容斥原理及其应用

RogerDTZ

2018 年 8 月 2 日

基本概念

其实是我瞎定义的

- 元素：需要考虑与统计的单一个体
- 性质：人为定义的条件
- 性质集合：具备某一些性质的元素所构成的集合

经典集合容斥

现在有三种性质a, b, c.

已知分别满足每一种性质的元素个数、分别满足每两种性质的元素个数、满足全部性质的元素个数.

求总共有多少个元素?

经典集合容斥

记满足性质a的元素的集合为A.同理得到B和C。

经典集合容斥

记满足性质a的元素的集合为A.同理得到B和C。

则上述问题可以用数学方式表达为

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

经典集合容斥

通用表达

$$
\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| \\
= &\sum_{1 \le i_1 \le m} |A_{i_1}| - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le m} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le m} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| \\
&- \ldots + (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|
\end{aligned}
$$

经典集合容斥

通用表达

$$
\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| \\
&= \sum_{1 \le i_1 \le m} |A_{i_1}| - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le m} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le m} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| \\
&\quad - \ldots + (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|
\end{aligned}
$$

$$
\left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right| = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le m} \left|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right|
$$

经典集合容斥

通用表达

$$
\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| \\
= &\sum_{1 \le i_1 \le m} |A_{i_1}| - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le m} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le m} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| \\
&- \ldots + (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|
\end{aligned}
$$

$$
\left| \bigcup_{i=1}^{m} A_i \right| = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le m} \left| \bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j} \right|
$$

其中$(-1)^{k-1}$称为此问题中的容斥系数。

经典集合容斥

通用表达2

另一种表达形式:

枚举集族B,其容斥系数与B的大小有关,则有

$$\left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right| = \sum_{B}(-1)^{|B|-1}\left|\bigcap_{A_j\in B} A_j\right|$$

经典集合容斥

关于容斥系数是否合法的证明

经典集合容斥

关于容斥系数是否合法的证明

考虑每个元素a,它应被统计恰好一次

经典集合容斥

关于容斥系数是否合法的证明

考虑每个元素a,它应被统计恰好一次

实际统计次数?

经典集合容斥

关于容斥系数是否合法的证明

记包含a的集合有k个，分别为$A_1, A_2, ..., A_k$
集族$C = \{A_1, A_2, ..., A_k\}$

经典集合容斥

关于容斥系数是否合法的证明

记包含a的集合有k个，分别为$A_1, A_2, ..., A_k$
集族$C = \{A_1, A_2, ..., A_k\}$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right| = \sum_{B}(-1)^{|B|-1}\left|\bigcap_{A_j \in B} A_j\right|$$

经典集合容斥

关于容斥系数是否合法的证明

记包含a的集合有k个，分别为$A_1, A_2, ..., A_k$
集族$C = \{A_1, A_2, ..., A_k\}$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right| = \sum_{B}(-1)^{|B|-1}\left|\bigcap_{A_j \in B} A_j\right|$$

当且仅当枚举的集族$B \subseteq C$时，a才有1或-1的贡献。

- $|B| = 1$时，共有$\binom{k}{1}$次枚举到有效B，贡献为正。
- $|B| = 2$时，共有$\binom{k}{2}$次枚举到有效B，贡献为负。
- ......
- $|B| = k$时，共有$\binom{k}{k}$次枚举到有效B，贡献为$(-1)^{k-1}$

经典集合容斥

关于容斥系数是否合法的证明

元素a的总统计次数sum?

$$sum = \binom{k}{1} - \binom{k}{2} + ... + (-1)^{k-1}\binom{k}{k}$$

经典集合容斥

关于容斥系数是否合法的证明

元素a的总统计次数sum?

$$sum = \binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \dots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k}$$
$$= 1$$

经典集合容斥

关于容斥系数是否合法的证明

元素a的总统计次数sum?

$$sum = \binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \ldots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k}$$
$$= 1$$

因此每个元素恰好被统计到了一次

经典集合容斥

关于容斥系数是否合法的证明

元素a的总统计次数sum?

$$
\begin{aligned}
sum &= \binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \ldots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

因此每个元素恰好被统计到了一次
即所有集合的并集大小等于元素个数之和

容斥问题的特征

- 一般是求元素总数

容斥问题的特征

- 一般是求元素总数
- 统计的元素具有若干性质

容斥问题的特征

- 一般是求元素总数
- 统计的元素具有若干性质
- 具有某一些性质的元素数量比较方便统计

容斥问题的特征

- 一般是求元素总数
- 统计的元素具有若干性质
- 具有某一些性质的元素数量比较方便统计

性质可以是什么?

