FOC-PINC 第二试（信心场）题解

cdqz

签到题（qiandao）

如果一个点的度数不是 c 的倍数，那么它的贡献至少为 1。我们一定可以构造出一种方案，使得度数是 c 的倍数的点的贡献为 0，其余的点的贡献为 1。这可以简单网络流证明，留给读者练习。

M 弟娃（magic）

考虑对于一对点，将哪些点作为根会使这对点产生贡献。现在假定 1 为实际根，分两种情况：若这两个点不是祖先儿子关系，则将根选在两个点的子树里时，这对点会产生贡献；若这两个点是祖先儿子关系，令深度较深的点为 x，较浅的为 y，y 在这条链上的儿子为 z，则将根选在 x 的子树里，或是不在 z 的子树里时，这对点会产生贡献。

求出 dfs 序，相当于我们只需要支持区间加，全局 max 即可。

变异大老鼠（arrest）

20pts

暴力枚举每个点放几个人计算最大答案即可。

100pts

考虑 SPT 上树形 dp。$f_{i,j}$ 表示在以 i 为根的子树中，总共放了 j 个警察，逮捕到杨吞天的最大概率。枚举当前节点放几个警察正常树形 dp 转移。

朝鲜时蔬（vegetable）

$$|\mathfrak{P}_{1,1}(S_n)| = n. \tag{1}$$

$$|\mathfrak{P}_{2,1}(S_n)| = \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} - 1 \right\rfloor. \tag{2}$$

$$|\mathfrak{P}_{2,2}(S_n)| = \frac{n(n-1)}{2}. \tag{3}$$

$$|\mathfrak{P}_{3,1}(S_n)| = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor. \tag{4}$$

$$|\mathfrak{P}_{3,2}(S_n)| = \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \times \frac{i-1-[2 \mid i]}{2}. \tag{5}$$

$$|\mathfrak{P}_{3,3}(S_n)| = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}. \tag{6}$$

$$|\mathfrak{P}_{4,1}(S_n)| = \begin{cases} 1, & n = 4, 5, \\ \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{9} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{21} \right\rfloor, & n \geq 6. \end{cases} \tag{7}$$

$$|\mathfrak{P}_{4,2}(S_n)| = \begin{cases} 1, & n = 4, 5, 6, \\ 3, & n = 7, \\ 6, & n = 8, \\ 9, & n = 9, \\ 10, & n = 10, \\ \left\lfloor \frac{n}{11} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{29} \right\rfloor, & n \geq 11. \end{cases} \tag{8}$$

$$|\mathfrak{P}_{4,3}(S_n)| = \begin{cases} 1, & n = 4, \\ 5, & n = 5, \\ \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \times \frac{i^2-6i+5+3[2|i]+4[3|i]}{12}, & n \geq 6. \end{cases} \tag{9}$$

$$|\mathfrak{P}_{4,4}(S_n)| = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}. \tag{10}$$

整除分块计算 (2), (5), (9)，其余直接计算即可。时间复杂度 $O(\sqrt{n})$，空间复杂度 $O(1)$。

$m = 1, k = 1$

从 n 个数中任选 1 个。

$m=2,k=1$

对于正整数 $a_1<a_2$，因为

$$a_2\nmid a_1 \implies a_2\nmid\left(a_1+a_2\right).$$

所以只可能有

$$a_1\mid\left(a_1+a_2\right) \implies a_1\mid a_2.$$

枚举 a_1 算出对应的 a_2 个数求和即可。

$m=2,k=2$

从 n 个数中任选 2 个。

$m=3,k=1$

假设 n 足够大且存在三个不同的正整数数 a_1,a_2,a_3 满足

$$\begin{cases} a_1\mid\left(a_1+a_2+a_3\right), \\ a_2\mid\left(a_1+a_2+a_3\right), \\ a_3\mid\left(a_1+a_2+a_3\right). \end{cases}$$

不失一般性假设正整数 $1<x<y<z$ 满足

$$\begin{cases} xa_1=a_1+a_2+a_3, \\ ya_2=a_1+a_2+a_3, \\ za_3=a_1+a_2+a_3. \end{cases}$$

则

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1.$$

由于

$$1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{3}{x} \implies x<3 \implies x=2.$$

因此

$$\left(y-2\right)\left(z-2\right)=4.$$

从而得到唯一解 $(x,y,z)=(2,3,6)$

所以 $\{a_1,a_2,a_3\}=\{k,2k,3k\}\,(k\in\mathbb{N}^*)$。故在 $n\geq 3$ 时即满足假设条件。

$m=3,k=2$

对于正整数 $a_1<a_2<a_3$，有

$$\begin{cases}(a_1+a_3)\nmid a_2 & \implies (a_1+a_3)\nmid(a_1+a_2+a_3)\,, \\ (a_2+a_3)\nmid a_1 & \implies (a_2+a_3)\nmid(a_1+a_2+a_3)\,. \end{cases}$$

所以只可能有

$$(a_1+a_2)\mid(a_1+a_2+a_3)\implies(a_1+a_2)\mid a_3.$$

枚举 a_1+a_2 算出对应的拆分方案数与 a_3 的个数求和即可。

考虑计算 a_1+a_2 的拆分方案数：枚举 a_1 则可以确定唯一 a_2，这样“$a+b$ 形式”的会被计算 2 次，“$a+a$ 形式”的（如果有）会被计算 1 次，减掉后者的情况后除以 2 就能得到 a_1+a_2 的拆分方案数。

