张量漫谈 第一篇

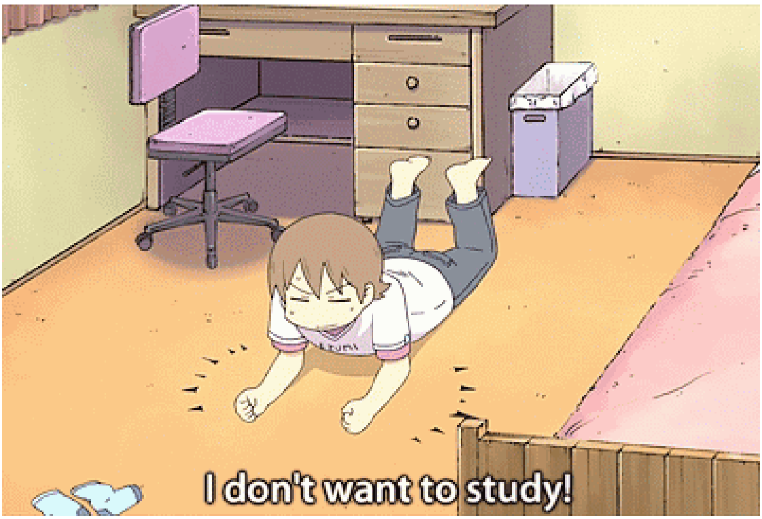
熊锐

2018 年 7 月 4 日

Abstract

张量为什么要如此定义? 这或许是一个让人头疼的问题. 因为其复杂的而多样定义让人感到困惑. 简单的定义无法抓到本质, 复杂的定义缺乏解释. 更为关键的是, 似乎在目力所及的范围内也很难看到张量的用途.

本系列的目的在于将张量的体量给一个相对完善的介绍, 希望体例完善的同时, 更能把阐述明白其用途. 不同篇难度和基础知识要求不同, 本篇是第一篇, 仅需线性代数的知识. 本篇的目的在于介绍线性空间张量的基本构造以及当中的计算技巧和简单应用.



Contents

致谢: 感谢刘奔提供了两个非常好的例子, 他们是 (5.5) 和 (5.6). 精彩的讲解让大家对张量的理解更进一步. 另外, (5.5) 还有一种利用定积分的做法, 这尤其需要感谢陈子康不辞辛苦地为大家计算定积分.

1 线性空间的张量积

以下的线性空间皆指的是在 K 上的.

命题 1.1 (线性空间的张量积) 对于线性空间 V,W, 可以构造如下的

$$\left(\mathcal{W},\tau\right)\;\Big|\;\mathcal{W}\text{ 是线性空间; 双线性映射 }\tau:V\times W\to\mathcal{W}$$

满足如下的泛性质 [1]

$$\begin{array}{l|l} \forall\text{线性空间 } U & \\ \forall\text{双线性映射 } \varphi:V\times W\to U & \\ \exists!\text{线性映射 } \psi:\mathcal{W}\to U & \\ \text{s.t.}\ \psi\circ\tau=\varphi & \end{array}
\qquad
\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathcal{W} \arrow[d, dashed, "\psi"] \\ & U \end{tikzcd}$$

且这样的 $(\mathcal{W},\tau)$ 在同构意义下唯一 [2]. 这样的 $\mathcal{W}$ 被定义为 V 和 W 的**张量 (tensor) 积 (product)**, , 记为 $V\otimes_K W$, 通常会省略为 $V\otimes W$, 当中的元素被称为张量.

证明 考虑以 $V\times W$ 的元素形式地作为基张成的线性空间 $\mathcal{K}=k^{V\times W}$, 方便起见, 就以 (v,w) 记对应的基. 那么 $\mathcal{K}$ 当中的元素是有限个形如 $k(v,w)$ 的形式和, 其中 $k\in K, v\in V, w\in W$. 再考虑向量张成的线性空间

$$R=\operatorname{span}\left\{\begin{array}{l|l} (v_1+v_2,w)-(v_1,w)-(v_2,w) & v_1,v_2,v\in V \\ (v,w_1,w_2)-(v,w_1)-(v,w_2) & w_1,w_2,w\in W \\ (kv,w)-k(v,w) & k\in K \\ (v,kw)-k(v,w) & \end{array}\right\}$$

定义 $\mathcal{W}=\mathcal{K}/R$, 为了方便起见, 记

$$\sum k(v,w)+R\quad\triangleq\quad\sum kv\otimes w\qquad\text{(均为有限和)}$$

[1] 当中的双线性映射和线性代数记号已知, 是指对固定的 $w\in W$, $\varphi(-,w)$ 是线性的, 对固定的 $v\in W$, $\varphi(v,-)$ 也是线性的.

[2] 所谓在同构意义下唯一, 指的是若有两个满足上述泛性质的 $(\mathcal{W},\tau),(\mathcal{W}',\tau')$, 那么存在互逆的 $\alpha:\mathcal{W}\leftrightarrow\mathcal{W}':\beta$ 使得

$$\tau'\circ\alpha=\tau\qquad\tau\circ\beta=\tau'\qquad\alpha\circ\beta=\mathrm{id}_{\mathcal{W}'}\qquad\beta\circ\alpha=\mathrm{id}_{\mathcal{W}}$$

以及

$$\tau : V \times W \longrightarrow W\!\!W \qquad (v, w) \longmapsto v \times w$$

下面我们开始验证泛性质, 任意给双线性映射 $\varphi : V \times W \to U$, 那么定义

$$\psi : W\!\!W \longrightarrow U \qquad \sum kv \otimes w \longmapsto \sum kf(v, w)$$

注意到这是良定义的[3], 且显然是线性的, 且 $\psi \circ \tau = \varphi$. 而反之要使 $\psi \circ \tau = \varphi$, 对于 $(v, w) \in V \times W$, 这要求 $\psi(v \times w) = f(v, w)$, 不难看出 ψ 的选择是唯一的, 故唯一性得证.

而在同构意义下唯一是一般结论. 具体来说, 若有两个满足上述泛性质的 $(W\!\!W, \tau), (W\!\!W', \tau')$, 不难发现 τ, τ' 也是双线性的, 故对 $(W\!\!W', \tau')$ 用 $(W\!\!W, \tau)$ 的泛性质以及对 $(W\!\!W, \tau)$ 用 $(W\!\!W', \tau')$ 的泛性质有

$$\begin{aligned} \exists \alpha &: W\!\!W \to W\!\!W' \\ \beta &: W\!\!W' \to W\!\!W \\ \tau' \circ \alpha &= \tau \\ \tau \circ \beta &= \tau' \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\tau'"'] & W\!\!W \arrow[d, dashed, bend left, "\alpha"] \\ & W\!\!W' \arrow[u, dashed, bend left, "\beta"] \end{tikzcd}$$

此时, 设 $\psi : W\!\!W \to W\!\!W$, 不论 $\psi = \mathrm{id}_{W\!\!W}$ 还是 $\psi = \beta \circ \alpha$ 都满足

$$\psi \circ \tau = \tau$$

对 $(W\!\!W, \tau)$ 用 $(W\!\!W, \tau)$ 自己的范性质知 $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_{W\!\!W}$, 类似可得 $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_{W\!\!W'}$. 故在同构意义下唯一. □

命题 1.2 (张量积结构定理) 对于线性空间 V, W, 关于张量积 $V \otimes_k W$ 有如下结构上的描述

(1) $V \otimes W$ 中的元素都形如 *(元素形式)*

$$\sum kv \otimes w \qquad \text{(有限和)} \qquad k \in K, v \in V, w \in W$$

[3] 因为这个映射诱导自

$$\hat{\varphi} : K \longrightarrow U \qquad \sum k(v, w) \longmapsto \sum kf(v, w)$$

且生成 R 的向量都被映射成 0, 从而 $\hat{\varphi}(R) = 0$, 从而诱导了 $K/R \to U$ 的良定义映射.

