张量漫谈 第三篇

熊锐

2018 年 9 月 22 日

Abstract

张量为什么要如此定义？这或许是一个让人头疼的问题. 因为其复杂的而多样定义让人感到困惑. 简单的定义无法抓到本质, 复杂的定义缺乏解释. 更为关键的是, 似乎在目力所及的范围内也很难看到张量的用途.

本系列的目的在于将张量的体量给一个相对完善的介绍, 希望体例完善的同时, 更能把阐述明白其用途. 不同篇难度和基础知识要求不同, 本篇是第三篇, 需要模论的基本知识. 本篇的目的在于介绍一般模的张量积, 并力求给出更多刻画.

Contents

致谢: 封面无聊图来自煎蛋网 (jandan.net/pic).

1　张量积

I. 模的张量积　对于环 R, 模 A, B 我们想要找到一个这样的 Abel 群, 当中的元素是 $a \otimes b$ 的线性组合, 满足

$$\begin{cases} (a_1 + a_2) \otimes b = a_1 \otimes b + a_2 \otimes b \\ a \otimes (b_1 + b_2) = a \otimes b_1 + a \otimes b_2 \\ ra \otimes b = a \otimes rb \end{cases} \qquad a_* \in A, b_* \in B, r \in R$$

但是最后一条改为 $ar \otimes b = a \otimes rb$ 更加自然, 这需要预先改 A 为右模. 类似线性空间的定义方式, 需要先定义一个类似双线性映射的概念.

定义 1.1 (平衡积) *对于环 R, 右模 A, 左模 B, 对于 Abel 群 G, 称 $f : A \otimes B \to G$ 是* **平衡积 (balanced product)** *, 如果*

$$\begin{cases} f(a_1 + a_2, b) = f(a_1, b) + f(a_2, b) \\ f(a, b_1 + b_2) = f(a, b_1) + f(a, b_2) \\ f(ar, b) = f(a, rb) \end{cases} \qquad a_* \in A, b_* \in B, r \in R$$

命题 1.2 (张量积) *对于右模 A, 左模 B, 可以构造如下的*

$$(T, \tau) \quad \Big| \quad T \text{ 是 Abel 群; 平衡积 } \tau : A \times B \to T$$

满足如下的泛性质

$$\begin{aligned} &\forall \text{Abel 群 } U \\ &\forall \text{平衡积 } \varphi : A \times B \to U \\ &\exists! \text{群同态 } \psi : T \to U \\ &\text{s.t. } \psi \circ \tau = \varphi \end{aligned} \qquad \Bigg| \qquad \begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\varphi"'] & T \arrow[d, dashed, "\psi"] \\ & U \end{tikzcd}$$

*且这样的 (T, τ) 在同构意义下唯一. 这被称为 A 和 B 的***张量积***, 记为 $A \otimes_R B$.*

证明　考虑以 $A \times B$ 的元素形式地作为基张成的线性空间 $F = K^{A \times B}$, 方便起见, 就以 (a, b) 记对应的基. 那么 F 当中的元素是有限个形如 $n(v, w)$ 的形

式和, 其中 $n\in\mathbb{Z}, a\in A, b\in B$. 再考虑元素生成的 Abel 群

$$H=\left\langle \begin{array}{l|l} (a_1+a_2,b)-(a_1,b)-(a_2,b) & a_1,a_2,a\in A \\ (a,b_1,b_2)-(a,b_1)-(a,b_2) & b_1,b_2,b\in B \\ (ar,b)-(a,rb) & r\in R \end{array}\right\rangle$$

定义 $T=F/H$, 为了方便起见, 记

$$\sum n(a,b)+H \quad\triangleq\quad \sum na\otimes b \qquad \text{(均为有限和)}$$

以及

$$\tau: A\times B\longrightarrow T \qquad (a,b)\longmapsto a\otimes b$$

下面我们开始验证泛性质, 任意给平衡积 $\varphi: A\times B\to U$, 那么定义

$$\psi: T\longrightarrow U \qquad \sum na\otimes b\longmapsto \sum n\varphi(a,b)$$

注意到这是良定义的, 且显然是 Abel 群同态, 且 $\psi\circ\tau=\varphi$. 而反之要使 $\psi\circ\tau=\varphi$, 对于 $(a,b)\in V\times W$, 这要求 $\psi(a\times b)=f(a,b)$, 不难看出 ψ 的选择是唯一的, 故唯一性得证.

关于同构下唯一的论断是泛性质的一般规律, 证明方法如出一辙. □

定义 1.3 对于模同态 $A\xrightarrow{\varphi}N, B\xrightarrow{\psi}M$, 则存在唯一的 $A\otimes B\xrightarrow{\varphi\otimes\psi}N\otimes M$ 满足

$$(\varphi\otimes\psi)(a\otimes b)=\varphi(a)\otimes\varphi(b)$$

这被称为同态的张量积.

同线性空间的张量一样, 根据上面证明过程中的构造, 有如下一系列刻画结构的结果.

命题 1.4 (张量积结构定理) 对于右模 A, 左模 B, 关于张量积 $A\otimes_R B$ 有如下结构上的描述

(1) $A\otimes_R B$ 中的元素都形如 *(元素形式)*

$$\sum na\otimes b \qquad \text{(有限和)} \qquad n\in\mathbb{Z}, a\in A, b\in B$$

(2) $A \otimes_R B$ 中的元素满足如下运算律 *(运算律)*

$$\begin{cases} (a_1 + a_2) \otimes b = a_1 \otimes b + a_2 \otimes b \\ a \otimes (b_1 + b_2) = a \otimes b_1 + a \otimes b_2 \\ (na) \otimes b = a \otimes (nb) = na \otimes b \end{cases}$$

(3) 对于 $x = \sum na \otimes b \in A \otimes_R B$, *(消失判据)*

$$x = 0 \iff \text{通过 (2) 的运算律能把 } x \text{ 化成 } 0$$

(4) 对于 $x, y \in A \otimes_R B$, *(相等判据)*

$$x = y \iff \text{通过 (2) 的运算律能把 } x \text{ 化成 } y$$

推论 1.5 (消失判据) 对于右模 A, 左模 B,

$$\sum_{i=1}^{I} x_i \otimes y_i = 0$$

的充分必要条件是存在 R-矩阵 $(a_{ij}) \in R^{I \times J}$ 和 $\{x_j'\}_{j=1}^{J}$ 使得

$$x_i = \sum_j x_j' a_{ij} \qquad 0 = \sum_i a_{ij} y_i$$

记号 1.6 对于环 R, S, "一个左 R 右 S 模 M" 会直接说成 "模 ${}_RM_S$".

命题 1.7 (双模的张量积) 对于模 ${}_RM_S, {}_SN_T$, 在 $M \otimes_S N$ 上有唯一的左 R 右 T-模结构满足

$$r(a \otimes b) = (ra) \otimes b \qquad (a \otimes b)t = a \otimes (bt)$$

这被称为双模的张量积.

证明 上述性质如果是良定义的, 不难验证其定义的运算必定是模结构. 而良定义性只需注意到 $(a, b) \mapsto (ra) \otimes b$ 是双线性的, 从而诱导了 $a \otimes b \mapsto (ra) \otimes b$. 另一边是类似的. □

一个直接的问题是我们得到的张量积和线性空间的张量积是否一致?