容斥问题的特征

- 一般是求元素总数
- 统计的元素具有若干性质
- 具有某一些性质的元素数量比较方便统计

性质可以是什么？

- 一种特征
- 诸如大于、小于的条件

容斥问题的特征

- 一般是求元素总数
- 统计的元素具有若干性质
- 具有某一些性质的元素数量比较方便统计

性质可以是什么？

- 一种特征
- 诸如大于、小于的条件
- …

容斥应用

来看一道例题：【BZOJ3589】动态树

给定一棵有根树（$n \le 200,000$），每个点有初始为0的权值
要求支持两种操作（操作数$q \le 200,000$）：

- 某一子树内的点点权加上x
- 查询k条树链的并（$k \le 5$）

容斥应用

来看一道例题：【BZOJ3589】动态树

给定一棵有根树（$n \leq 200,000$），每个点有初始为0的权值
要求支持两种操作（操作数$q \leq 200,000$）：

- 某一子树内的点点权加上x
- 查询k条树链的并（$k \leq 5$）

子树加用树状数组实现

容斥应用

来看一道例题：【BZOJ3589】动态树

给定一棵有根树（$n \le 200,000$），每个点有初始为0的权值
要求支持两种操作（操作数$q \le 200,000$）：

- 某一子树内的点点权加上x
- 查询k条树链的并（$k \le 5$）

子树加用树状数组实现
每条树链看做一个性质集合，属于这条树链的点即属于该集合
题目要求所有集合的并
直接枚举每条、两两交、三三交.....容斥即可
LCA最好用$O(1)$查询的RMQ解决

容斥应用

【BZOJ1853】幸运数字

给定l, r（$1 \leq l < r \leq 10^{10}$），求$[l, r]$内有多少能好数整除的数？
一个数被称作好数，当且仅当其由6或8组成。

容斥应用

$[1,10^{10}]$内的好数个数在3000以内。

容斥应用

$[1,10^{10}]$内的好数个数在3000以内。
除去能被其他好数表示的好数，数量级进一步减少。

容斥应用

$[1, 10^{10}]$内的好数个数在3000以内。
除去能被其他好数表示的好数，数量级进一步减少。
性质设置：能被某些好数整除，即能被某些好数的LCM整除。

容斥应用

$[1, 10^{10}]$内的好数个数在3000以内。
除去能被其他好数表示的好数，数量级进一步减少。
性质设置：能被某些好数整除，即能被某些好数的LCM整除。
直接枚举集合容斥，复杂度极高。

容斥应用

$[1, 10^{10}]$内的好数个数在3000以内。
除去能被其他好数表示的好数，数量级进一步减少。
性质设置：能被某些好数整除，即能被某些好数的LCM整除。
直接枚举集合容斥，复杂度极高。
考虑深搜容斥，容斥系数即为$(-1)^{k-1}$，其中k是已搜索的数字数量。

容斥应用

$[1, 10^{10}]$内的好数个数在3000以内。
除去能被其他好数表示的好数，数量级进一步减少。
性质设置：能被某些好数整除，即能被某些好数的LCM整除。
直接枚举集合容斥，复杂度极高。
考虑深搜容斥，容斥系数即为$(-1)^{k-1}$，其中k是已搜索的数字数量。
只要搜索到的数的LCM大过r就剪枝掉，基本可以秒出。