(2) $V \otimes W$ 中的元素满足如下运算律 *(运算律)*

$$\begin{cases} (v_1+v_2)\otimes w = v_1\otimes w + v_2\otimes w \\ v\otimes(w_1+w_2) = v\otimes w_1 + v\otimes w_2 \\ (kv)\otimes w = v\otimes(kw) = kv\otimes w \end{cases}$$

(3) 对于 $x = \sum kv\otimes w \in V\otimes W$, *(消失判据)*

$$x = 0 \iff \text{通过 (2) 的运算律能把 } x \text{ 化成 } 0$$

(4) 对于 $x, y \in V\otimes W$, *(相等判据)*

$$x = y \iff \text{通过 (2) 的运算律能把 } x \text{ 化成 } y$$

证明 继续采用 (1.1) 的记号. (1) 根据构造显然. (2) 是因为 $\tau(R) = 0$. 具体来说, 例如第一个等式

$$(v_1+v_2, w) = (v_1, w) + (v_2, w) + \underbrace{(v_1+v_2, w) - (v_1, w) + (v_2, w)}_{\in R}$$

(3) 这即意味着 $\sum k(v, w) \in R$, 换言之是一些 R 的生成元的线性组合, 而实际上那些生成元的整系数组合就够了[4], 这样每一项对应于运算律的某个使用. (4) 用 (3) 于 $x - y$. □

推论 1.3 (消失判据) 对于线性空间 V, W,

$$\sum_{i=1}^{I} x_i \otimes y_i = 0$$

的充分必要条件是存在矩阵 $(a_{ij}) \in K^{I\times J}$ 和 $\{x'_j\}_{i=1}^{J}$ 使得

$$x_i = \sum_j a_{ij} x'_j \qquad 0 = \sum_i a_{ij} y_i$$

[4] 例如, 注意到 $k(v_1+v_2, w) - k(v_1, w) - k(v_2, w) = [(v_1+v_2, kw) - (v_1, kw) - (v_2, kw)] - [k(v_1+v_2, w) - (v_1+v_2, kw)] + [k(v_1, w) - (v_1, kw)] + [k(v_2, w) - (v_2, kw)]$.

证明 首先, 必要性,

$$\sum_{i=1}^{I} x_i \otimes y_i = \sum_{i,j} a_{ij} x'_j \otimes y_i = \sum_{i,j} x'_j \otimes a_{ij} y_i = \sum_{j=1}^{J} x_j \otimes 0 = 0$$

充分性根据 (1.2) 的 (3)—每一步都对应一个这样的矩阵. □

评注 1.4 换言之, 假如记 x 是 x_i 排出的行向量, v 是 v_j 排出的行向量, y 是 y_i 排出的列向量, w 是 w_j 排出的列向量, $A = (a_{ji})$, 那么可以改写成

$$x \otimes y = v \otimes w \iff x = vA, w = Ay$$

或者说无非只是 $vA \otimes y = v \otimes Ay$ 这一运算律的运用.

定理 1.5 对于线性空间 V, W, 如果 V 有一组集 $\{v_i\}_{i\in I}$, W 有一组基 $\{w_j\}_{j\in J}$, 那么 $V \otimes_k W$ 将以 $\{v_i \otimes w_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ 为一组基. 特别地,

$$\dim(V \otimes W) = \dim V \times \dim W$$

证明 首先, 任何 $v \otimes w$ 都是 $\{v_i \otimes w_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ 的线性组合无疑, 从而 $v \otimes w$ 的线性组合亦然, 故 $\{v_i \otimes w_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ 张成了 $V \otimes W$. 为了看到 $\{v_i \otimes w_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ 线性无关, 只需要取总能取到的双线性函数 φ_{ij} 使得

$$\varphi_{ij}(v_\imath, w_\jmath) = \begin{cases} 1 & \imath = i, \jmath = j \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases}$$

根据泛性质 (1.1), 诱导 ψ_{ij} 满足

$$\psi_{ij}(v_\imath \otimes w_\jmath) = \begin{cases} 1 & \imath = i, \jmath = j \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases}$$

这就足以说明其线性无关. □

评注 1.6 观其泛性质 *(1.1)*, 张量积的意图似乎在于将双线性映射转化为我们所熟知的线性映射上. 实际上,

$$\{V \times W \text{ 到 } U \text{ 的双线性映射}\} \longleftrightarrow \{V \otimes W \text{ 到 } U \text{ 的线性映射}\}$$

是双射, 从左到右依靠泛性质诱导, 而从右到左直接通过复合以 *(1.1)* 中的 τ.

评注 1.7 或许对于初次接触而言，张量的表达没有唯一的形式，甚至连典范的代表元或是苦苦寻找的"最简形式"都不存在，这是一个理解上的困难．但是好在 *(1.2)* 指出，张量积当中的元素就是一些满足特点运算律的形式和，即元素是形式和，尽管两个形式和有可能相同，但相同的条件就是通过运算律能够在有限步内运算得到．实际上这才是张量积最本原的想法 —就是要找一个有乘法分配律，还能把域 K 中的元素里外换的线性空间．下面的例子已经足够反映出"有的东西真的是张量积".

当然这一意图实际上也能直接从泛性质中读出，如果你是或将是一位优秀的代数学家的话．

例 1.8 考虑一张 $\mathbb{R}^3$ 中的单正则曲面 $M : U \to \mathbb{R}^3$，其中 $U = (a,b)_{\ni u} \times (c,d)_{\ni v}$ 是开长方形 *(*其中下标表示代表元*)*．我们希望能够在曲面上搭建活动的坐标系 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$，且满足 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 落在曲面的切空间上，这件事通过缩小 U 总可以在局部办到．既然是微分几何，需要考虑 $\boldsymbol{e}_{1,2,3}$ 的微小变化，直觉使我们相信，其微小变化

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_i = \frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial v}\mathrm{d}v = \omega_{i1}\boldsymbol{e}_1 + \omega_{i2}\boldsymbol{e}_2 + \omega_{i3}\boldsymbol{e}_3$$

其中 ω_{ij} 形如 $f\mathrm{d}u + g\mathrm{d}v$ 是关于 $\mathrm{d}u, \mathrm{d}v$ 的一阶无穷小．