命题 1.8 *对于 K-线性空间 V,W, 将 V 中的数乘视为作用在右边, 则作为线性空间的张量积 $V\otimes_K W$ 和作为模的张量积 $V\otimes_K W$ 同构.*

证明 只需要验证我们构造的模的张量积作为线性空间满足线性空间张量积的泛性质. 首先, 作为模的张量积 $V\otimes_K W$ 根据 (1.7) 是线性空间, 其次, $(v,w)\mapsto v\otimes w$ 不难验证是双线性映射. 而泛性质的部分则是显然的, 因为线性空间是 Abel 群, 双线性函数当然是平衡积. $\square$

定义 1.9 (平衡积) 对于模 ${}_RA_S, {}_SB_T, {}_RC_T$, 称 $f: A\otimes B\to C$ 是 **S,T 平衡积 (balanced product)**, 如果

$$\begin{cases} f(a_1+ra_2,b)=f(a_1,b)+rf(a_2,b) \\ f(a,b_1+b_2t)=f(a,b_1)+f(a,b_2)t \\ f(ar,b)=f(a,rb) \end{cases} \qquad \forall \begin{cases} a_*\in A, b_*\in B, \\ r\in R, s\in S, t\in T \end{cases}$$

评注 1.10 *对于模 ${}_RA_S, {}_SB_T$, 类似 (1.2) 可以写出 S,T-平衡积的泛性质, 类似 (1.8) 可以证明 $A\otimes_S B$ 满足泛性质.*

II. 代数的张量积 下面我们来简单介绍一般的代数的概念.

定义 1.11 (代数) *令 K 是一个环, 称一个 K-模 R 是一个* **K-代数 (algebra)** *如果 R 上有乘法 $(x,y)\mapsto xy$ 使得*

(1) $\forall x,y,z\in R, \quad x(yz)=(xy)z.$ *(结合律)*

(2) $\exists 1\in R, \forall x\in R, \quad \text{s.t. } 1x=x1=x.$ *(单位律)*

(3) $\forall x,y,z\in R, \quad x(y+z)=xy+xz, (x+y)z=xz+yz.$ *(分配率)*

等价地 R 是一个环, 配上一个环同态 $K\xrightarrow{\varphi}R$.

称两个代数之间的映射 $R\xrightarrow{\psi}R'$ 是 **代数同态** *如果 ψ 既是 K-模同态, 又是环同态即 $\psi(1)=1, \psi(xy)=\psi(x)\psi(y)$.*

假如等价地视作代数为环配上同态, 假设以上两个代数对应于 $K\xrightarrow{\varphi}R$ 和 $K\xrightarrow{\varphi'}R'$, 那么对 ψ 是代数同态当且仅当 ψ 是环同态, 且 $\psi\circ\varphi=\varphi'$.

类似域上的代数, 也有如下的命题.

命题 1.12 令 K 是一个环, 对于两个 K 代数 R_1, R_2, 他们作为线性空间的张量积 $R_1 \otimes R_2$ 上有自然的 K-代数结构满足

$$(x_1 \otimes x_2)(y_1 \otimes y_2) = (x_1 y_1) \otimes (x_2 y_2)$$

这被称为代数的张量积.

命题 1.13 对于交换环 K, 对于两个 K-交换代数 R_1, R_2, 则存在

$$(T, \iota_1, \iota_2) \quad \Bigg| \quad K\text{-交换代数 } T\text{, 以及 } K\text{-代数同态} \begin{cases} \iota_1 : R_1 \to T \\ \iota_2 : R_2 \to T \end{cases}$$

满足如下的泛性质

$$\begin{aligned} &\forall K\text{-交换代数 } S \\ &\forall K\text{-代数同态} \begin{cases} \varphi_1 : R_1 \to S \\ \varphi_2 : R_2 \to S \end{cases} \\ &\exists ! \lambda : T \to S \\ &\quad \text{s.t.} \begin{cases} \lambda \circ \iota_1 = \varphi_1 \\ \lambda \circ \iota_2 = \varphi_2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} & R_1 \arrow[dr, "\iota_1"] \arrow[drr, bend left, "\varphi_1"] & & \\ K \arrow[ur] \arrow[dr] & & T \arrow[r, "\lambda"] & S \\ & R_2 \arrow[ur, "\iota_2"] \arrow[urr, bend right, "\varphi_2"'] & & \end{tikzcd}$$

且这样的 (T, ι_1, ι_2) 在同构意义下唯一.

2 张量积的性质

I. 基本性质 下面一部分性质和线性空间一样, 有的则不然.

命题 2.1 (单位率) 对于环 R, 左模 M, 有同构

$$\varphi : R \underset{R}{\otimes} M \xrightarrow{\sim} M \qquad r \otimes x \longmapsto rx$$

右模 N, 有同构

$$\psi : N \underset{R}{\otimes} R \xrightarrow{\sim} N \qquad y \otimes r \longmapsto yr$$

命题 2.2 (结合律) 对于模 ${}_RA_S, {}_SB_T, {}_TC_U$, 则有同构

$$\varphi : \left(A \underset{S}{\otimes} B\right) \underset{T}{\otimes} C \xrightarrow{\sim} A \underset{S}{\otimes} \left(B \underset{T}{\otimes} C\right) \qquad (a \otimes b) \otimes c \longmapsto a \otimes (b \otimes c)$$

一般的 "交换律" 一般来说并不成立. 需要指出, 当 R 是交换环时, R-模视为左模右模皆可, 这才成就了交换律的性质.

命题 2.3 (分配率) 对于右 R-模 M, 一族左 R-模 $\{N_i\}_{i\in I}$, 有

$$\varphi : M \underset{R}{\otimes} \left(\bigoplus_{i\in I} N_i\right) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i\in I} M \underset{R}{\otimes} N_i \qquad x \otimes (y_i)_i \longmapsto (x \otimes y_i)_i$$

逆映射是

$$\psi : \bigoplus_{i\in I} M \underset{R}{\otimes} N_i \xrightarrow{\sim} M \underset{R}{\otimes} \left(\bigoplus_{i\in I} N_i\right) \qquad (x_i \otimes y_i)_i \longmapsto \sum x_i \otimes y_i$$

对于一族右 R-模 $\{M_i\}_{i\in I}$, 左 R-模 N, 有

$$\varphi' : \left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \underset{R}{\otimes} N \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i\in I} M_i \underset{R}{\otimes} N \qquad (x_i)_i \otimes y \longmapsto (x_i \otimes y)_i$$

逆映射是

$$\psi' : \bigoplus_{i\in I} M_i \underset{R}{\otimes} N \xrightarrow{\sim} \left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \underset{R}{\otimes} N \qquad (x_i \otimes y_i)_i \longmapsto \sum x_i \otimes y_i$$

我们知道实际上 K-线性空间都是自由的, 换言之都同构于 K 的直和, 以上结果实际上可以得到线性空间的很多结论. 如何在一般的模上借用线性代数 "找基" 的操作? 就是利用自由模.