$m=3,k=3$

从 n 个数中任选 3 个。

$m=4,k=1$

假设 n 足够大且存在三个不同的正整数数 a_1,a_2,a_3,a_4 满足

$$\begin{cases}a_1\mid(a_1+a_2+a_3+a_4)\,, \\ a_2\mid(a_1+a_2+a_3+a_4)\,, \\ a_3\mid(a_1+a_2+a_3+a_4)\,, \\ a_4\mid(a_1+a_2+a_3+a_4)\,. \end{cases}$$

不失一般性假设正整数 $1<x<y<z<w$ 满足

$$\begin{cases}xa_1=a_1+a_2+a_3+a_4, \\ ya_2=a_1+a_2+a_3+a_4, \\ za_3=a_1+a_2+a_3+a_4, \\ wa_4=a_1+a_2+a_3+a_4. \end{cases}$$

则

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}=1.$$

假设 $x \geq 3$，则
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w} \leq \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}<1.$$
于是
$$1<x<3 \implies x=2$$
假设 $y \geq 6$，则
$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w} \leq \frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}<\frac{1}{2}.$$
于是
$$2=x<y<6 \implies y=3 \vee y=4 \vee y=5$$
若 $y=3$，有
$$(z-6)(w-6)=36.$$
若 $y=4$，有
$$(z-4)(w-4)=16.$$
若 $y=5$，有
$$(3z-10)(3w-10)=100.$$
分别解之并验证，得到解 $(x,y,z,w)=(2,3,7,42)$，$(2,3,8,24)$，$(2,3,9,18)$，$(2,3,10,15)$，$(2,4,5,20)$ 或 $(2,4,6,12)$。所以 $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}=\{k,2k,3k,6k\}$，$\{k,2k,6k,9k\}$，$\{k,3k,8k,12k\}$，$\{k,4k,5k,10k\}$，$\{k,6k,14k,21k\}$ 或 $\{2k,3k,10k,15k\}\,(k\in\mathbb{N}^*)$。

故在 $n \geq 6$ 时即满足假设条件，$n=4$ 与 $n=5$ 的情况另算即可。

$m=4,k=2$

对于正整数 $a_1<a_2<a_3<a_4$，有
$$\begin{cases}(a_2+a_4)\nmid(a_1+a_3) & \implies (a_2+a_4)\nmid(a_1+a_2+a_3+a_4),\\ (a_3+a_4)\nmid(a_1+a_2) & \implies (a_3+a_4)\nmid(a_1+a_2+a_3+a_4).\end{cases}$$
假设 n 足够大且存在 $a_1<a_2<a_3<a_4$ 满足
$$\begin{cases}(a_1+a_2)\mid(a_1+a_2+a_3+a_4) & \implies (a_1+a_2)\mid(a_3+a_4),\\ (a_1+a_3)\mid(a_1+a_2+a_3+a_4) & \implies (a_1+a_3)\mid(a_2+a_4),\\ (a_1+a_4)\mid(a_1+a_2+a_3+a_4) & \\ (a_2+a_3)\mid(a_1+a_2+a_3+a_4) & \implies a_1+a_4=a_2+a_3.\end{cases}$$

设
$$s(a_1+a_3)=a_2+a_4=2a_2+a_3-a_1<3(a_1+a_3).$$

所以

$$1 < s < 3 \implies s = 2.$$

设

$$t\left(a_1 + a_2\right) = a_3 + a_4 = 5a_2 - 7a_1 < 5\left(a_1 + a_2\right).$$

所以

$$2 = s < t < 5 \implies t = 3 \vee t = 4.$$

验证可得 $\{a_1, a_2, a_3, a_4\} = \{k, 5k, 7k, 11k\}$ 或 $\{k, 11k, 19k, 29k\}\,(k \in \mathbb{N}^*)$。

故在 $n \geq 11$ 时即满足假设条件，$n < 11$ 的情况另算即可。

$m = 4, k = 3$

对于正整数 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$，有

$$\begin{cases} (a_1 + a_2 + a_4) \nmid a_3 & \implies (a_1 + a_2 + a_4) \nmid (a_1 + a_2 + a_3 + a_4), \\ (a_1 + a_3 + a_4) \nmid a_2 & \implies (a_1 + a_3 + a_4) \nmid (a_1 + a_2 + a_3 + a_4), \\ (a_2 + a_3 + a_4) \nmid a_1 & \implies (a_2 + a_3 + a_4) \nmid (a_1 + a_2 + a_3 + a_4). \end{cases}$$

所以只可能有

$$(a_1 + a_2 + a_3) \mid (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \implies (a_1 + a_2 + a_3) \mid a_4.$$

枚举 $a_1 + a_2 + a_3$ 算出对应的拆分方案数与 a_4 的个数求和即可。

考虑计算 $a_1 + a_2 + a_3$ 的拆分方案数：枚举 a_1 则可以计算 $a_2 + a_3$ 的拆分方案数，这样“$a + b + c$ 形式”的会被计算 6 次，“$a + a + b$ 形式”的会被计算 3 次，“$a + a + a$ 形式”的（如果有）会被计算 1 次。枚举 a 确定唯一 b 来减掉“$a + a + b$ 形式”的情况后“$a + a + a$ 形式”的被多减掉了 2 次。再加上这种情况并除以 6 就能得到 $a_1 + a_2 + a_3$ 的拆分方案数。

由于 $n \geq 6$ 时才能满足，所以 $n = 4$ 与 $n = 5$ 的情况另算即可。

$m = 4, k = 4$

从 n 个数中任选 4 个。