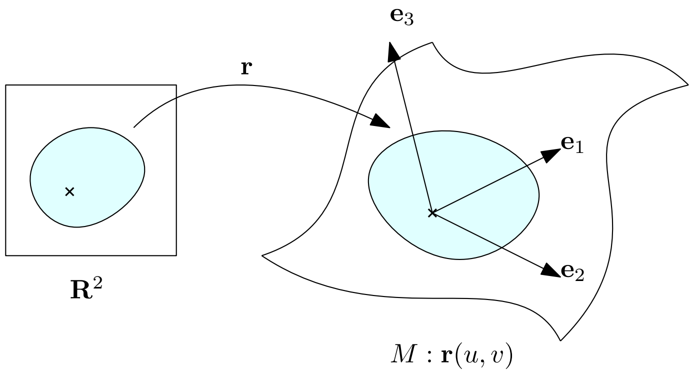


Figure 1: 活动标架

基于谨慎思考的读者会产生怀疑，我们并没有定义无穷小和向量的乘法，我们只定义了数和向量的乘法．实际上在每一点 P，一阶无穷小构成了一个线

性空间

$$\mathfrak{Diff}_P M = \{a\mathrm{d}u + b\mathrm{d}v : a, b \in \mathbb{R}\}$$

这启发我们或许应该将 $\mathrm{d}\boldsymbol{e}_i = \sum \omega_{ij}\boldsymbol{e}_j$ 更严谨地写成

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_i = \sum \omega_{ij} \otimes \boldsymbol{e}_j \qquad \omega_{ij} \in \mathfrak{Diff}_P M \qquad \boldsymbol{e}_j \in \mathbb{R}^3$$

这在微分几何中被更为广泛地定义为 **Levi-Civita 联络 (connection)** .

2 张量积的性质

I. 多重张量积 我们再补充定义多重张量积, 在此之前, 我们先指出如下命题.

命题 2.1 实际上, 张量积有 “单位元”, 具体来说有同构

$$\varphi : K \otimes V \xrightarrow{\sim} V \qquad k \otimes v = 1 \otimes kv \longmapsto kv$$

命题 2.2 实际上, 线性空间的张量积有 “交换律”, 具体来说有同构

$$\varphi : V \otimes U \xrightarrow{\sim} U \otimes V \qquad v \otimes u \longmapsto u \otimes v$$

命题 2.3 实际上, 张量积有 “结合律”, 具体来说有同构

$$\varphi : (U \otimes V) \otimes W \xrightarrow{\sim} U \otimes (V \otimes W) \qquad (u \otimes v) \otimes w \longmapsto u \otimes (v \otimes w)$$

评注 2.4 更一般地可以定义 n 重线性映射, 以此定义 n 重张量积

$$V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$$

不难验证这和任意加括号再张量是典范同构的. 我们下面将采用记号

$$V^{\otimes n} = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{n}$$

并约定 $V^{\otimes 0} = K$.

II. 伴随性 下面是关于伴随性的命题.

记号 2.5 下面以 $\mathrm{Hom}(V,W)$ 表示 V 到 W 的全体线性映射, 这构成一个线性空间

$$kf : x \mapsto kf(x) \qquad f+g : x \mapsto f(x)+g(x)$$

命题 2.6 对于线性空间 V, 有如下同构

$$\varphi : \mathrm{Hom}(K,V) \xrightarrow{\sim} V \qquad f \longmapsto f(1)$$

定理 2.7 (伴随性) 对于线性空间 U,V,W 存在同构

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathrm{Hom}(U,\mathrm{Hom}(V,W)) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}(U\otimes V,W) \\ & f & \longmapsto & \big[\, u\otimes v \mapsto [f(u)](v)\, \big] \end{array}$$

注意到此时 $f(u)\in \mathrm{Hom}(V,W)$. 其逆映射是

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathrm{Hom}(U\otimes V,W) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}(U,\mathrm{Hom}(V,W)) \\ & g & \longmapsto & \big[\, u \mapsto [v \mapsto g(u\otimes v)]\, \big] \end{array}$$

证明 可以直接验证. 但是更为直接以及自然的看法是, $\mathrm{Hom}(U,\mathrm{Hom}(V,W))$ 实际上和全体 $U\times V$ 到 W 的双线性函数一一对应 [5], 检查泛性质 (1.1) 知道这还和 $U\otimes V$ 到 W 的线性映射一一对应. 这些一一对应写出来如定理所示, 不难验证是线性同构. □

定理 2.8 对于有限维空间 V,W, 如果 V 有一组集 $\{v_i\}_{i=1}^{I}$, W 有一组基 $\{w_j\}_{j=1}^{J}$, 则映射 $\{E_{ij}\}_{\substack{1\le i\le I\\ 1\le j\le J}}$ 是 $\mathrm{Hom}(V,W)$ 的一组基, 其中

$$E_{ji} : V \longrightarrow W \qquad v_\iota \longmapsto \begin{cases} w_j & \iota = i \\ 0 & \iota \neq i \end{cases}$$

证明 不难验证, 每一个 $A\in \mathrm{Hom}(V,W)$ 的取值由 Av_ι 处的取值完全决定, 而讲 Av_ι 的取值完全由其在 w_i 前的系数决定. 不难验证 E_{ij} 是一组基. □

[5] 实际上所谓 f 是 $U\times V$ 到 W 的双线性函数指的是固定 $u\in U$, $f(u,-)$ 是 V 到 W 的线性函数, 这确定了 $\mathrm{Hom}(U,\mathrm{Hom}(V,W))$ 的一个元素, 反之, 任何 $\mathrm{Hom}(U,\mathrm{Hom}(V,W))$ 的一个元素也能反之对应一个双线性函数.

评注 2.9 在选定一组基之后，可以认为 $\operatorname{Hom}(V,W)=\mathbb{M}_{J\times I}(k)$，使得若 A 对应 $\boldsymbol{A}$，此时

$$A(v_1,\ldots,v_I)=(w_1,\ldots,w_J)\boldsymbol{A}$$

这样

$$E_{ji}(v_1,\ldots,v_I)=(0,\ldots,\underbrace{w_j}_{i},\ldots,0)=(w_1,\ldots,w_J)\boldsymbol{E}_{ji}$$

其中 $\boldsymbol{E}_{ji}$ 是除了 (j,i) 位置为 1 其他都为 0 的矩阵.

评注 2.10 最为一个小结，我们可以说 Hom 就像是"除法"一样，假如我们记 $\operatorname{Hom}(U,V)=V\div U$, $U\otimes V=UV$. 那么伴随性 *(2.7)* 是说

$$(W\div V)\div U=W\div(UV)$$

III. 函子性 接着，我们介绍线性映射的张量积.

定义 2.11 对于线性映射 $V\xrightarrow{\varphi}N, W\xrightarrow{\psi}M$，则存在唯一的 $V\otimes W\to\varphi\otimes\psi N\otimes M$ 满足

$$(\varphi\otimes\psi)(v\otimes w)=\varphi(v)\otimes\varphi(w)$$

这是因为可以构造双线性映射

$$V\times W\xrightarrow{\varphi\times\psi}N\times M\to N\otimes M$$

泛性质 *(1.1)* 诱导了 $V\otimes W\to N\otimes M$. 如下图

$$\begin{tikzcd}
V\times W \arrow[r] \arrow[d, "\varphi\times\psi"'] \arrow[dr, dashed] & V\otimes W \arrow[d, dashed, "\varphi\otimes\psi"] \\
N\times M \arrow[r] & N\otimes M
\end{tikzcd}$$