II. 伴随性 同样, 先回忆 Hom 算子.

定义 2.4 对于左 R-模 M, N, 记 $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ 为全体 M 到 N 的 R-同态. 这具有 *Abel* 群结构

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$$

对于模 ${}_RM_S, {}_RN_T$, 则 $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ 具有自然的左 S 右 T-模结构

$$(s\,\varphi\,t)(x) = \varphi(xs)t$$

类似地, 对于右 R-模 M,N, 记 $\mathrm{Hom}^R(M,N)$ 为全体 M 到 N 的 R-同态, 这同样具有 *Abel* 群结构. 对于模 ${}_SM_R, {}_TN_R$, 则 $\mathrm{Hom}^R(M,N)$ 具有自然的左 T 右 S-模结构

$$(t\,\varphi\,s)(x) = t\varphi(sx)$$

对于左 R 右 S-模 M,N, 记 $\mathrm{Hom}_R^S(M,N)$ 为全体 M 到 N 的 R,S-同态这同样具有 *Abel* 群结构.

命题 2.5 对于左 R-模 M, 作为 R-模有 $\mathrm{Hom}_R(R,M) \cong M$; 对于右 R-模 M, 作为 R-模有 $\mathrm{Hom}^R(R,M) \cong M$.

定理 2.6 (伴随性) 对于模 ${}_RA_S, {}_SB_T, {}_RC_T$ 存在同构

$$\begin{aligned} \varphi: \quad \mathrm{Hom}_R^S(A,\mathrm{Hom}^T(B,C)) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R^T(A\otimes_S B, C) \\ f &\longmapsto [a\otimes b \mapsto [f(a)](b)] \end{aligned}$$

逆映射是

$$\begin{aligned} \psi: \quad \mathrm{Hom}_R^T(A\otimes_S B, C) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R^S(A,\mathrm{Hom}^T(B,C)) \\ f &\longmapsto [a \mapsto [b\mapsto f(a\otimes b)]] \end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned} \varphi': \quad \mathrm{Hom}_S^T(B,\mathrm{Hom}_R(A,C)) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R^T(A\otimes_S B, C) \\ f &\longmapsto [a\otimes b \mapsto [f(b)](a)] \end{aligned}$$

逆映射是

$$\begin{aligned} \psi': \quad \mathrm{Hom}_R^T(A\otimes_S B, C) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_S^T(B,\mathrm{Hom}_R(A,C)) \\ f &\longmapsto [b \mapsto [a\mapsto f(a\otimes b)]] \end{aligned}$$

证明 直观上理解, $\mathrm{Hom}_R^S(A,\mathrm{Hom}^T(B,C))$ 实际上就是将 $f: A\times B\to C$ 固定一个 A 的操作, 故实际上完全等同于

$$\left\{ f: A\times B\to C: \begin{array}{l} \forall a_* \in A, b_*\in B, r\in R, s\in S, t\in T \\ f(a_1+ra_2,b) = f(a_1,b)+rf(a_2,b) \\ f(a,b_1+b_2t) = f(a,b_1)+f(a,b_2)t \\ f(as,b) = f(a,sb) \end{array} \right\}$$

然后只需要验证泛性质. □

评注 2.7 以上结果说明对于模 ${}_SB_T$, 函子

$$-\otimes_S B : \begin{tikzcd} R\text{-Mod-}S & A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\varphi"'] & A\otimes_S B \arrow[d, "\varphi\otimes \mathrm{id}_B"] & R\text{-Mod-}T \\ \cdots & A' \arrow[r, mapsto] & A'\otimes_S B & \cdots \end{tikzcd}$$

和函子

$$\mathrm{Hom}^T(B,-) : \begin{tikzcd} R\text{-Mod-}T & C \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathrm{Hom}^T(B,C) \arrow[d, "-\circ\varphi"] & R\text{-Mod-}S \\ \cdots & C' \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Hom}^T(B,C') & \cdots \end{tikzcd}$$

互为伴随, 更准确地说 $-\otimes_S B$ 是 $\mathrm{Hom}^T(B,-)$ 的左伴随, $\mathrm{Hom}^T(B,-)$ 是 $-\otimes_S B$ 的右伴随.

另一则同构是类似的, 说明 $A\otimes_S -$ 是 $\mathrm{Hom}_R(A,-)$ 的左伴随, $\mathrm{Hom}_R(A,-)$ 是 $A\otimes_S -$ 的右伴随.

III. 环变换 回忆代数的定义 (1.11). 方便起见, 对于 R-代数 S, 即有环同态 $R\xrightarrow{\varphi}S$, 不妨对于 $r\in R$ 直接认为 $r\in S$, 尽管一般而言 φ 不是单的. 在这种记号下, 对 R-代数 S, 任意左 (右)S-模 M 都具有自然的左 (右)R-模结构.

定理 2.8 (遗忘) 对于 R-代数 S, 左 S-模 M, 有作为左 R-模的同构,

$${}_RS\underset{S}{\otimes}M=\mathrm{Hom}_S(S_R,M)={}_RM$$

右 S-模, 有作为右 R-模的同构,

$$M\underset{S}{\otimes}S_R=\mathrm{Hom}^S({}_RS,M)=M_R$$

其中 S 的 R-模结构已在同构中表明.

证明 无非是要说明 R-模结构相同, 这不难验证. □

定理 2.9 (伴随性) 对于 R-代数 S, 左 R-模 M, 左 S-模 N, 则有如下同构

$$\varphi : \mathrm{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_S(S \underset{R}{\otimes} M, N) \qquad f \longmapsto [s \otimes x \mapsto f(x)s]$$

右 R-模 M, 右 S-模 N, 则有如下同构

$$\varphi' : \mathrm{Hom}^R(M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^S(M \underset{R}{\otimes} S, N) \qquad f \longmapsto [x \otimes s \mapsto sf(x)]$$

证明　根据伴随性 (2.6) 和遗忘 (2.8) 显然. □

定理 2.10 (伴随性) 对于 R-代数 S, 左 R-模 M, 左 S-模 N, 则有如下同构

$$\varphi : \mathrm{Hom}_R(N, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_S(N, \mathrm{Hom}_R(S, M)) \qquad f \longmapsto [y \mapsto [s \mapsto sf(y)]]$$

右 R-模 M, 右 S-模 N, 则有如下同构

$$\varphi' : \mathrm{Hom}^R(N, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^S(N, \mathrm{Hom}^R(S, M)) \qquad f \longmapsto [y \mapsto [s \mapsto f(y)s]]$$

证明　根据伴随性 (2.6) 和遗忘 (2.8) 显然. □

评注 2.11 假如记 F 为将 S-模视作 R-模的遗忘函子, 那么上述结果说明 F 是 $S \otimes_R -$ 的左伴随, 同时也是 $\mathrm{Hom}_R(S, -)$ 的右伴随.

