}^3$, 挑选标准基 $\{e_1, e_2, e_3\}$, 因为 $\dim \bigwedge^2(V) = \dim \bigwedge^1(V) = \dim V = 3$, 作等同

$$e_1 \wedge e_2 = e_3 \qquad e_2 \wedge e_3 = e_1 \qquad e_3 \wedge e_1 = e_2$$

将 $\bigwedge^2(V)$ 视为 V. 因为空间中的叉乘也满足上述性质, 故实际上叉乘就是上述等同下的 $\wedge$.

下面, 我们给出很多书中会给出的另一种外代数的给法. 但是此时需要 K 的特征为 0. 回忆

$$\operatorname{sgn} : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \{\pm 1\} \qquad \sigma \longmapsto \begin{cases} 1 & \sigma \text{ 可以写成偶数个偶置换} \\ -1 & \sigma \text{ 可以写成奇数个偶置换} \end{cases}$$

定义 3.18 (反对称化) 同样回忆 $\mathfrak{S}_n$ 在 $V^{\otimes n}$ 上的作用. 称张量 $x \in V^{\otimes n}$ 是反对称的, 如果对任何 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, 都有 $\sigma x = \operatorname{sgn}(\sigma) x$. 可以定义**反对称化**

$$\pi : V^{\otimes n} \longrightarrow V^{\otimes n} \qquad x \longmapsto \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \sigma x$$

不难验证, π 有如下性质

- 若 x 反对称, 则 $\pi(x) = x$.
- 特别地, π 的像是全体反对称张量.
- $\pi(\pi(x)) = \pi(x)$.
- 特别地, $\operatorname{im}(1-\pi) = \ker \pi$.

记 $V^{\otimes n}$ 中的全体对称张量为 $\overline{\Lambda}^n(V)$, 考虑 $\overline{\Lambda}(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \overline{\Lambda}^n(V)$, π 可以自动延拓到 $\overline{\Lambda}(V)$ 上. 在上面可以定义乘法, 对于 $x \in \overline{\Lambda}^m(V), y \in \overline{\Lambda}^n(V)$,

$$x \wedge y = \frac{(m+n)!}{m!n!} \pi(x \otimes y)$$

不难验证这让 $\overline{\Lambda}(V)$ 成为一个分次代数.

命题 3.19 有如下分次代数的同构

$$\varphi : \overline{\Lambda}(V) \xrightarrow{\sim} \bigwedge(V) \qquad \sum x_1 \wedge \otimes \ldots \otimes \wedge x_n \longmapsto \sum x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$$

其逆映射是

$$\psi : \bigwedge(V) \xrightarrow{\sim} \overline{\Lambda}(V) \qquad \sum x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \longmapsto \pi\left(\sum x_1 \otimes \ldots \otimes x_n\right)$$

证明 回看 $I_\wedge$, 实际上

$$\begin{aligned} I_\wedge \cap V^{\otimes n} &= \operatorname{span}\left\{ \begin{matrix} x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \\ +x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)} \end{matrix} : \begin{matrix} x_1, \ldots, x_n \in V \\ \sigma \in \mathfrak{S}_n \text{是交换相邻两位的置换} \end{matrix} \right\} \\ &= \operatorname{span}\left\{ x - \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma x : x \in V^{\otimes n}, \sigma \in \mathfrak{S}_n \right\} \end{aligned}$$

可以验证 $I_\wedge \cap V^{\otimes n} = \ker \pi$, 故给出同构. □

4 外代数的计算

I. 基本结果

命题 4.1 对于线性空间 V, $x_1 \wedge \ldots \wedge x_k \in \bigwedge(V)$, 如果有两个 x_i 相同, 则

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_k = 0$$

命题 4.2 对于线性空间 V, $v_1, \ldots, v_k \in V$, 则

$$v_1, \ldots, v_k \text{ 线性无关 } \iff v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \neq 0$$

证明 首先, 线性相关时某个向量能够被其他向量表出, 而一串 $x_1 \wedge \ldots \wedge x_k$ 中如果有两个 x_i 相同, 则 $x_1 \wedge \ldots \wedge x_k = 0$. 反之, 如果线性无关, 可以找到很多反对称线性函数 φ 使得 $\varphi(x_1 \wedge \ldots \wedge x_k) \neq 0$, 或者直接利用基的论断也可以快速得到. □