定理 2.12 对于有限维线性空间 V,W,N,M，则存在同构

$$\begin{aligned}
\sigma:\quad \operatorname{Hom}(V,N)\otimes\operatorname{Hom}(W,M) &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(V\otimes W,N\otimes M)\\
\varphi\otimes\psi &\longmapsto \varphi\otimes\psi \qquad \text{(映射的张量积)}
\end{aligned}$$

证明 选定 V, W, N, M 的一组基 $\{v_i\}, \{w_j\}, \{n_k\}, \{m_h\}$, 那么根据 (1.5), $\{v_i \otimes w_j\}$ 是 $V \otimes W$ 的一组基, $\{n_k \otimes m_h\}$ 是 $N \otimes M$ 的一组基. 根据 (2.8), 下面方便起见采用 Kronecker 的 δ 记号[6]. 可以选取 $\mathrm{Hom}(V \otimes W, N \otimes M)$ 的基是

$$E_{khij} : V \otimes W \longrightarrow N \otimes M \qquad v_\imath \otimes w_\jmath \longmapsto \delta_{i\imath}\delta_{j\jmath} n_k \otimes m_h$$

可以选取 $\mathrm{Hom}(V, N)$ 和 $\mathrm{Hom}(W, M)$ 的基是

$$\begin{aligned} E_{ki} :\ & V \longrightarrow N \\ & v_\imath \longmapsto \delta_{i\imath} n_k \end{aligned} \qquad \begin{aligned} E_{hj} :\ & W \longrightarrow M \\ & w_\jmath \longmapsto \delta_{j\jmath} m_h \end{aligned}$$

不难验证

$$\sigma(E_{ki} \otimes E_{hj}) = E_{khij}$$

再根据维数可知是同构. □

评注 2.13 *最后我们需要指出函子的概念. 首先, (2.8) 表明在 $\otimes$ 两边不仅可以带入线性空间, 还可以带入线性空间的线性映射, 换言之*

$$\begin{tikzcd} - \otimes - : & K\text{-VetSpace}^2 & (V, W) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "{(\varphi,\psi)}"'] & V \otimes W \arrow[d, "\varphi \otimes \psi"] & K\text{-VetSpace} \\ & \cdots & (N, M) \arrow[r, mapsto] & N \otimes M & \cdots \end{tikzcd}$$

实际上不止于此, Hom 也是如此, 不过对于第一个分量要将映射 “反过来”,

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(-,-) : & K\text{-VetSpace}^2 & (V, W) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "{(\varphi^{\uparrow}_{\uparrow},\psi)}"'] & \mathrm{Hom}(V, W) \arrow[d, "f \mapsto \psi \circ f \circ \varphi"] & K\text{-VetSpace} \\ & \cdots & (N, M) \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Hom}(N, M) & \cdots \end{tikzcd}$$

这样的既作用于线性空间又作用于线性映射的 “操作” 被称为 **函子** *.*

[6] 下面用 δ_{ij} 在 $i = j$ 时取 1, $i \neq j$ 时取 0.

3 张量积的计算

想要算出张量积同构于怎样的线性空间, 对于有限维而言并无大的困难, 因为有限维线性空间同构与否完全蕴含在维数之中. 但是找出 "自然" 的映射则需要费一番功夫. 何谓 "自然"? 粗谈即写成什么样就映成什么样. 或者说准确地说, 就是其实是函子间的同构, 即当这些同构中出现的一组 "线性空间" 更换为另一组线性空间且两组之间对应的有线性映射相连, 那么这个同构还和这些线性映射可以交换.

I. 对偶空间 利用对偶空间, 我们可以将有限维线性空间的问题转化到数上, 从而能够更加清楚地写出所需的映射. 从而可以给出有限维线性空间作 $\otimes$ 和 Hom 之后得到的线性空间的自然同构的 "最简形式", 见 (3.9).

定义 3.1 (对偶空间) *特别地, 在 (2.5) 中取 $W = K$, 记 $V^\vee = \mathrm{Hom}(V, K)$ 为全体线性函数, 称为* **对偶 (dual) 空间** *.*

推论 3.2 *对于有限维空间 V, 如果 V 有一组集 $\{e_i\}_{i=1}^I$, 则 $V^\vee$ 有对偶基 $\{f^i\}_I^{i=1}$, 满足*

$$f^i(e_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

特别地 $\dim V^\vee = \dim V$.

命题 3.3 *对于有限维空间 V, 则有自然同构*

$$\varphi : V \longrightarrow (V^\vee)^\vee \qquad x \longmapsto \big[\, f \mapsto f(x) \,\big]$$

换言之, $\varphi(x)$ 对应的 $V^\vee$ 的操作是 "带入 x".

证明 不难直接通过定义知道 φ 是单射, 根据维数的断言 (3.2), 是同构. □

推论 3.4 *对于有限维线性空间 V, W, 有同构*

$$\begin{aligned} \varphi : \quad V^\vee \otimes W^\vee &\xrightarrow{\sim} (V \otimes W)^\vee \\ \varphi \otimes \psi &\longmapsto [x \otimes y \mapsto \varphi(x)\psi(y)] \end{aligned}$$

证明　根据 (2.12), 再结合同构 $K\otimes K\xrightarrow{x\otimes y\mapsto xy}K$ 知. □

定理 3.5 对于有限维线性空间 V,W, 则有同构

$$\varphi: V^\vee\otimes W\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}(V,W)\qquad f\otimes w\longmapsto[v\mapsto f(v)w]$$

证明　选定 V,W 的一组基, 根据 (3.2), (2.8) 基的选取, 这个映射实际上给出了一一对应. □

推论 3.6 对于有限维线性空间 V,W, 则有同构

$$\varphi:\mathrm{Hom}(V,W)\xrightarrow{\sim}(V\otimes W^\vee)^\vee\qquad f\longmapsto[v\otimes g\mapsto g(f(v))]$$

评注 3.7 (对偶技巧) *倘若对任意有限维线性空间 U, 根据 (3.3) 采取等同 $U\cong(U^\vee)^\vee$, 可以让所有向量都变成函数, 这样把所有值带入之后将是一个数, 这非常便于控制, 映射也很容易写出来. 例如说 (3.5), 假如作等同*

$$\mathrm{Hom}(V,W)\cong\mathrm{Hom}(V,(W^\vee)^\vee)\qquad V^\vee\otimes W\cong(V\otimes W^\vee)^\vee$$

那么映射是

$$\begin{array}{rccc}\varphi: & (V\otimes W^\vee)^\vee & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}(V,(W^\vee)^\vee)\\ & f & \longmapsto & \Big[v\mapsto[w^*\mapsto f(v\otimes w^*)]\Big]\end{array}$$

逆映射

$$\begin{array}{rccc}\psi: & \mathrm{Hom}(V,(W^\vee)^\vee) & \xrightarrow{\sim} & (V\otimes W^\vee)^\vee\\ & f & \longmapsto & \Big[v\otimes w^*\mapsto[f(v)](w^*)\Big]\end{array}$$

*而 (3.6) 可以看出这是标准化的过程, 就是把如下的 f“*所有能带入都带入直到得到一个数*”的这个函数创造出来,*

$$\varphi:\mathrm{Hom}(V,(W^\vee)^\vee)\xrightarrow{\sim}(V\otimes W^\vee)^\vee\qquad f\longmapsto[v\otimes w^*\mapsto(f(v))(w^*)]$$

这样做还有一个好处, 就是根据 (1.6), 实际上

$$(V\otimes W^\vee)^\vee=\{f:V\times W^\vee\to K: f\text{ 双线性}\}$$

这把难以控制的张量变成一个非常好控制的映射.