定理 2.12 (换环公式) 对于 R-代数 S, 模 $A_S, {}_SB$,

$$A \underset{S}{\otimes} B = A \underset{R}{\otimes} B \Big/ \Big\langle (as) \otimes b - a \otimes (sb) : a \in A, b \in B, s \in S \Big\rangle$$

证明　直观上看, 在 R 上作张量积和在 S 上作张量积的差别就是商掉的关系不同, S 上张量就是多商了

$$H' = \langle\, (a, sb) - (as, b) : a \in A, B \in B, s \in S \,\rangle$$

这里再商就是补足那些关系, 商掉的那部分恰好是 H' 在 $A \otimes_R B$ 中的像. □

3　正合性

I. 正合列　下面, 先回忆正合列的基本结论.

定义 3.1 (正合) 对于一串线性空间的同态

$$\ldots \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to \ldots$$

称在 B 处**正合 (exact)** 如果 $\ker\psi = \operatorname{im}\varphi$. 称整个同态序列是正合的如果处处正合.

称形如下的正合列是**短 (short) 正合列**

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

换言之, 在同构意义下 $B/A = C$. 同样, 正合列总能拆成正合列.

定理 3.2 (Schanuel 引理) 对于两个正合列,

$$0 \to L \xrightarrow{\iota} P \xrightarrow{\pi} M \to 0 \qquad 0 \to L' \xrightarrow{\iota'} P' \xrightarrow{\pi'} M \to 0$$

其中 P, P' 是投射模, 则有正合列的同构

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \oplus P' \arrow[r, "\iota\oplus\mathrm{id}"] \arrow[d, "\sim"] & P \oplus P' \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\sim"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & P \oplus L' \arrow[r, "\iota\oplus\mathrm{id}"'] & P \oplus P' \arrow[r, "\pi'"'] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

证明　径直证明上下两条短正合列均与

$$0 \to K \to P \oplus P' \xrightarrow{\pi+\pi'} M \to 0$$

同构. 可以取 $[P' \xrightarrow{\rho} P]$ 使得 $[P' \xrightarrow{\rho} P \xrightarrow{\pi} M] = [P' \xrightarrow{\rho'} M]$. 这样直接构造

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \oplus P' \arrow[r, "\iota\oplus\mathrm{id}"] & P \oplus P' \arrow[r, "\pi"] & M \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[u] & P \oplus P' \arrow[r, "\pi+\pi'"'] \arrow[u, "\theta"] & M \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0
\end{tikzcd}$$

其中 $\theta=\begin{pmatrix}\mathrm{id} & \rho \\ & \mathrm{id}\end{pmatrix}$, 不难验证交换图交换, 以及是同构, 于是自然诱导出 $K\to L\oplus P'$, 这也是同构. □

定理 3.3 (蛇形引理) 对于 R-模 M,M',M'',N,N',N'', 组成如下中间两行的交换图,

$$\begin{tikzcd}
 & M' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"] & M \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\beta"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "\sigma"'] & N \arrow[r, "\tau"'] & N'' &
\end{tikzcd}$$

则存在同态 δ 使得有如下正合列[1].

$$\ker\alpha\xrightarrow{\varphi}\ker\beta\xrightarrow{\psi}\ker\gamma\xrightarrow{\delta}\operatorname{cok}\alpha\xrightarrow{\sigma}\operatorname{cok}\beta\xrightarrow{\tau}\operatorname{cok}\gamma \tag{$*$}$$

其中 φ,ψ,τ,σ 是自然诱导出的. 若记包含同态 $[\ker\gamma\xrightarrow{\iota}M'']$, 自然同态 $[N'\xrightarrow{\pi}\operatorname{cok}\alpha]$, 则其中 δ 形如 "下台阶"

$$\pi\circ\sigma^{-1}\circ\beta\circ\psi^{-1}\circ\iota \quad \text{i.e.} \quad \pi(\sigma^{-1}(\beta(\psi^{-1}(\iota(\{x\})))))=\{\delta(x)\}$$

如下图

$$\begin{tikzcd}
 & \ker' \arrow[r] \arrow[d] & \ker \arrow[r] \arrow[d] & \ker'' \arrow[d] \arrow[dddll, rounded corners, "\delta"] & \\
 & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & N'' \arrow[d] & \\
 & \operatorname{cok}' \arrow[r] & \operatorname{cok} \arrow[r] & \operatorname{cok}'' &
\end{tikzcd}$$

证明 证明无非是利用追图的手段每一处都验证. 方便起见, 我们采取不那么标准但是自明的数学语言, 字母换为最大的那张交换图.

[1]对于同态 $A\xrightarrow{\varphi}B$, 余核是 $B/\operatorname{im}\varphi$.

先定义连接同态 δ. 对于 $x \in \ker''$, 设 $x \mapsdown y$, 因为满射, 存在 $z \mapsto y$, 设 $z \mapsdown w$, 因为 $x \mapsdown y \mapsdown 0$ 故 $z \mapsto y \mapsdown 0$ 故 $z \mapsdown w \mapsto 0$, 故存在 $u \mapsto w$, 设 $u \mapsdown v$, 定义 $\delta(x) = v$.

然后说明良定义性, 只需要说明按照上述取法 0 一定取成 0. 此时 $0 = x \mapsdown y = 0$, 故 $z \mapsto y = 0$, 故存在 $a \mapsto z$, 设 $a \mapsdown b$, 因为 $a \mapsto z \mapsdown w$, 故 $a \mapsdown b \mapsto w$, 又 $u \mapsto w$, 因为单射 $b = u$, 故 $a \mapsdown b = u \mapsdown v = 0$.

在 $\ker$ 处正合. 取 $x \in \ker'$, 则 $x \mapsto\mapsto 0$.

取 $x \in \ker$, 若 $x \mapsto 0$, 则 $x \mapsto \mapsdown 0$, 故 $x \mapsdown y \mapsto 0$, 则存在 $z \mapsto y$. 我们要说明 $z \mapsdown 0$, 因为第二行是单射, 这等价于 $z \mapsdown \mapsto 0$ 即 $z \mapsto y \mapsdown 0$, 但是 $x \mapsdown y \mapsdown 0$. 故存在 $w \mapsdown z$, 此时 $w \mapsto x$, 因为单射, 只需要验证 $w \mapsto x \mapsdown y$, 但是 $w \mapsdown z \mapsto y$.

在 $\ker''$ 处正合. 取 $* \in \ker$, 令 $* \mapsto x_0$, $* \mapsdown z_0$, 回忆 δ 的定义, 保留字母, 因为和选取无关, 可以取 $z = z_0$, 此时 $w = 0$, 故 $\delta(x_0) = 0$.

取 $x \in \ker''$, 假设 $\delta(x) = 0$, 保留 δ 的定义时候的字母, 则 $u \mapsdown \delta(x) = 0$, 则存在 $a \mapsdown v$, 设 $a \mapsto b$, 因为 $a \mapsdown u \mapsto w$ 故 $a \mapsto b \mapsdown w$, 故 $z - b \mapsto w - w = 0$. 故存在 $c \mapsdown z - b$, 可以断言 $c \mapsto x$, 因为单射, 只需要验证 $c \mapsto \mapsdown y$, 即验证 $c \mapsdown z - b \mapsto y$, 但是因为 $a \mapsto b \mapsto 0$, 故 $z - b \mapsto y - 0 = y$.