容斥应用

【BZOJ2669】局部极小值

有一个n行m列的整数矩阵（$1 \le n \le 4, 1 \le m \le 7$），其中1到nm之间的每个整数恰好出现一次。

如果一个格子比所有相邻格子（相邻是指有公共边或公共顶点）都小，我们说这个格子是局部极小值。

给出所有局部极小值的位置，你的任务是判断有多少个可能的矩阵（有模数）。

容斥应用

考虑到网格大小不超过28，且同时存在的局部极小值最多只能有8个

容斥应用

考虑到网格大小不超过28，且同时存在的局部极小值最多只能有8个

合法情况很少

容斥应用

考虑到网格大小不超过28，且同时存在的局部极小值最多只能有8个

合法情况很少

考虑计算：指定一些位置$x \in S$一定要是局部最小值时，填满整个网格的方案数有多少。

容斥应用

考虑到网格大小不超过28，且同时存在的局部极小值最多只能有8个

合法情况很少

考虑计算：指定一些位置$x \in S$一定要是局部最小值时，填满整个网格的方案数有多少。

从小到大填数，设当前要填入i这个数。

哪里不能填呢？

容斥应用

考虑到网格大小不超过28，且同时存在的局部极小值最多只能有8个

合法情况很少

考虑计算：指定一些位置$x \in S$一定要是局部最小值时，填满整个网格的方案数有多少。

从小到大填数，设当前要填入i这个数。

哪里不能填呢？

若$x \in S$且x还未填入数字，则x的八相邻是不可填数的。

容斥应用

设$f_{i,j}$表示已经填了$1...i$的数字，且j状态表示的局部极小值位置已经填了数时，方案数是多少

容斥应用

设$f_{i,j}$表示已经填了$1...i$的数字，且j状态表示的局部极小值位置已经填了数时，方案数是多少

预处理g_j表示所有格子除去$S-j$中的局部极小值位置及其八相邻时，剩余多少格子

容斥应用

设$f_{i,j}$表示已经填了$1...i$的数字，且j状态表示的局部极小值位置已经填了数时，方案数是多少

预处理g_j表示所有格子除去$S - j$中的局部极小值位置及其八相邻时，剩余多少格子

从f_{i-1}转移到f_i时，有两种选择：（1）填一个局部极小值位置；或者（2）划水填一个其他位置

容斥应用

设$f_{i,j}$表示已经填了$1 \ldots i$的数字，且j状态表示的局部极小值位置已经填了数时，方案数是多少

预处理g_j表示所有格子除去$S-j$中的局部极小值位置及其八相邻时，剩余多少格子

从f_{i-1}转移到f_i时，有两种选择：（1）填一个局部极小值位置；或者（2）划水填一个其他位置

可列出转移：

$$
\begin{aligned}
f_{i,j} &= \sum_{k \in j} f_{i-1,j-\{k\}} && (1) \\
&+ f_{i-1,j} * (g_j - (i-1)) && (2)
\end{aligned}
$$

容斥应用

对于选定的S，答案为$f_{n*m,S}$

容斥应用

对于选定的S，答案为$f_{n*m,S}$
可是保证了S内的位置一定是局部极小值，却不能保证其他位置一定不是局部极小值

容斥应用

对于选定的S，答案为$f_{n*m,S}$
可是保证了S内的位置一定是局部极小值，却不能保证其他位置一定不是局部极小值
有一些S的方案在S'（$S \in S'$）时也被计算过了

容斥应用

对于选定的S，答案为$f_{n*m,S}$
可是保证了S内的位置一定是局部极小值，却不能保证其他位置一定不是局部极小值
有一些S的方案在S'（$S \in S'$）时也被计算过了
可以枚举$S' \supseteq S$并容斥

容斥应用

对于选定的S，答案为$f_{n*m,S}$
可是保证了S内的位置一定是局部极小值，却不能保证其他位置一定不是局部极小值
有一些S的方案在S'（$S \in S'$）时也被计算过了
可以枚举$S' \supseteq S$并容斥
容斥系数即$(-1)^{|S'|-|S|}$

组合容斥

引例

借一道题引出新章节
【BZOJ3622】已经没有什么好害怕的了

给定两个长度都为n的数列a和b，保证所有数互不相同。
求有多少种两两配对$< a, b >$的方案
使得(a大于b)=(a小于b)+k
$n \leq 2000$

组合容斥

引例

满足(a大于b)对数恰好比(a小于b)的对数多k组
可解出前者对数应恰好为$\frac{n+k}{2}$，记为c

组合容斥

引例

满足(a大于b)对数恰好比(a小于b)的对数多k组
可解出前者对数应恰好为$\frac{n+k}{2}$，记为c
先对两个数组排序。

组合容斥

引例

满足(a大于b)对数恰好比(a小于b)的对数多k组
可解出前者对数应恰好为$\frac{n+k}{2}$，记为c
先对两个数组排序。
考虑DP出至少有c对满足(a大于b)的情况数。