推论 3.8 在线性映射两边可以来回转换某一空间每次转化方向只需加一次对偶. 具体来说对于有限维线性空间 U, V, W, 则存在自然同构

$$\mathrm{Hom}(U \otimes V, W) \cong \mathrm{Hom}(U, V^\vee \otimes W)$$

具体映射如何, 请读者按照 *(3.7)* 的技巧写出.

评注 3.9 通过 *(3.6)* 等技巧, 任何一串有限维线性空间的张量积和 Hom 一定可以化成这些线性空间及其对偶空间的张量积, 这就是本节最开始提到的 "最简形式".

定义 3.10 (配合) 本节的过程启发我们将空间中的向量和对偶空间的函数同等看待. 我们约定类似内积的记号, 对于任何线性空间 V, 对于 $x \in V, f \in V^\vee$, 记

$$\langle f, x\rangle = \langle x, f\rangle = f(x)$$

称为 V 和 $V^\vee$ 的**配合 (pair)**. 不难知道 $\langle -, -\rangle$ 是一个双线性映射, 所以定义了 $V^\vee \otimes V \to K$ 的映射 [7]. 更一般地, 映射

$$W \otimes V^\vee \otimes V \xrightarrow{\mathrm{id}_W \otimes \langle -,-\rangle} W \otimes K \cong W$$

也被视作配合.

最后指出一个记号, 不过我们这里不会用到.

记号 3.11 可以记 "待带入" 的记号 $\langle -, f\rangle : x \mapsto \langle x, f\rangle$. 那么 *(3.3)* 的同态可以看做 $x \mapsto \langle -, x\rangle$.

在此记号下, 还可以继续记 $\langle x^*, x\rangle = \langle x^* | x\rangle$, 再记 $x \in V$ 为 $|x\rangle$, $x^* \in V^\vee$ 的元素为 $\langle x^*|$. 这样 *(3.5)* 的映射就是

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & V^\vee \otimes W & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}(V, W) \\ & \langle v^*| \otimes |w\rangle & \longmapsto & [|v\rangle \mapsto \langle v^*|v\rangle\ |w\rangle] \end{array}$$

映射就是 "合壁".

[7] 假如视 $V^\vee \otimes V \cong \mathrm{Hom}(V, V)$, 这个配合, 就是**迹 (trace)**, 这是一种不依赖于矩阵定义迹的方法.

II. 基变换 下面我们继续探讨有限维空间的张量积, 本节讨论的是当中元素的计算. 下面固定有限维线性空间 V, 选定其一组基 $\{e_i\}_{i=1}^n$, 其对偶基 $\{f^j\}_n^{j=1}$. 经过上一小节, 我们知道不论 V 和 $V^\vee$ 如何 $\otimes$ 或作用 Hom, 最终都能自然同构到如下形式

$$V^{\otimes r} \otimes V^{\vee \otimes s} = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{r} \otimes \overbrace{V^\vee \otimes \ldots \otimes V^\vee}^{s}$$

当中的元素被称为 r, s 型 混合张量. 那么我们知道其有基

$$\{e_{i_1} \otimes \ldots e_{i_r} \otimes f^{j_1} \otimes \ldots f^{j_s} : 1 \leq i_\bullet \leq n, 1 \leq j_\bullet \leq n\}$$

那么当中元素可以写成

$$x = \sum_{i_\bullet\, j_\bullet} x_{j_1 \ldots j_s}^{i_1 \ldots i_r} e_{i_1} \otimes \ldots e_{i_r} \otimes f^{j_1} \otimes \ldots f^{j_s}$$

下面我们就指出在基发生变化时会有怎样的情况发生.

定理 3.12 记号承上, 另选 V 的一组基 $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^n$ 设其对偶基是 $\{\hat{f}^i\}_n^{i=1}$, 如果

$$\hat{e}_i = \sum_j a_i^j e_j \qquad \hat{f}^i = \sum_j b_j^i f^j$$

则 (a_i^j) 和 (b_j^i) 互为逆矩阵, 换言之

$$\sum_k a_k^j b_j^k = \sum_k a_i^k b_k^j = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

换言之, 对偶基 $f^j = \sum_j a_i^j \hat{f}^i$.

证明 对偶基 f^i 满足 $f^i(e_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$, 故

$$f^j(\hat{e}_i) = f^j\left(\sum_k a_i^k e_k\right) = \sum_k a_i^k \delta_k^j = a_i^j$$

故 $f^i = \sum_j a_i^j \hat{f}^i$. 而

$$f^j = \sum_k a_k^j \hat{f}^k = \sum_{k,h} a_k^j b_h^k f^h$$

对比系数知 $\sum_k a_k^j b_j^k = \delta_j^i$, 这说明 (a_i^j) 和 (b_j^i) 互为逆矩阵. □

定理 3.13 记号承上, 另选 V 的一组基 $\{\hat{e}_\imath\}_{\imath=1}^n$ 设其对偶基是 $\{\hat{f}^\jmath\}_n^{\jmath=1}$, 如果

$$\hat{e}_\imath = \sum_i a_\imath^i e_i \quad \Rightarrow \quad \hat{f}^\jmath = \sum_i b_j^\jmath f^j$$

考虑

$$x \in V^{\otimes r} \otimes V^{\vee \otimes s} = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{r} \otimes \overbrace{V^\vee \otimes \ldots \otimes V^\vee}^{s}$$

若

$$x = \begin{cases} \sum_{i_\bullet j_\bullet} x_{j_1 \ldots j_s}^{i_1 \ldots i_r} e_{i_1} \otimes \ldots e_{i_r} \otimes f^{j_1} \otimes \ldots f^{j_s} \\ \sum_{\imath_\bullet \jmath_\bullet} \hat{x}_{\jmath_1 \ldots \jmath_s}^{\imath_1 \ldots \imath_r} \hat{e}_{\imath_1} \otimes \ldots \hat{e}_{\imath_r} \otimes \hat{f}^{\jmath_1} \otimes \ldots \hat{f}^{\jmath_s} \end{cases}$$

则

$$x_{j_1 \ldots j_s}^{i_1 \ldots i_r} = \sum_{i_\bullet j_\bullet} \hat{x}_{\jmath_1 \ldots \jmath_s}^{\imath_1 \ldots \imath_r} a_{\imath_1}^{i_1} \ldots a_{\imath_r}^{i_r} b_{j_1}^{\jmath_1} \ldots b_{j_s}^{\jmath_s}$$

证明 直接带入验证. □

评注 3.14 我们必须在这里指出一种更为常用的 **Einstein 求和约定**, 但我们不采用的记号. 在这种几号下, 会省去所有的求和号, 想要看出是对那些指标求和需要检查出现两次 *(上下各一次, 就像是 "约分") 的 "哑指标". 例如 (3.12)* 可以写成

$$\hat{e}_i = a_i^j e_j \qquad \hat{f}^i = b_j^i f^j$$

则

$$a_k^j b_j^k = a_i^k b_k^j = \delta_i^j$$

(3.13) 可以写成

$$x_{j_1 \ldots j_s}^{i_1 \ldots i_r} = \hat{x}_{\jmath_1 \ldots \jmath_s}^{\imath_1 \ldots \imath_r} a_{\imath_1}^{i_1} \ldots a_{\imath_r}^{i_r} b_{j_1}^{\jmath_1} \ldots b_{j_s}^{\jmath_s}$$

读者会发觉, 如果不吝惜字母的话, 等式几乎总是可以直接写出来的, 推导过程也非常简洁. 与其说这是一种记号, 倒不如说这就是矩阵运算的推广.