命题 4.3 对于线性空间 V, $v_1, \ldots, v_k \in V$,

$$v_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge v_{\sigma(k)} = \operatorname{sgn}(\sigma) v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$$

命题 4.4 对于线性空间 V, $v_1, \ldots, v_k \in V$, $w_1, \ldots, w_k \in V$, 如果 $w_i = \sum_j a_{ij} v_j$, 则

$$w_1 \wedge \ldots \wedge w_k = \det(a_{ij}) v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$$

证明 实际上

$$\begin{aligned} w_1 \wedge \ldots \wedge w_k &= \sum_{j_1, \ldots, j_k} a_{1j_1} \ldots a_{kj_k} \, v_{j_1} \wedge \ldots \wedge v_{j_k} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} a_{1\sigma(1)} \ldots a_{k\sigma(k)} \, v_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge v_{\sigma(k)} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \ldots a_{k\sigma(k)} \, v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \\ &= \det(a_{ij}) v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \end{aligned}$$

命题得证. □

II. 外代数的配合

命题 4.5 对于有限维线性空间 V, 考虑其对偶空间 $V^\vee$, 有线性空间的同构

$$\begin{array}{rrcl} \varphi: & \bigwedge^k(V^\vee) & \xrightarrow{\sim} & \left(\bigwedge^k(V)\right)^\vee \\ & f^1\wedge\ldots\wedge f^k & \longmapsto & \left[e_1\wedge\ldots\wedge e_k \mapsto \det(f^i(e_j))\right] \end{array}$$

证明 只需要验证这给出一个单同态, 剩余由维数的计算保证. 首先这个映射是良定义的. 若对于任何一组 $\{e_i\}$ 都有 $\det(f^i(e_j))=0$, 线性代数告诉我们, f^i 线性相关, 这迫使 $f^1\wedge\ldots\wedge f^k=0$. □

评注 4.6 (配合) 换言之, 我们构造了配合

$$\begin{array}{rrcl} \langle -,-\rangle: & \bigwedge^k(V)\times\bigwedge^k(V^\vee) & \longrightarrow & K \\ & (e_1\wedge\ldots\wedge e_k, f^1\wedge\ldots\wedge f^k) & \longmapsto & \det(f_i(e_j)) \end{array}$$

假如读者考虑 $V^{\otimes n}$ 与 $(V^\vee)^{\otimes n}$ 的配合, 按照 *(3.19)* 的等同, 这样给出的配合将是

$$\langle -,-\rangle' = \frac{1}{k!}\langle -,-\rangle$$

但是大家更常用之前我们定义的那个配合.

评注 4.7 (内乘) 定义内乘

$$\begin{array}{rrcl} \lrcorner: & \bigwedge^m(V)\times\bigwedge^{m+n}(V^\vee) & \longrightarrow & \bigwedge^n(V^\vee) \\ & (u,v^*) & \longmapsto & \left[u\lrcorner v^*: w\mapsto \langle v^*, u\wedge w\rangle\right] \end{array}$$

这也被视作配合. 一般地, 当 $n=0$ 时, 上述就是原本的配合, 特别地, $e\in V, f\in V^\wedge$, $e\lrcorner f=f(e)$.

实际上, 对于 $y\in V$, $x_i^*\in V^\vee$, 不难计算出

$$y\lrcorner(x_0^*\wedge\ldots\wedge x_k^*) = \sum_{i=0}^k (-1)^i x_0^*\wedge\ldots\wedge x_i^*(y)\wedge\ldots\wedge x_n^*$$

这里对常数的 $\wedge$ 就是数乘; 根据这个结果, 如果 $u\in\bigwedge^k(V^\vee)$, $w\in\bigwedge^h(V^\vee)$

$$y\lrcorner(v^*\wedge w^*) = (y\lrcorner v^*)\wedge w^* + (-1)^k v^*\wedge(y\lrcorner w^*)$$

5 例子与应用

I. Grassmann 簇 回忆 (3.17), 我们解释了 $\mathbb{R}^3$ 中的叉乘和外积的关系. 一般而言, 想要将三维欧式空间的解析几何手段推广到一般线性空间上是过分奢求, 一般而言点积不是自然的, 我们也没有一般的垂直的概念, 但可以在对偶空间中论配合. 而叉积既不自然, 也难以推广至高维. 但好在有外积这一手段, 可以让我们不难地推及一些结论.