组合容斥

引例

满足(a大于b)对数恰好比(a小于b)的对数多k组
可解出前者对数应恰好为$\frac{n+k}{2}$，记为c
先对两个数组排序。
考虑DP出至少有c对满足(a大于b)的情况数。
设$f_{i,j}$表示，考虑到$a_1 ... a_i$，已经有j个a配对了一个比它小的b时，a的选法种数。

组合容斥

引例

满足(a大于b)对数恰好比(a小于b)的对数多k组

可解出前者对数应恰好为$\frac{n+k}{2}$，记为c

先对两个数组排序。

考虑DP出至少有c对满足(a大于b)的情况数。

设$f_{i,j}$表示，考虑到$a_1...a_i$，已经有j个a配对了一个比它小的b时，a的选法种数。

注意这里不考虑未配对的a选谁

组合容斥
引例

满足(a大于b)对数恰好比(a小于b)的对数多k组
可解出前者对数应恰好为$\frac{n+k}{2}$，记为c
先对两个数组排序。
考虑DP出至少有c对满足(a大于b)的情况数。
设$f_{i,j}$表示，考虑到$a_1...a_i$，已经有j个a配对了一个比它小的b时，a的选法种数。
注意这里不考虑未配对的a选谁
也就是至少有j对满足(a大于b)的情况数为$f_{n,j}*(n-j)!$

组合容斥

引例

满足(a大于b)对数恰好比(a小于b)的对数多k组
可解出前者对数应恰好为$\frac{n+k}{2}$，记为c
先对两个数组排序。
考虑DP出至少有c对满足(a大于b)的情况数。
设$f_{i,j}$表示，考虑到$a_1 ... a_i$，已经有j个a配对了一个比它小的b时，a的选法种数。
注意这里不考虑未配对的a选谁
也就是至少有j对满足(a大于b)的情况数为$f_{n,j} * (n-j)!$
列出转移

$$f_{i,j} = f_{i-1,j} + f_{i-1,j-1} * (right_i - (j-1))$$

其中$right_i$表示一个极大值，使得$a_i > b_{right_i}$

组合容斥

引例

这样一来我们可以得知合法对数至少为c的方案数，至少为$c+1$的方案数....

组合容斥

引例

这样一来我们可以得知合法对数至少为c的方案数，至少为$c+1$的方案数....

考虑容斥

组合容斥

引例

这样一来我们可以得知合法对数至少为c的方案数，至少为$c+1$的方案数....

考虑容斥

设g_j表示合法对数恰好为j的方案数。则答案就是g_c。

倒序计算g_j。

组合容斥
引例

这样一来我们可以得知合法对数至少为c的方案数，至少为$c+1$的方案数....
考虑容斥
设g_j表示合法对数恰好为j的方案数。则答案就是g_c。
倒序计算g_j。
$g_j = f_{n,j} * (n-j)!-$多余情况
多余情况指那些合法对数大于j的情况。

组合容斥

引例

考虑$(k > j)$的g_k在当前的$f_{n,j}$中被算了多少次？

组合容斥

引例

考虑$(k>j)$的g_k在当前的$f_{n,j}$中被算了多少次？
$f_{n,j}$的意义是，选择j个a钦定它们有b匹配，剩下的a随便选

组合容斥

引例

考虑$(k > j)$的g_k在当前的$f_{n,j}$中被算了多少次？

$f_{n,j}$的意义是，选择j个a钦定它们有b匹配，剩下的a随便选

对于g_k代表的每一种选法x，就在每次随便选的过程中，x会出现恰好一次。

组合容斥

引例

考虑$(k > j)$的g_k在当前的$f_{n,j}$中被算了多少次?