4 正合性

下面, 我们介绍张量积的正合性, 为了介绍正合性, 我们需要先介绍正合列, 为了介绍正合列, 我们需要先回顾商空间. 本节的核心定理是 (4.12).

I. 商空间 首先, 先让我们回顾商空间.

定义 4.1 (商空间) 对于线性空间 V, 子空间 W, 可以在 V 上定义等价关系

$$x \sim y \iff x - y \in W$$

由此确定的商集记为

$$V/W = \{x + W : x \in V\} \qquad x + W = \{x + w : w \in W\}$$

上面有自然的线性空间结构

$$k(x + W) = kx + W \qquad (x + W) + (y + W) = (x + y) + W$$

称 V/W 为商空间.

定理 4.2 (同态基本定理) 对于线性映射 $V \xrightarrow{\varphi} U$, 则存在线性同构

$$\hat{\varphi} : V/\ker\varphi \xrightarrow{\sim} \operatorname{im}\varphi \qquad x + \ker\varphi \longmapsto \varphi(x)$$

使得

$$\iota \circ \hat{\varphi} \circ \pi = \varphi \qquad \begin{array}{|c} \begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & U \\ V/\ker\varphi \arrow[r, "\sim", "\hat{\varphi}"'] & \operatorname{im}\varphi \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd} \end{array}$$

其中 $\operatorname{im}\varphi \xrightarrow{\iota} U$ 是包含映射, $V \xrightarrow{\pi} V/\ker\varphi$ 是自然映射.

证明 按照命题构造的映射不难验证是良定义的, 因为

$$x + \ker\varphi = y + \ker\varphi \iff x - y \in \ker\varphi \iff \varphi(x-y) = 0 \iff \varphi(x) = \varphi(y)$$

这还顺带证明了 $\hat{\varphi}$ 是单射, 而满射显然. 根据映射规则, 显然满足条件. □

定理 4.3 (第一同构定理) 对于线性映射 $V \xrightarrow{\varphi} \varphi(V)$, V 的子空间 W, 则存在满同态

$$\hat{\varphi} : V/W \longrightarrow \varphi(V)/\varphi(W) \qquad x + W \longmapsto \varphi(x) + \varphi(W)$$

当 $\ker \varphi \subseteq W$ 时, $\hat{\varphi}$ 是同构. 使得

$$\hat{\varphi} \circ \pi = \rho \circ \varphi \quad \Bigg| \quad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & \varphi(V) \arrow[d, "\rho"] \\ V/W \arrow[r, two heads, "\hat{\varphi}"'] & \varphi(V)/\varphi(W) \end{tikzcd}$$

其中 $\pi : V \to V/W$, $\rho : \varphi(V) \to \varphi(V)/\varphi(W)$ 是自然映射.

证明 按照定义直接验证. □

推论 4.4 (第一同构定理 • 经典版本) 若线性空间 $W\!W \subseteq W \subseteq V$, 则

$$\frac{V}{W} \cong \frac{V/W\!W}{W/W\!W}$$

证明 应用定理于自然映射 $V \to V/W\!W$. □

定理 4.5 (第二同构定理) 对于线性映射 $U \xrightarrow{\varphi} V$, V 的子空间 W, 则存在满同态

$$\hat{\varphi} : U/\varphi^{-1}(W) \longrightarrow V/W \qquad x + \varphi^{-1}(W) \longmapsto \varphi(x) + W$$

当 $W + \operatorname{im} \varphi = V$ 时, $\hat{\varphi}$ 是同构. 使得

$$\hat{\varphi} \circ \pi = \rho \circ \varphi \quad \Bigg| \quad \begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & V \arrow[d, "\rho"] \\ U/\varphi^{-1}(W) \arrow[r, hook, "\hat{\varphi}"'] & V/W \end{tikzcd}$$

其中 $\pi : U \to U/\varphi^{-1}(W)$, $\rho : V \to V/W$ 是自然映射.

证明 按照定义直接验证. □

推论 4.6 (第二同构定理 • 经典版本) 若线性空间 V, W 是某线性空间的子空间，则

$$\frac{V}{V \cap W} \cong \frac{V+W}{W}$$

证明　应用定理于包含映射 $V \to V+W$. □

II. 正合列

定义 4.7 (正合) 对于一串线性空间的同态

$$\ldots \to U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W \to \ldots$$

称在 V 处**正合 (exact)** 如果 $\ker\psi = \operatorname{im}\varphi$. 称整个同态序列是正合的如果处处正合.

例 4.8 设零线性空间 $0 = \{0\}$, 零同态 $0 : V \xrightarrow{x \mapsto 0} W$. 则

$$A \xrightarrow{\varphi} B\text{是单射} \iff 0 \xrightarrow{0} A \xrightarrow{\varphi} B\text{正合}$$

以及

$$A \xrightarrow{\varphi} B\text{是满射} \iff A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{0} 0\text{正合}$$

由于由零线性空间 0 出发和结束的同态都只有 0, 时常省略.

例 4.9 对于线性空间 V, 子空间 W, 可做商空间 V/W, 若记 $\iota : W \to V$ 是包含映射, $\pi : V \to V/W$ 是自然映射, 那么

$$0 \to W \xrightarrow{\iota} V \xrightarrow{\pi} V/W \to 0\text{正合}$$

因为 $\ker\pi = W = \operatorname{im}\iota$.

定义 4.10 (短正合列) 称形如下的正合列是**短 (short) 正合列**

$$0 \to U \to V \to W \to 0$$

换言之, 在同构意义下 $V/U = W$.

评注 4.11 实际上任何正合列都可以拆成短正合列, 例如假设有正合列

$$\ldots \to V_{i+1} \overset{\mathrm{d}_{i+1}}{\to} V_i \overset{\mathrm{d}_i}{\to} V_{i-1} \to \ldots$$

记 $K_i = \ker \mathrm{d}_i = \operatorname{im} \mathrm{d}_{i+1}$, 则有正合列

$$0 \to K_i \to V_i \to K_{i-1} \to 0$$

定理 4.12 对于线性空间 V, 任何正合列张量上 V 还是正合的, 具体来说, 假如有正合列

$$\ldots \to V_{i+1} \overset{\mathrm{d}_{i+1}}{\to} V_i \overset{\mathrm{d}_i}{\to} V_{i-1} \to \ldots$$

那么有正合列,

$$\ldots \to V_{i+1} \otimes V \overset{\mathrm{d}_{i+1}}{\to} V_i \otimes V \overset{\mathrm{d}_i}{\to} V_{i-1} \otimes V \to \ldots$$

其中的映射实际上是 $\mathrm{d}_i \otimes \mathrm{id}_V$, 但是方便起见仍然记为 d_i.