在 cok' 处正合. 取 $x \in \ker''$, 回忆 δ 的定义, 保留字母, 因为 $x \mapsdown w \mapsdown 0$ 故 $u \mapsto w \mapsdown 0$ 故 $u \mapsdown \delta(x) \mapsto 0$.

取 $v \in \mathrm{cok}'$, 若 $v \mapsto 0$, 存在 $u \mapsdown v$, 设 $u \mapsto w$, 因为 $u \mapsdown v \mapsto 0$ 故 $u \mapsto w \mapsdown 0$, 故存在 $z \mapsdown w$, 设 $z \mapsto y$, 因为 $u \mapsto w \mapsto 0$ 故 $z \mapsdown w \mapsto 0$ 故 $z \mapsto y \mapsdown 0$, 故存在 $x \mapsdown y$, 不难发现, 上述字母复合 δ 定义中的要求, 故 $v = \delta(x)$.

在 cok 处正合. 取 $v \in \mathrm{cok}'$, 则 $v \mapsto\mapsto 0$.

取 $x \in \mathrm{cok}$, 若 $x \mapsto 0$, 存在 $y \mapsdown x$, 设 $y \mapsto z$, 因为 $y \mapsdown x \mapsto 0$ 故 $y \mapsto z \mapsdown 0$, 故存在 $w \mapsdown z$, 因为满射, 存在 $u \mapsto w$, 设 $u \mapsdown v$, 因为 $u \mapsto w \mapsdown z$ 故 $u \mapsdown v \mapsto z$, 故 $y - v \mapsto z - z = 0$, 从而存在 $a \mapsto y - v$, 设 $a \mapsdown b$, 我们断言 $b \mapsto x$, 这是因为 $u \mapsdown v \mapsdown 0$, 故 $a \mapsto y - v \mapsdown x - 0 = x$, 故 $a \mapsdown b \mapsto x$.

命题得证. □

命题 3.4 (延长的蛇形引理) 条件不变，若条件中两行正合列可以延长，即有正合列

$$\begin{tikzcd}
\diamondsuit \arrow[r] & \heartsuit \arrow[r] & M' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"] & M \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\beta"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 & \\
& 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "\sigma"'] & N \arrow[r, "\tau"'] & N'' \arrow[r] & \spadesuit \arrow[r] & \clubsuit
\end{tikzcd}$$

则

$$\diamondsuit \to \heartsuit \to \ker\alpha \xrightarrow{\varphi} \ker\beta \xrightarrow{\psi} \ker\gamma \xrightarrow{\delta} \operatorname{cok}\alpha \xrightarrow{\sigma} \operatorname{cok}\beta \xrightarrow{\tau} \operatorname{cok}\gamma \to \spadesuit \to \clubsuit$$

仍然是正合列. 其中连接上的同态由诱导而来.

证明 同样是追图. 留给读者练习. □

以下是一些有趣的练习.

定理 3.5 (五引理) 考虑 R-模的交换图

其中行皆正合.

φ_1 满射，$\varphi_{2,4}$ 单射 $\Rightarrow \varphi_3$ 单

φ_5 单射，$\varphi_{2,4}$ 满射 $\Rightarrow \varphi_3$ 满

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_2"] & X_3 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_3"] & X_4 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_4"] & X_5 \arrow[d, "\varphi_5"] \\
y_1 \arrow[r] & Y_2 \arrow[r] & Y_3 \arrow[r] & Y_4 \arrow[r] & Y_5
\end{tikzcd}$$

特别地，$\varphi_{1,2,4,5}$ 都是同构时，φ_3 是同构.

定理 3.6 (斜九引理) 若有 R-模的交换图

若每行都正合，则右边两列正合能得到左边一列正合.

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d] & B_1 \arrow[r] \arrow[d] & C_1 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r] \arrow[d] & B_2 \arrow[r] \arrow[d] & C_2 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & A_3 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & C_3
\end{tikzcd}$$

以及

若每行都正合, 则右边两列正合能得到左边一列正合.

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r] \arrow[d] & B_1 \arrow[r] \arrow[d] & C_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
A_2 \arrow[r] \arrow[d] & B_2 \arrow[r] \arrow[d] & C_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
A_3 \arrow[r] \arrow[d] & B_3 \arrow[r] \arrow[d] & C_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

定理 3.7 (对称九引理) 若有 R-模的交换图

若每行都正合, 则左边两列正合能得到右边一列正合; 右边两列正合能得到左边一列正合.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d] & B_1 \arrow[r] \arrow[d] & C_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r] \arrow[d] & B_2 \arrow[r] \arrow[d] & C_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_3 \arrow[r] \arrow[d] & B_3 \arrow[r] \arrow[d] & C_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

定理 3.8 (九引理) 若有 R-模的交换图

若每行每列都正合.
则 φ 是单射当且仅当 ψ 是单射.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & A_1 \arrow[r] \arrow[d] & B_1 \arrow[r] \arrow[d] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r] \arrow[d] & B_2 \arrow[r] \arrow[d] & C_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & A_3 \arrow[r, "\psi"'] \arrow[d] & B_3 \arrow[r] \arrow[d] & C_3 & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

定理 3.9 (Barratt-Whitehead) 若有 R-模的交换图, 行皆正合,

$$\begin{tikzcd}
\ldots C_{n+1} \arrow[r, "\gamma_{n+1}"] & A_n \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[d, "\mu_n"] & B_n \arrow[r, "\beta_n"] \arrow[d, "\nu_n"] & C_n \arrow[r, "\gamma_n"] \arrow[d, "\lambda_n"] & A_{n-1} \ldots \\
\ldots Z_{n+1} \arrow[r, "\zeta_{n+1}"] & X_n \arrow[r, "\xi_n"] & Y_n \arrow[r, "\eta_n"] & Z_n \arrow[r, "\zeta_n"] & X_{n-1} \ldots
\end{tikzcd}$$

则有长正合列

$$\ldots \to A_n \xrightarrow{(\alpha_n,\mu_n)} B_n \oplus X_n \xrightarrow{\nu_n-\xi_n} Y_n \xrightarrow{\gamma_n\lambda_n^{-1}\eta_n} A_{n-1} \to \ldots$$

定理 3.10 (Wall) 若有四条 R-模复形[2]

$$\begin{cases}
\ldots \to B_n \to C_n \to D_n \to A_{n-1} \to C_{n-1} \to E_{n-1} \to B_{n-2} \to \ldots \\
\ldots \to B_n \to E_n \to F_n \to A_{n-1} \to D_{n-1} \to F_{n-1} \to B_{n-2} \to \ldots \\
\ldots \to A_n \to C_n \to E_n \to B_{n-1} \to C_{n-1} \to D_{n-1} \to A_{n-2} \to \ldots \\
\ldots \to A_n \to D_n \to F_n \to B_{n-1} \to E_{n-1} \to F_{n-1} \to A_{n-2} \to \ldots
\end{cases}$$

[2]即在每点 $\xrightarrow{\varphi}\bullet\xrightarrow{\psi}$ 都满足 $\psi\circ\varphi=0$ 的列.