$f_{n,j}$的意义是，选择j个a钦定它们有b匹配，剩下的a随便选

对于g_k代表的每一种选法x，就在每次随便选的过程中，x会出现恰好一次。

这种选择总共会发生$\binom{k}{j}$次，因为有$\binom{k}{j}$次钦点全部选中x内的元素

组合容斥

引例

考虑$(k>j)$的g_k在当前的$f_{n,j}$中被算了多少次？

$f_{n,j}$的意义是，选择j个a钦定它们有b匹配，剩下的a随便选

对于g_k代表的每一种选法x，就在每次随便选的过程中，x会出现恰好一次。

这种选择总共会发生$\binom{k}{j}$次，因为有$\binom{k}{j}$次钦点全部选中x内的元素

所以每个$x\in g_k$都被统计了$\binom{k}{j}$次

组合容斥

引例

考虑$(k>j)$的g_k在当前的$f_{n,j}$中被算了多少次？

$f_{n,j}$的意义是，选择j个a钦定它们有b匹配，剩下的a随便选

对于g_k代表的每一种选法x，就在每次随便选的过程中，x会出现恰好一次。

这种选择总共会发生$\binom{k}{j}$次，因为有$\binom{k}{j}$次钦点全部选中x内的元素

所以每个$x\in g_k$都被统计了$\binom{k}{j}$次

$$g_j=f_{n,j}*(n-j)!-\sum_{j<k\le n}\binom{k}{j}g_k$$

组合容斥

问题形式

容斥系数不再是$(-1)^k$形式，而是以组合数形式呈现

组合容斥

问题形式

容斥系数不再是$(-1)^k$形式，而是以组合数形式呈现
涉及到集合枚举的问题

组合容斥

问题形式

容斥系数不再是$(-1)^k$形式，而是以组合数形式呈现
涉及到集合枚举的问题
形式通常是：
对于应恰好仅满足某种性质A的集合计数
为了满足该性质，枚举并选择了k个元素
而剩下一部分随便取
设A是B的子性质，即满足B一定满足A，则这随便取的过程中，可能会涉及到满足B的情况

组合容斥

问题形式

容斥系数不再是$(-1)^k$形式，而是以组合数形式呈现
涉及到集合枚举的问题
形式通常是：
对于应恰好仅满足某种性质A的集合计数
为了满足该性质，枚举并选择了k个元素
而剩下一部分随便取
设A是B的子性质，即满足B一定满足A，则这随便取的过程中，可能会涉及到满足B的情况
考虑某一种情况x，在当前算了几次？每次枚举到x的一些元素时，都会产生1的统计次数（随便取）

组合容斥

问题形式

容斥系数不再是$(-1)^k$形式，而是以组合数形式呈现
涉及到集合枚举的问题
形式通常是：
对于应恰好仅满足某种性质A的集合计数
为了满足该性质，枚举并选择了k个元素
而剩下一部分随便取
设A是B的子性质，即满足B一定满足A，则这随便取的过程中，可能会涉及到满足B的情况
考虑某一种情况x，在当前算了几次？每次枚举到x的一些元素时，都会产生1的统计次数（随便取）
所以形式上是$\binom{x}{k}$