定义 5.1 (Grassmann 簇) 固定域 K, 其所有 k 维线性子空间构成的集合我们记为 $G(k,V)$. 这被称为 **Grassmann 簇**.

例 5.2 有如下例子

- $k=n=\dim V$ 时, $G(k,V)$ 只有一个元素即 V 本身.
- $k=1$ 时, $G(1,V)$ 就是 $n=\dim V-1$ 维的射影空间. 射影空间还可以定义为商集

$$\mathbb{P}K^n = V\setminus 0 \Big/ \sim : x\sim y \iff \exists k\in K, \mathrm{s.t.}\, x=ky$$

- 回忆三维欧式空间 $\mathbb{R}^3$, 全体一维子线性空间由其方向向量决定, 全体二维线性子空间由其法向量决定. 故 $G(1,\mathbb{R}^3)=G(2,\mathbb{R}^3)$.

命题 5.3 对于 n 维线性空间 V, 有如下双射

$$\begin{aligned} \varphi: \quad G(k,V) &\longrightarrow G(n-k,V^\vee) \\ W &\longmapsto W^\perp := \{f\in V^\vee : \forall e\in w, f(e)=0\} \end{aligned}$$

证明 先说明良定义性, 选择 W 的一组基扩充为 V 的一组基, 再考虑其对偶基, $W^\perp$ 恰好由扩充的向量对应的对偶基张成, 故维数得到保证. 双射也不难验证. □

这就是欧式空间中垂直关系的类比.

命题 5.4 对于 n 维线性空间 V, 有如下单射

$$\begin{aligned} \psi: \quad G(k,V) &\longrightarrow G\left(1,\textstyle\bigwedge^k(V)\right) \\ W &\longmapsto K\cdot(w_1\wedge\ldots\wedge w_k) \end{aligned}$$

其中 $w_1,\dots,w_k$ 是 W 的任意一族基.

证明 先说明和基的选择无关, 这根据 (4.4). 为了说明是单射, 实际上, 任意选取 $\psi(W)$ 中的非零元 v, 则根据 (4.2) 有 $W=\{w\in V, v\wedge w=0\}$, 从而反过来决定 W. □

这就是三维欧式空间中法向量的类比, 在三维空间中, 二维子空间一组基的叉积就是法向量.

II. 微分形式 为了初等起见, 我们先将目光局限在欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 U 上, 可以在每一点形式地指派一个 $\mathbb{R}^n$ 作为**切空间**, 例如在 p 点, 记为 T_pU, 当中元素被称为**切向量**. 在 $\mathbb{R}^n$ 中任意一个开集 U 上定义的光滑映射 $f:U\to\mathbb{R}^m$, 在每一点 $p\in U$, 诱导了 **切映射**

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f: \quad \mathsf{T}_pU &\longrightarrow \mathsf{T}_{f(p)}\mathbb{R}^m \\ v &\longmapsto \lim_{t\to 0}\frac{f(p+vt)-f(p)}{t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(p+vt)\Big|_{t=0} \end{aligned}$$

给定光滑函数 $U\xrightarrow{f}\mathbb{R}$, 那么上述映射实际上诱导了一个 $\mathsf{T}_pU\xrightarrow{\mathrm{d}f}\mathsf{T}_f(p)\mathbb{R}=\mathbb{R}$ 的线性映射, 故 $\mathrm{d}f$ 实际上可以视作是 T_pU 上的线性函数, 这启示我们定义 **余切空间**

$$\mathsf{T}_p^\vee(V)=(\mathsf{T}_p(V))^\vee$$

其中元素被称为余切向量.