交织形成的交换图,

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots & A_n \arrow[dr] \arrow[rr, bend left] & & D_n \arrow[dr] \arrow[rr, bend left] & & A_{n-1} \arrow[dr] \arrow[rr, bend left] & & D_{n-1} \arrow[dr] \arrow[rr, bend left] & & A_{n-2} & \cdots \\
\cdots & & C_n \arrow[ur] \arrow[dr] & & F_n \arrow[ur] \arrow[dr] & & C_{n-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & F_{n-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \\
\cdots & B_n \arrow[ur] \arrow[rr, bend right] & & E_n \arrow[ur] \arrow[rr, bend right] & & B_{n-1} \arrow[ur] \arrow[rr, bend right] & & E_{n-1} \arrow[ur] \arrow[rr, bend right] & & B_{n-2} & \cdots
\end{tikzcd}$$

若三条都是正合列, 则剩下那一条也是.

定理 3.11 (熊, 2018) 对于模之间的同态 $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$, 有正合列

$$0 \to \ker\varphi \xrightarrow{\subseteq} \ker(\psi\circ\varphi) \xrightarrow{\varphi} \ker\psi \xrightarrow{\to B \to} \operatorname{cok}\varphi \xrightarrow{\psi} \operatorname{cok}(\psi\circ\varphi) \xrightarrow{/} \operatorname{cok}\psi \to 0$$

如下图

$$\begin{tikzcd}
& & \ker\psi \arrow[dr] \arrow[rr, bend left] & & \operatorname{cok}\varphi \arrow[drr, bend left] & & \\
& & & B \arrow[ur] \arrow[dr, "\psi"] & & & \\
\ker\psi\varphi \arrow[urr, bend left] \arrow[rr] & & A \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "\psi\varphi"'] & & C \arrow[rr] \arrow[dr] & & \operatorname{cok}\psi\varphi \arrow[dl, bend left] \\
& \ker\varphi \arrow[ul, bend left] \arrow[ur] & & 0 \arrow[ll, bend left] & & \operatorname{cok}\psi \arrow[ll, bend left] &
\end{tikzcd}$$

II. 正合性 下面我们来讨论张量的正合性.

定理 3.12 (右正合性) 对于左 R-模 N, 若有右 R-模的正合列

$$M \xrightarrow{\varphi} M' \xrightarrow{\psi} M'' \to 0$$

则下列也是正合列

$$M \underset{R}{\otimes} N \xrightarrow{\varphi\otimes\mathrm{id}_N} M' \underset{R}{\otimes} N \xrightarrow{\psi\otimes\mathrm{id}_N} M'' \underset{R}{\otimes} N \to 0$$

类似地, 对于右 R-模 M, 若有左 R-模的正合列

$$N \xrightarrow{\varphi'} N' \xrightarrow{\psi} N'' \to 0$$

则下列也是正合列

$$M\underset{R}{\otimes}N\overset{\mathrm{id}_M\otimes\varphi'}{\to}M\underset{R}{\otimes}N'\overset{\mathrm{id}_M\otimes\psi'}{\to}M\underset{R}{\otimes}N''\to 0$$

证明 我们只证明一边.

首先, $\ldots\to M''\otimes_R N\to\ldots$ 处是正合的. 即证明 $\psi\otimes\mathrm{id}_M$ 是满射. 根据 (1.4), 只要证明任何 $x''\otimes y$ 在 $\psi\otimes\mathrm{id}_M$ 的像中, 其中 $x''\in M'', y\in N$. 根据 ψ 是满射, 只要找 $x'\in M'$ 使得 $\psi(x')=x''$, 于是 $(\psi\otimes\mathrm{id}_M)(x'\otimes y)=x''\otimes y$.

其次, $\ldots\to M'\otimes_R N\to\ldots$ 处是正合的. 一方面 $(\psi\otimes\mathrm{id}_M)\circ(\varphi\otimes\mathrm{id}_M)=0$, 这意味着 $\mathrm{im}(\varphi\otimes\mathrm{id}_M)\subseteq\ker(\psi\otimes\mathrm{id}_M)$. 为了说明反面, 取 $x'=\sum x_i'\otimes y_i\in M'\otimes_R N$ 使得

$$(\psi\otimes\mathrm{id}_M)(x')=\sum\psi(x_i')\otimes y_i=0$$

根据 (1.5), 存在矩阵 $(a_{ij})\in K^{I\times J}$ 和 $\{y_j'\}_{j=1}^J$ 使得

$$y_i=\sum_j a_{ij}y_j'\qquad 0=\sum_i\psi(x_i')a_{ij}$$

即 $\psi\left(\sum_i x_i'a_{ij}\right)=0$, 故存在 $x\in M$ 使得 $\varphi(x)=\sum_i x_i'a_{ij}$, 这样

$$x'=\sum x_i'\otimes y_i=\sum_{i,j}x_i'\otimes a_{ij}y_j'=\sum_{i,j}x_i'a_{ij}\otimes y_j'=\sum_j\varphi(x)\otimes y_j\in\mathrm{im}(\varphi\otimes\mathrm{id}_M)$$

命题得证. □

一般而言, 短正合类通过 $-\otimes_R M$ 并不能变成短正合列, 问题出在单射上. 考虑

$$0\to\mathbb{Z}\overset{\times 2}{\to}\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_2\to 0$$

同时张量上 $\mathbb{Z}_2$, 这样就变成了

$$0\to\underbrace{\mathbb{Z}\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}\mathbb{Z}_2}_{=\mathbb{Z}_2}\overset{\times 2}{\to}\underbrace{\mathbb{Z}\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}\mathbb{Z}_2}_{=\mathbb{Z}_2}\to\mathbb{Z}_2\otimes\mathbb{Z}_2\to 0$$

当中的 $\times 2$ 变成了零同态, 但 $\mathbb{Z}_2\neq 0$, 故不再正合.

定理 3.13 (商环的张量) 对于 R-模 M, R 的理想 $\mathfrak{a}$, 则

$$R/\mathfrak{a} \underset{R}{\otimes} M = M/\mathfrak{a}M$$

证明 考虑正合列 $0 \to \mathfrak{a} \to R \to R/\mathfrak{a} \to 0$. 同时张量以 M 得到正合列

$$\mathfrak{a} \otimes M \xrightarrow{\dagger} \underbrace{R \underset{R}{\otimes} M}_{=M} \to R/\mathfrak{a} \underset{R}{\otimes} M \to 0$$

其中 $[\dagger : x \otimes m \mapsto xm \in M]$, 故 $R/\mathfrak{a} \otimes_R M = M/\operatorname{im}\dagger = M/\mathfrak{a}M$. □

定义 3.14 (平坦) 对于左 R-模 N, 若任意右 R-模的正合列

$$0 \to M \xrightarrow{\varphi} M' \xrightarrow{\psi} M'' \to 0$$

下列也是正合列

$$0 \to M \underset{R}{\otimes} N \xrightarrow{\varphi \otimes \mathrm{id}_N} M' \underset{R}{\otimes} N \xrightarrow{\psi \otimes \mathrm{id}_N} M'' \underset{R}{\otimes} N \to 0$$

则称 N 是**平坦 (flat) 模**. 等价地, 根据上面的论证, 这等价于将单射映射为单射.

命题 3.15 自由模是平坦的.