组合容斥
例题

【BZOJ2839】集合计数

给定n个元素（$n \le 1000000$），共有2^n个集合求取若干个集合且满足交集恰好为m（$1 \le m \le n$）的方案数。

组合容斥

例题

1.设$\alpha(k)$表示选定集合交集至少为k的选法方案数，则有

$$\alpha(k)=\binom{n}{k}(2^{2^{n-k}}-1)$$

组合容斥

例题

1.设$\alpha(k)$表示选定集合交集至少为k的选法方案数，则有

$$\alpha(k)=\binom{n}{k}(2^{2^{n-k}}-1)$$

2.设答案为ans，假设我们能够构造一个容斥系数f，满足

$$ans=\sum_{i=0}^{n}f(i)\alpha(i)$$

组合容斥
例题

3.如何构造f呢？

组合容斥

例题

3.如何构造f呢？
从每种情况的统计次数入手

组合容斥
例题

3.如何构造f呢？
从每种情况的统计次数入手
考虑一种交集大小恰好为x的选择方案，它会被统计多少次？

组合容斥
例题

3.如何构造f呢？
从每种情况的统计次数入手
考虑一种交集大小恰好为x的选择方案，它会被统计多少次？

$$T=\sum_{i=0}^{x}f(i)\binom{x}{i}$$

组合容斥
例题

3.如何构造f呢？
从每种情况的统计次数入手
考虑一种交集大小恰好为x的选择方案，它会被统计多少次？

$$T=\sum_{i=0}^{x}f(i)\binom{x}{i}$$

根据我们的最终目的，应该让$T=[x==m]$

组合容斥
例题

3.如何构造f呢？
从每种情况的统计次数入手
考虑一种交集大小恰好为x的选择方案，它会被统计多少次？

$$T=\sum_{i=0}^{x}f(i)\binom{x}{i}$$

根据我们的最终目的，应该让$T=[x==m]$
所以有如下式子

$$[x==m]=\sum_{i=0}^{x}\binom{x}{i}f(i)$$

组合容斥

例题

根据二项式反演，我们可以解得f的表达式：

$$f(x) = \sum_{i=0}^{x} (-1)^{x-i} \binom{x}{i} [i == m]$$

$$f(x) = \left\{ \begin{matrix} 0 & , x < m \\ (-1)^{x-m} \binom{x}{m} & , x \geq m \end{matrix} \right\}$$

组合容斥
例题

因此

$$
\begin{aligned}
ans &= \sum_{i=0}^{n} f(i)\alpha(i) \\
&= \sum_{i=m}^{n} (-1)^{i-m} \binom{i}{m} \binom{n}{i} (2^{2^{n-i}} - 1)
\end{aligned}
$$

组合容斥

例题

因此

$$
\begin{aligned}
ans &= \sum_{i=0}^{n} f(i)\alpha(i) \\
&= \sum_{i=m}^{n} (-1)^{i-m} \binom{i}{m} \binom{n}{i} (2^{2^{n-i}} - 1)
\end{aligned}
$$

预处理，可在$O(n)$出解

组合容斥
例题

前夕–By YPL

给定n个元素（$n \le 10^7$），共有2^n个集合求取若干个集合且满足交集大小恰好为4的倍数的方案数（模998244353）

组合容斥

例题

1.照样设$\alpha(k)$表示选定集合交集至少为k的选法方案数，则有

$$\alpha(k) = \binom{n}{k}(2^{2^{n-k}} - 1)$$

组合容斥

例题

1.照样设$\alpha(k)$表示选定集合交集至少为k的选法方案数，则有

$$\alpha(k)=\binom{n}{k}(2^{2^{n-k}}-1)$$

2.设答案为ans，假设我们能够构造一个容斥系数f，满足

$$ans=\sum_{i=0}^{n}f(i)\alpha(i)$$

组合容斥
例题

3.如何构造f呢？

组合容斥
例题

3.如何构造f呢？
还是从每种情况的统计次数入手

组合容斥
例题

3.如何构造f呢？
还是从每种情况的统计次数入手
考虑一种交集大小恰好为x的选择方案，它会被统计多少次？

组合容斥
例题

3.如何构造f呢？
还是从每种情况的统计次数入手
考虑一种交集大小恰好为x的选择方案，它会被统计多少次？

$$T=\sum_{k=0}^{x}f(k)\binom{x}{k}$$

组合容斥
例题

3.如何构造f呢？
还是从每种情况的统计次数入手
考虑一种交集大小恰好为x的选择方案，它会被统计多少次？

$$T=\sum_{k=0}^{x}f(k)\binom{x}{k}$$

根据我们的最终目的，应该让$T=[x\equiv 0\pmod 4]$
所以有如下式子

$$[x\equiv 0\pmod 4]=\sum_{k=0}^{x}\binom{x}{k}f(k)$$

组合容斥
例题

根据二项式反演，我们可以解得f的表达式：

$$f(x)=\sum_{k=0}^{x}(-1)^{x-k}\binom{x}{k}[k\equiv 0 \pmod 4]$$

组合容斥
例题

根据二项式反演，我们可以解得f的表达式：

$$f(x)=\sum_{k=0}^{x}(-1)^{x-k}\binom{x}{k}[k\equiv 0 \pmod 4]$$

记ω_m为主m次单位根，根据求和引理，有

$$[n\equiv 0 \pmod m]=\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}(\omega_m^n)^i$$