假如记 $\frac{\partial}{\partial x^i}=(\underbrace{\dots}_{0},\underbrace{1}_{i},\underbrace{\dots}_{0})$, 那么 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ 构成 T_pU 的一组基, 之所以这么记是因为

$$\mathrm{d}f\frac{\partial}{\partial x^i}=\frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p$$

倘若选定 $\mathbb{R}^n$ 的各分量的代表元 $x^1,\dots,x^n$, 我们还可以视 x^i 为 U 到 $\mathbb{R}$ 的函数如下的投影映射

$$x^i:U\longrightarrow\mathbb{R}\qquad (x^1,\dots,x^n)\longmapsto x^i$$

那么, 根据定义, 在任意一点 $p\in U$

$$\mathrm{d}x^i:\mathsf{T}_pU\longrightarrow\mathsf{T}_{x^i(p)}\mathbb{R}=\mathbb{R}\qquad (v^1,\dots,v^n)\longmapsto v^1$$

那么, 上面的结论说明 $\mathrm{d}x^i\frac{\partial}{\partial x^i}=\delta^i_j$, 这说明我们可以视 $\mathrm{d}x^i$ 为 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 的对偶基. 一般而言对于连续函数 $U\xrightarrow{f}\mathbb{R}$, 根据对偶基的公式, 有

$$\mathrm{d}f=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}\bigg|_p\mathrm{d}x^i$$

这就是一阶微分的严格化.

我们已经将一阶微分形式构造出来, 我们不难根据微积分的直观, 构造 k 阶微分形式为余切空间的外代数的 k 次部分

$$\Lambda^k_p(U)=\bigwedge^k(\mathsf{T}^\vee_p(U))$$

但是目前为止, 以上的这些向量这都是逐点定义的, 所有微分形式无非只是线性代数的重现, 下面的定义最为关键.

倘若在 U 每一点都指定一个切向量, 例如在 p 点指定 $v_p\in\mathsf{T}_pU$, 因为在每个点的切空间都以 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 作为基, 假设 $v_p=\sum_{i=1}^n f^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}$, 若 $f^i:p\mapsto f^i(p)$ 作为 U 上的函数是光滑的, 则称这种指定 $[v:p\mapsto v_p]$ 是**光滑切向量场**.

同样, 倘若在 U 的每一点都指定一个余切向量, 例如在 p 点指定 $\omega_p\in\mathsf{T}^\vee_pU$, 因为在每个点的余切空间都以 $\mathrm{d}x^i$ 作为基, 假设 $\omega_p=\sum_{i=1}^n g^i(p)\mathrm{d}x^i$, 若 $g^i:p\mapsto f^i(p)$ 作为 U 上的函数是光滑的, 则称这种指定 $[\omega:p\mapsto\omega_p]$ 是 **1-形式**.

亦同样, 倘若在 U 的每一点都指定一个 $\Lambda^k_p(U)$ 中元素, 例如在 p 点指定 $\omega_p\in\Lambda^n_p(U)$, 因为在每个点的余切空间都以

$$\{\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}:1\le i_1<\ldots i_k\le n\}$$

作为基, 假设 ω_p 在此基下的坐标都是关于 p 光滑的, 则称这种指定 $[\omega:p\mapsto\omega_p]$ 是 **k-形式**.

不难发现, 实际上 0-形式就是光滑函数. 这样, $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $\mathrm{d}x^i$, $\mathrm{d}f$ 可以不再是逐点的了, 他们分别成为切向量场, 1-形式, 1-形式.

至此, 我们已经几乎建立完了全部有关微分形式的结构. 唯独差了在 Stokes 公式中表现突出的外微分算子 $[\mathrm{d}:\omega\mapsto\mathrm{d}\omega]$.

我们只要指出每个单项如何微分即可, 因为 d 我们期待是加性的. 对于光滑函数 $f:U\to\mathbb{R}$, 约定

$$\mathrm{d}\left(f\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\right)=\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}$$

再带入 $\mathrm{d}f=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i$ 可得

$$\mathrm{d}\left(f\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}$$

不难验证的是 d 满足以下几条

- $\mathrm{d}f=\mathrm{d}f$.
- $\mathrm{d}^2=0$.
- $\mathrm{d}(\omega\wedge\upsilon)=\mathrm{d}\omega\wedge\upsilon+(-1)^k\omega\wedge\mathrm{d}\upsilon$, 如果 ω 是 k-形式.

不难验证地是, 这实际上也反过来决定了 d.

鉴于行文目标所限, 对微分形式的介绍至此也就戛然而止了, 以上只是呈现欧式空间的开集上如何严格地建立起微分形式, 如欲深入学习, 可以继续学习微分流形.