证明 因为直和和张量可以交换 (2.3), 而环本身根据 (2.1) 是平坦模. □

推论 3.16 投射模是平坦的.

证明 因为投射模是自由模的直和项. □

这解释了为什么线性空间的张量积有正合性, 而一般模的张量积只有右正合性, 因为线性空间都是自由的.

定理 3.17 (Hom 的左正合性) 对于左 R-模 N, 若有左 R-模的正合列

$$M \xrightarrow{\varphi} M' \xrightarrow{\psi} M'' \to 0$$

则下列也是正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}(M'', N) \to \mathrm{Hom}(M', N) \to \mathrm{Hom}(M, N)$$

类似地，对于右 R-模 M，若有左 R-模的正合列

$$0 \to N \xrightarrow{\varphi'} N' \xrightarrow{\psi} N''$$

则下列也是正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}(M, N) \to \mathrm{Hom}(M, N') \to \mathrm{Hom}(M, N'')$$

证明 不难验证. □

III. 有限生成与有限展示 线性空间的张量之所以能够有那么好的结论，是因为线性空间都是自由模. 同时注意到有限维线性空间的张量的结论更好，是因为其有限性质，下面我们来推广这些结果.

定义 3.18 (有限生成) 对于 R-模 M，称之为 **有限生成 (finitely generated)**，如果存在 $x_1, \ldots, x_n \in M$，使得 $M = Rx_1 + \ldots + Rx_n$，其中 $x_1, \ldots, x_n$ 被称为 **生成元**. 等价地，存在正合列

$$R^n \to M \to 0$$

其中 R^n 的标准基 $e_\bullet$ 被分别映射为 $x_\bullet$.

定义 3.19 (有限展示) 对于 R-模 M，称之为 **有限展示 (finitely presented)**，如果存在正合列

$$R^m \to R^n \to M \to 0$$

换言之，M 是有限生成的，$R^n \to M$ 的同态的核是有限生成的.

引理 3.20 对于 R-模 M，M 是有限展示的当且仅当对任何 n 和满射 $\pi : R^n \twoheadrightarrow M$，$\ker \pi$ 是有限生成的.

证明 不难根据 Schanuel 引理 (3.2) 知道. □

定理 3.21 对 R-模的短正合列

$$0\to A\to B\to C\to 0$$

则

(1) A 有限生成, C 有限生成, 则 B 有限生成. *(短正合性)*

(2) A 有限展示, C 有限展示, 则 B 有限展示. *(短正合性)*

(3) B 有限生成, 则 C 有限生成. *(商模保持)*

(4) A 有限生成, B 有限展示, 则 C 有限展示. *(生展 $\Rightarrow$ 展)*

(5) B 有限生成, C 有限展示, 则 A 有限生成. *(生 $\Leftarrow$ 生展)*

证明 (1) 可以直接用生成元论证, 但我们用更漂亮的方法, 考虑 $[R^n\twoheadrightarrow A],[R^m\to C]$ 如下图, 通过复合 $[R^n\to A\to B]$ 以及因为 R^m 自由存在 $[R^m\to B]$ 使得 $[R^m\to B\to C]=[R^m\to C]$, 可以将这两个得到的同态合成 $[R^n\oplus R^m\to B]$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R^n \arrow[r] \arrow[d] \arrow[drr, dashed] & R^n\oplus R^m \arrow[r] \arrow[d, dashed] & R^m \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

此时上交换图交换, 利用蛇形引理 (3.3) 知道 $[R^n\oplus R^m\to B]$ 是满射, 得证.

(2) 同样用上面的图, 根据蛇形引理, 在此条件下, 有正合列

$$0\to\ker[R^n\to A]\to\ker[R^n\oplus R^m\to B]\to\ker[R^m\to C]\to 0$$

从而根据 (1)$\ker[R^n\oplus R^m\to B]$ 是有限生成的.

(3) 显然.

(4) 设 $R^n\twoheadrightarrow B$. 通过复合 $[B\to C]$ 得到 $[R^n\to C]$, 再诱导了 $\ker[R^n\to C]\to A$ 的同态

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & R^n \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

根据蛇形引理, 有正合列

$$0\to \ker[K\to A]\to \ker[R^n\to B]\to 0\to \mathrm{cok}[K\to A]\to 0\to 0\to 0$$

根据 (3.20), $\ker[R^n\to B]$ 有限生成, 从而 $\ker[K\to A]$ 有限生成, $\mathrm{cok}[K\to A]=0$, 故纵向有正合列

$$0\to \ker[K\to A]\to K\to A\to 0$$

根据 (1) 这令 K 有限生成, 故 $K\to R^n\to C$ 给出有限展示.

(5) 还是一样的图, 根据 (3.20), 此时 K 是有限生成的. □

定理 3.22 *令 R,S 是交换环, M 是 R-模, N 是 R,S-双模, P 是平坦 S-模, 则*

$$\begin{array}{rccc}\varphi: & \mathrm{Hom}_R(M,N)\otimes_S P & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(M,N\otimes_S P)\\ & f\otimes p & \longmapsto & [x\mapsto f(x)\otimes p]\end{array}$$

在 M 有限生成时是单射, 在 M 是有限展示时是同构.

证明 假设 $R^{\oplus X}\to R^n\to M$ 是展示. 注意到 $M=R^n$ 时上述总是同构. 根据 P 平坦和 (3.17) 故有如下交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M,N)\otimes_S P \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_R(R^n,N)\otimes_S P \arrow[r] \arrow[d, "\sim"'] & \mathrm{Hom}_R(R^{\oplus X},N)\otimes_S P \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M,N\otimes_S P) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(R^n,N\otimes_S P)\otimes_S P \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(R^{\oplus X},N\otimes_S P)
\end{tikzcd}$$

此时 φ 是单射. 当 M 有限展示时, φ 更是同构. □

IV. 平坦模的刻画 下面, 关于平坦模的刻画已经呼之欲出.

推论 3.23 *令 R 是一个交换环, S 是一个交换代数, 且作为 R-模是平坦的. 令 M,N 是 R-模, 则*

$$\begin{array}{rccc}\varphi: & \mathrm{Hom}_R(M,N)\otimes_R S & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_S(M\otimes_R S,N\otimes_R S)\\ & f & \longmapsto & f\otimes \mathrm{id}_S\end{array}$$

在 M 是有限展示时是同构.

证明 根据上面的命题已经有

$$\mathrm{Hom}_R(M,N)\underset{R}{\otimes}S=\mathrm{Hom}_R(M,N\underset{R}{\otimes}S)=\mathrm{Hom}_S(M\otimes S,N\otimes S)$$

后一个等号来自 (2.9). □

推论 3.24 令 R 是一个交换环, 有限展示模 M, 平坦模 N, 则任何同态 $M\to N$ 都是常秩的, 即该同态分裂成下列同态的复合

$$M\to R^n\to N$$

证明 根据上面的推论, 有

$$\mathrm{Hom}_R(P,R)\underset{R}{\otimes}M\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_R(P,M)$$

任何同态 $\varphi:P\to M$, 对应到 $\mathrm{Hom}_R(P,R)\otimes_R M$ 中设为

$$\gamma_1\otimes x_1+\ldots+\gamma_n\otimes x_n$$

这样就可以定义

$$\begin{array}{rccc}\alpha: & P & \longrightarrow & R^n\\ & x & \longmapsto & (\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x))\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{rccc}\beta: & R^n & \longrightarrow & M\\ & e_i & \longmapsto & x_i\end{array}$$

其中 e_i 是 R^n 的标准基, 这就满足要求. □

定理 3.25 (Lazard) 令 R 是一个交换环, 模 M 是平坦模当且仅当 M 是有限秩的自由模的滤过极限.