证明 根据 (4.11), 实际上我们只需要证明对于短正合列正确即可. 考虑短正合列

$$0 \to A \overset{\iota}{\to} B \overset{\pi}{\to} C \to 0$$

得到列

$$0 \to A \otimes V \xrightarrow{\iota \otimes \mathrm{id}_V} B \otimes V \xrightarrow{\pi \otimes \mathrm{id}_V} C \otimes V \to 0$$

先证明在 $C \otimes V$ 处正合, 即 $\pi \otimes \mathrm{id}_V$ 是满射. 因为 $C \otimes V$ 是形如 $c \otimes v$ 的线性组合, 其中 $c \in C, v \in V$, 故只要证明 $c \otimes v \in \operatorname{im}(\pi \otimes \mathrm{id}_V)$.

再证明在 $B \otimes V$ 处正合. 首先 $(\iota \otimes \mathrm{id}_V) \circ (\pi \otimes \mathrm{id}_V) = 0$ 无疑, 故 $\operatorname{im}(\iota \otimes \mathrm{id}_V) \subseteq \ker(\pi \otimes \mathrm{id}_V)$. 反之, 若

$$x = \sum_i b_i \otimes v_i \in B \otimes V \quad \text{s. t.} \quad (\pi \otimes \mathrm{id}_V)(x) = \sum \pi(b_i) \otimes v_i = 0$$

根据 (1.3), 存在 a_{ij} 和 $\{v'_j\}$ 使得

$$v_i = \sum_j a_{ij} v'_j \qquad 0 = \sum_i a_{ij} \pi(b_i)$$

即 $\pi\left(\sum_i a_{ij}b_i\right)=0$, 换言之, $\sum_i a_{ij}b_i \in \ker\pi = \operatorname{im}\iota$, 这样

$$x=\sum_i b_i\otimes v_i=\sum_{i,j} b_i\otimes a_{ij}v_j'=\sum_j\left(\sum_i a_{ij}b_i\right)\otimes v_j'\in\operatorname{im}(\iota\otimes\mathrm{id}_V)$$

故 $\operatorname{im}(\iota\otimes\mathrm{id}_V)=\ker(\pi\otimes\mathrm{id}_V)$.

最后证明在 $A\otimes V$ 处正合. 即 $\iota\otimes\mathrm{id}_V$ 是单射. 取 V 的一组基 $\{v_i\}_{i\in I}$, 任意 $x\in A\otimes V$ 都可以整理成 v_i 的 A-线性组合

$$x=\sum_{i\in I} a_i\otimes v_i \qquad (\text{有限和}) \qquad a_i\in A$$

这样

$$(\iota\otimes\mathrm{id}_V)(x)=\sum_{i\in I}\iota(a_i)\otimes v_i=0$$

而所有非零的 $\iota(a_i)\otimes v_i$ 皆线性无关, 与求和为 0 矛盾, 故 $\iota(a_i)=0$, 即 $a_i=0$, 即 $x=0$, 这说明 $\iota\otimes\mathrm{id}_V$ 是单射. □

推论 4.13 *对于线性空间 V, 线性映射 $A\xrightarrow{\varphi}B$.*

- *若 φ 是单射, 则 $\varphi\otimes\mathrm{id}_V$ 也是单射.*
- *若 φ 是满射, 则 $\varphi\otimes\mathrm{id}_V$ 也是满射.*

推论 4.14 *对于线性空间 V, 若 $A\subseteq B$, 则*

- *$A\otimes V$ 可以看做是 $B\otimes V$ 的子空间.*
- *$(B\otimes V)/(A\otimes V)\cong B/A$.*

5 例子与应用

I. 线性映射张量积的核 下面我们考虑这样一个问题, 对于 $V\xrightarrow{\varphi}N, W\xrightarrow{\psi}M$, 诱导出 $V\otimes W\xrightarrow{\varphi\otimes\psi}N\otimes M$, 其核与 $\ker\varphi,\ker\psi$ 有何关系?

命题 5.1 记号承上，有

$$\ker(\varphi\otimes\psi)=\ker\varphi\otimes W+V\otimes\ker\psi$$

具体来说，$\ker(\varphi\otimes\psi)=\operatorname{im}(\iota\otimes\mathrm{id}_W)+\operatorname{im}(\mathrm{id}_V\otimes\jmath)$，其中 $\iota:\ker\varphi\to V$，$\jmath:\ker\psi\to W$ 是包含映射.

证明 首先，不妨假设 φ,ψ 都是满射 [8]，可以绘制如下交换图

$$\begin{tikzcd}
\ker\varphi\otimes\ker\psi \arrow[r, "\iota\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\jmath"'] & V\otimes\ker\psi \arrow[r, "\varphi\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\jmath"'] & N\otimes\ker\psi \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\jmath"'] & 0 \\
\ker\varphi\otimes W \arrow[r, "\iota\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\psi"'] & V\otimes W \arrow[r, "\varphi\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\psi"'] \arrow[dr, "\varphi\otimes\psi"] & N\otimes W \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\psi"'] & 0 \\
\ker\varphi\otimes M \arrow[r, "\iota\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d] & V\otimes M \arrow[r, "\varphi\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d] & N\otimes M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

注意到 $[V\otimes W\overset{\varphi\otimes\psi}{\to}N\otimes M]=[V\otimes W\overset{\mathrm{id}\otimes\psi}{\to}V\otimes M\overset{\varphi\otimes\mathrm{id}}{\to}N\otimes M]$.

- 若 $x\in V\otimes W$ 满足 $(\varphi\otimes\psi)(x)=0$.
- 设 $y=(\mathrm{id}\otimes\psi)(x)\in V\otimes M$，则 $(\varphi\otimes\mathrm{id})(y)=0$.
- 根据正合性，存在 $z\in\ker\varphi\otimes M$ 使得 $(\iota\otimes\mathrm{id})(z)=y$.
- 根据正合性，存在 $w\in\ker\varphi\otimes W$ 使得 $(\mathrm{id}\otimes\psi)(w)=z$.
- 设 $u=(\iota\otimes\mathrm{id})(w)$，则 $(\mathrm{id}\otimes\psi)(x-u)=y-y=0$.
- 根据正合性，存在 $v\in V\otimes\ker\psi$ 使得 $(\varphi\otimes\mathrm{id})(v)=x-u$

这样 $x=(\iota\otimes\mathrm{id})(w)+(\varphi\otimes\mathrm{id})(v)$. 而我们早就知道 $\ker(\varphi\otimes\psi)\supseteq\operatorname{im}(\iota\otimes\mathrm{id}_W)+\operatorname{im}(\mathrm{id}_V\otimes\jmath)$. 命题得证. □

这种技巧被称为**追图 (chasing graph)**，其特点是直接动手验证快比阅读证明快得多，与之对应的表达过程于笔端远不如画图形象，相比之下，画图反而成为最花时间的项目.

[8] 这是因为 $\operatorname{im}\varphi\otimes\operatorname{im}\psi\to N\otimes M$ 是单射，参见 (4.12).