组合容斥
例题

根据二项式反演，我们可以解得f的表达式：

$$f(x)=\sum_{k=0}^{x}(-1)^{x-k}\binom{x}{k}[k\equiv 0 \pmod 4]$$

记ω_m为主m次单位根，根据求和引理，有

$$[n\equiv 0 \pmod m]=\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}(\omega_m^n)^i$$

令$m=4$，则这个式子可以替换掉原式的那部分

组合容斥

例题

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{x}(-1)^{x-k}\binom{x}{k}[k \equiv 0 \pmod 4] \\
&= \sum_{k=0}^{x}(-1)^{x-k}\binom{x}{k}\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}(\omega_m^k)^i
\end{aligned}
$$

组合容斥

例题

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{x} (-1)^{x-k} \binom{x}{k} [k \equiv 0 \pmod 4] \\
&= \sum_{k=0}^{x} (-1)^{x-k} \binom{x}{k} \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} (\omega_m^k)^i \\
&= \sum_{k=0}^{x} (-1)^{x+k} \binom{x}{k} \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} (\omega_m^k)^i
\end{aligned}
$$

组合容斥

例题

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{x}(-1)^{x-k}\binom{x}{k}[k \equiv 0 \pmod 4] \\
&= \sum_{k=0}^{x}(-1)^{x-k}\binom{x}{k}\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}(\omega_m^k)^i \\
&= \sum_{k=0}^{x}(-1)^{x+k}\binom{x}{k}\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}(\omega_m^k)^i \\
&= \frac{(-1)^x}{m}\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{x}(-1)^k\binom{x}{k}(\omega_m^i)^k
\end{aligned}$$

组合容斥
例题

$$f(x)=\frac{(-1)^x}{m}\sum_{i=0}^{m-1}(1-\omega_m^i)^x$$

组合容斥
例题

$$f(x)=\frac{(-1)^x}{m}\sum_{i=0}^{m-1}(1-\omega_m^i)^x$$

可于$\mathcal{O}(n)$内计算完成。

组合容斥
例题

$$f(x)=\frac{(-1)^x}{m}\sum_{i=0}^{m-1}(1-\omega_m^i)^x$$

可于$\mathcal{O}(n)$内计算完成。
一个集合都不选（空集都不选）也是一种方案，输出答案要额外$+1$

容斥系数的构造方法

总结

容斥系数的构造方法

总结

- 构造一个函数$\alpha(k)$表示选择集合至少满足k个性质的方案数

容斥系数的构造方法

总结

- 构造一个函数$\alpha(k)$表示选择集合至少满足k个性质的方案数
- 构造容斥系数$f(k)$，列出答案表达式

容斥系数的构造方法

总结

- 构造一个函数$\alpha(k)$表示选择集合至少满足k个性质的方案数
- 构造容斥系数$f(k)$，列出答案表达式
- 分析对于每一种具体选法，它被统计的次数

容斥系数的构造方法

总结

- 构造一个函数$\alpha(k)$表示选择集合至少满足k个性质的方案数
- 构造容斥系数$f(k)$，列出答案表达式
- 分析对于每一种具体选法，它被统计的次数
- 再考虑每一种具体选法应该被统计多少次，联立解出容斥系数$f(k)$