证明梗概 首先, 实际上, 考虑图

$$\mathcal{G}=\begin{cases}\text{顶点} & (R^n,\alpha)\,\big|\,n\in\mathbb{Z}_{\geq 1},\alpha:R^n\to M\\ \text{箭头} & (R^n,\alpha)\xrightarrow{\gamma}(R^m,\beta)\,\big|\,\gamma:R^n\to R^m,\beta\circ\gamma=\alpha\end{cases}$$

不难验证[3] 实际上对任何模 M,

$$M=\underset{(R^n,\alpha)\in\mathcal{G}}{\mathrm{colim}}\;R^n$$

[3]若同态 N 对每个 (R^n,α) 找到了相容的同态 $R^n\xrightarrow{\alpha'}N$. 对于任意 $x\in M$, 可以找到 $\alpha_x:R\to M$, 使得 $1\mapsto x$. 这样对应一个 $R\xrightarrow{\alpha'_x}N$, 令

$$\theta:M\longrightarrow N\qquad x\longmapsto\alpha'_x(1)$$

我们先说明, 对于平坦模而言, 这个余极限是滤过的, 即 "殊途同归", 若

$$(R^n,\alpha)\overset{\gamma,\delta}{\rightrightarrows}(R^m,\beta)$$

考虑 $R^n\overset{\lambda=\gamma-\delta}{\to}R^m$, 满足 $[R^n\overset{\lambda}{\to}R^m\to M]$ 是零同态, 这诱导了 $R^m/\operatorname{im}\lambda\to M$ 的同态, 注意, 此时 $R^m/\operatorname{im}\lambda$ 是有限展示模, 故可以写成复合 $R^m/\operatorname{im}\lambda\to R^r\to M$, 还原回去变成

$$\underbrace{R^n\overset{\gamma-\delta}{\to}R^m\to R^r}_{=0}\to M$$

这就说明这个余极限是滤过的.

下面, 我们说明平坦模的滤过极限的平坦的. 不难通过追图说明滤过极限保持正合性. 而张量和直和, 余核交换, 根据滤过极限的构造, 张量和滤过极限可以交换, 从而平坦模的滤过极限还是平坦的. □

4 小结

综合上述的结果, 我们应该能得到如下朴素的观察

> 令一个 R 模 M 如果通过种种途径经由 R 构造而来, 那么 R 模 -N 与 M 作张量就是将上述种种操作加诸 N. 换言之, 模可以被理解为对环的操作记录, 并以此作为范本将同样的操作施加在其他所有模上.

例如 R^n 由 R 作 n 个副本的直和而来, 这样 $R^n\otimes M=M^n$ 是 M 作 n 个副本的直和. 再来 $R/\mathfrak{a}$ 由 R 商去 $\mathfrak{a}$ 而来, 这样 $R/\mathfrak{a}\otimes M=M/\mathfrak{a}M$ 也是 M 商去 $\mathfrak{a}$ 所得. 更广泛的例子如局部化和完备化.

5 应用

不难看出这是同态. 显然这是唯一的选择. 剩余只需要说明交换性, 验证 $[R^n\overset{\alpha}{\to}M\overset{\theta}{\to}N]=[R^n\overset{\alpha'}{\to}N]$ 这只需要逐分量验证即可, 这就回到了定义.

I. 诱导表示 对一个群 G, k-有限维线性空间 V, 一个 表示 是同态 $G \to \mathrm{GL}(V)$. 等价地, 可以作 群环

$$k[G] = \left\{ \sum_{g \in G} x_g g(\text{有限和}) : x_g \in k \right\}$$

其中乘法按照如下规律以及结合律自动延拓

$$(xg)(yh) = (xy)(gh) \qquad x, y \in k, g, h \in G$$

不难验证的是, 实际上一个表示 $G \to \mathrm{GL}(V)$ 等同于赋予 V 以 $k[G]$-模结构.

表示论会关心对固定的群决定所有的表示. 若 G 有子群 H, 实际上可以认为 $k[H] \subseteq k[G]$, 从而 $k[G]$ 成为 $k[H]$-代数. 这样任何一个 H 的表示 ($k[H]$-模)M 都可以通过张量变成一个 G 的表示 ($k[G]$-模)$k[G] \otimes_{k[H]} M$. 这种表示被称为 诱导表示. 在决定一些大的群的表示的时候, 利用其子群的表示来一探虚实显得尤为关键.

假设 $G = \bigsqcup x_i H$, 那么有作为线性空间的分解 $k[G] = \bigoplus x_i k[H]$, 这样

$$\begin{aligned} k[G] \otimes_{k[H]} M &= \bigoplus x_i k[H] \otimes_k M \big/ \langle gh \otimes x - g \otimes hx : g \in G, h \in H, x \in M \rangle \\ &= \bigoplus x_i (k[H] \otimes_{k[H]} M) = \bigoplus x_i M \end{aligned}$$

换言之, 倘若我们用朴素的语言去说, 对于表示 $H \to \mathrm{GL}(V)$, 其诱导的表示就是将 V 前面形式地乘上 H 的陪集代表元, 然后作直和, 然后 G 的作用就是直接行使计算. 想要更具体地写出来, 对于 $g \in G$, 假设 $gx_i = x_{\sigma(i)} h_i$, 这样对于 $v \in V$, 定义

$$g \cdot x_i v = x_{\sigma(i)}(h_i v)$$

就十分合理.

II. 同调代数 我们在 (3.12) 看到了张量积只有一边具有正合性, 另一边能说什么则显得神秘. 同调代数会给予这个问题一个回答, 其结果是令人惊奇的, 如果一开始给定短正合列, 在张量积左边 "神秘的" 无箭头地带实际上三个三个地连接着无穷无尽的模, 这条序列被称为长正合序列, 且第一, 二, 三个模只

各自和第, 二, 三个模和被张量的模有关, 他们就是 Tor 函子. 如下, 例如对于短正合列

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

对于 M, 张量之后有长正合序列

$$\ldots \to \mathrm{Tor}(M,A) \to \mathrm{Tor}(M,B) \to \mathrm{Tor}(M,C) \to M \underset{R}{\otimes} A \to M \underset{R}{\otimes} B \to M \underset{R}{\otimes} C \to 0$$

III. 同调系数 同调论中也离不开张量, 其主要作用是用来更换系数. 例如奇异同调的展布是以来在 Abel 群上的, 数学家自然会问换成其他模是否能够获得更加新奇的理论? 更换基环的操作也需要通过张量来完成, 这种操作更经常地被几何地称为更换系数. 因为所需铺垫众多, 这里就不拟细谈了.