II. 重看线性代数 回忆 (3.5), 而选定一组基的同时会将 $\operatorname{Hom}(V,W)$ 变成矩阵, 见 (2.9). 故我们希望能从 $V^\vee\otimes W$ 中一窥矩阵论的概念. 倘若选取 V 的一组基 $\{v_i\}_{i=1}^I$, 对应的对偶基 $\{f^i\}_I^{i=1}$, W 的一组基 $\{w_j\}_{j=1}^J$. 在 (2.8) 中计算的 $\operatorname{Hom}(V,W)$ 的基

$$E_{ji}:V\longrightarrow W\qquad v_\iota\longmapsto\begin{cases}w_j & \iota=i\\ 0 & \iota\neq i\end{cases}$$

实际上 $E_{ji}=f^i\otimes w_j$. 故实际上有如下的一一对应

$$\begin{array}{ccc}V^\vee\otimes W & \operatorname{Hom}(V,W) & \mathbb{M}_{m\times n}(K)\\ f^i\otimes w_j & E_{ji} & \boldsymbol{E}_{ji}\end{array}$$

命题 5.2 (乘法) 记号承上, 如下映射通过同构是一样的

$$\begin{aligned}\mu:\quad (U^\vee\otimes V)\times(V^\vee\otimes W) &\longrightarrow U^\vee\otimes W\\ (u^*\otimes v,v^*\otimes w) &\longmapsto v^*(v)\,u^*\otimes w\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu:\quad \operatorname{Hom}(U,V)\times\operatorname{Hom}(V,W) &\longrightarrow \operatorname{Hom}(U,W)\\ (A,B) &\longmapsto B\circ A\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu:\quad \mathbb{M}_{I\times L}(K)\times\mathbb{M}_{J\times I}(K) &\longrightarrow \mathbb{M}_{J\times L}(K)\\ (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) &\longmapsto \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

证明 只要验证在对应的基处一样即可. □

下面假设 $x\in V^\vee\otimes W$ 对应于线性映射 $A\in\operatorname{Hom}(V,W)$ 对应于矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{M}_{J\times I}(K)$.

命题 5.3 (秩) 记号承上, $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 $\dim\operatorname{im}A$ 等于

$$\inf\left\{n: x=\sum_{i=1}^n v_i^*\otimes w_i\right\}$$

证明 不难发现, 上述值对应到矩阵上是 “将 $\boldsymbol{A}$ 写成秩 1 矩阵之和的最短方式的长度”. 设 $\boldsymbol{A}$ 的秩是 r, 对应的上述值为 i.

注意到 Gauss 消元法断言, 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \\ & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_{11}\boldsymbol{Q}+\ldots+\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_{rr}\boldsymbol{Q}$$

故 $r\geq i$. 而我们在线性代数中知道两个矩阵的和的秩小于等于秩的和, 故 $r\leq i$, 命题得证. □

下面取 $W=V$, $w_i=v_i$.

命题 5.4 (迹) 记号承上, 如下映射通过同构是一样的

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}:\quad V^\vee\otimes V &\longrightarrow K\\ v^*\otimes v &\longmapsto v^*(v)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}:\quad \mathbb{M}_{I\times I}(K) &\longrightarrow K\\ \boldsymbol{A}=(a_{ij}) &\longmapsto \mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}=a_{11}+\ldots+a_{nn}\end{aligned}$$

证明 只要验证在对应的基处一样即可. □

III. 方形拼接 关于张量有一个很有趣的应用, 我们可以用来解决方形拼接的问题. 这需要我们在 $\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ 上工作, 为此, 我们赋予其一定的几何意义. 对于 $x\otimes y\in\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$, 我们将其看做是长为 x, 宽为 y 的箱子. 我们将 $\sum x\otimes y$ 看做是这样箱子的堆砌. 回看 (1.2), 三条运算律分别对应于

- 将两个宽相同的箱子合并成一个箱子. 或反之.
- 将两个长相同的箱子合并成一个箱子. 或反之.

第三条是分成有限份, 这和前两条重复了. 这样两组箱子的堆砌是相同的, 当且仅当可以通过拆分或合并箱子使得一样.

命题 5.5 给定长方形 R, 将其分成有限个内部不重叠的长方形 $R_1,\ldots,R_n$. 若 R_i 的边长中至少有一个是有理数, 则 R 亦然.

证明 将长方形变成 “箱子” 放进 $\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ 里, 这样

$$R=R_1+\ldots+R_n$$

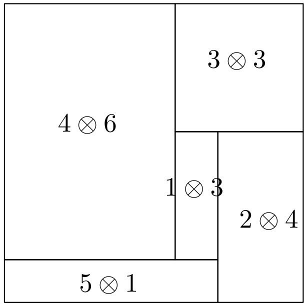


Figure 2: $7 \otimes 7 = 5 \otimes 1 + 4 \otimes 6 + 3 \otimes 3 + 2 \otimes 4 + 1 \otimes 3$

考虑 $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Q}$, 条件化为 $(\pi \otimes \pi)(V_i) = 0$, 这样 $(\pi \otimes \pi)(V) = 0$. 根据 (5.1), $R \in \mathbb{Q} \otimes \mathbb{R} + \mathbb{R} \otimes \mathbb{Q}$. 之后的论证是技术性的.

如果 R 不在某一个之中, 必然可以假设

$$V = 1 \otimes s + t \otimes 1 \qquad s, t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

记 $\mathbb{Q}_s = \mathbb{Q} + s\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_t = \mathbb{Q} + t\mathbb{Q}$, 这样限制

$$R \in \mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q}_s + \mathbb{Q}_t \otimes \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}_s \otimes \mathbb{Q}_t$$

上, 但 $1 \otimes 1, 1 \otimes s, t \otimes 1, s \otimes t$ 是 $\mathbb{Q}_s \otimes \mathbb{Q}_t$ 的一组基, 前三者是 $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q}_s + \mathbb{Q}_t \otimes \mathbb{Q}$ 一组基. 对 $R = (a + bs) \otimes (c + dt)$ 展开可得 $bd = 0$. 故 $a + bs, c + dt$ 之中有一个有理数, 矛盾. □

命题 5.6 *一个长方形 R 可以将其分成有限个内部不重叠的正方形的充分必要条件是边长比是有理数.*

证明 首先, 充分性是显然的. 反之, 同样放置在 $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ 里, 不妨假设 $R = 1 \otimes s$, 其中 s 是无理数, 如果可以写成有限个内部不重叠的正方形, 则

$$1 \otimes s = \sum_{i=1}^{n} r_i \otimes r_i$$

考虑 $\mathbb{Q}^+ = \mathbb{Q} + s\mathbb{Q} + \sum r_i \mathbb{Q}$. 这样, 重新放置在 $\mathbb{Q}^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^+$ 里. 因为 s 是无理数, 可以构造有理双线性函数 $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}$ 使得

$$f(1) = 1 \qquad f(s) = -1$$

这样考虑 $f\otimes f:\mathbb{Q}^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}^+\to\mathbb{Q}$. 此时,

$$-1=f(1)f(s)=(f\otimes f)(1\otimes s)=\sum_{i=1}^{n}(f\otimes f)(r_i\otimes r_i)=\sum_{i=1}^{n}f(r_i)^2$$

矛盾! $\square$