$min-max$容斥

概念

$min-max$容斥，又称最值反演

给定集合S，$max(S)$表示S中最大值，$min(S)$表示S中最小值

则有

$$\max(S)=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-1}\min(T)$$

$$\min(S)=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-1}\max(T)$$

$min - max$容斥

证明$\max(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \min(T)$

对S中的元素从大到小排序

$min - max$容斥

证明$\max(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \min(T)$

对S中的元素从大到小排序
考虑第$x+1$大的元素，会被计算多少次?（即作为$\min(T)$呈现）

$min - max$容斥

证明$\max(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \min(T)$

对S中的元素从大到小排序
考虑第$x+1$大的元素，会被计算多少次？（即作为$\min(T)$呈现）

$$\sum_{k=0}^{x} \binom{x}{k} = 2^x$$

$min - max$容斥

证明$\max(S) = \sum_{T \subseteq S}(-1)^{|T|-1}\min(T)$

对S中的元素从大到小排序
考虑第$x+1$大的元素，会被计算多少次？（即作为$\min(T)$呈现）

$$\sum_{k=0}^{x}\binom{x}{k} = 2^x$$

我们希望当且仅当$x+1 == 1$时，该次数为1；其他情况都为0

$min - max$容斥

证明$\max(S) = \sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-1}\min(T)$

对S中的元素从大到小排序
考虑第$x+1$大的元素，会被计算多少次？（即作为$\min(T)$呈现）

$$\sum_{k=0}^{x}\binom{x}{k} = 2^x$$

我们希望当且仅当$x+1 == 1$时，该次数为1；其他情况都为0
$x+1 == 1$即$x == 0$时，很特殊，选法是奇数；而其他情况选法是偶数

$min - max$容斥

证明$\max(S) = \sum_{T \subseteq S}(-1)^{|T|-1} \min(T)$

对S中的元素从大到小排序
考虑第$x+1$大的元素，会被计算多少次？（即作为$\min(T)$呈现）

$$\sum_{k=0}^{x} \binom{x}{k} = 2^x$$

我们希望当且仅当$x+1 == 1$时，该次数为1；其他情况都为0
$x+1 == 1$即$x == 0$时，很特殊，选法是奇数；而其他情况选法是偶数
考虑$x! = 0$时，用什么方法正负抵消

$min - max$容斥

证明$\max(S) = \sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-1}\min(T)$

$min - max$容斥

证明$\max(S) = \sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-1}\min(T)$

设全集为$U = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$（$n > 0$）
则全集的所有子集恰好一半是奇数大小，一半是偶数大小

$min - max$容斥

证明$\max(S) = \sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-1}\min(T)$

设全集为$U = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$（$n > 0$）
则全集的所有子集恰好一半是奇数大小，一半是偶数大小
n为奇数和n为偶数的情况分别如下：

$$\begin{cases} \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + ... + \binom{n}{n} \\ \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + ... + \binom{n}{n-1} \end{cases}$$

$min - max$容斥

证明$\max(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \min(T)$

设全集为$U = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$（$n > 0$）
则全集的所有子集恰好一半是奇数大小，一半是偶数大小
n为奇数和n为偶数的情况分别如下：

$$\begin{cases} \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + ... + \binom{n}{n} \\ \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + ... + \binom{n}{n-1} \end{cases}$$

因此在x（$x > 0$）大小的全集中取子集T时，只要加上$(-1)^{|T|}$的系数，就可以正负抵消掉，总贡献次数恰好为0

$min-max$容斥

证明$\max(S)=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-1}\min(T)$

设全集为$U=\{a_1,a_2,...,a_n\}$（$n>0$）
则全集的所有子集恰好一半是奇数大小，一半是偶数大小
n为奇数和n为偶数的情况分别如下：

$$\left\{\begin{array}{l}\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+...+\binom{n}{n-1}=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+...+\binom{n}{n}\\ \binom{n}{0}+\binom{n}{2}+...+\binom{n}{n}=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+...+\binom{n}{n-1}\end{array}\right\}$$

因此在x（$x>0$）大小的全集中取子集T时，只要加上$(-1)^{|T|}$的系数，就可以正负抵消掉，总贡献次数恰好为0
而$x==0$时最特殊，只能取空集，贡献次数为$(-1)^0=1$

$min - max$容斥

构造$\max(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \min(T)$

正向考虑如何用子集的最小值表达全集的最大值

$min - max$容斥

构造$\max(S) = \sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-1}\min(T)$

正向考虑如何用子集的最小值表达全集的最大值
考虑构造容斥系数$f(x)$使得

$$\max(S) = \sum_{T\subseteq S} f(|T|)\min(T)$$

$min - max$容斥

构造$\max(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \min(T)$

正向考虑如何用子集的最小值表达全集的最大值
考虑构造容斥系数$f(x)$使得

$$\max(S) = \sum_{T \subseteq S} f(|T|) \min(T)$$

一个第$x+1$大的元素被计算了多少次？

$$\sum_{k=0}^{x} \binom{x}{k} f(k+1)$$

$min - max$容斥

构造$\max(S) = \sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-1}\min(T)$

$$[x == 0] = \sum_{k=0}^{x}\binom{x}{k}f(k+1)$$

$min - max$容斥

构造$\max(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \min(T)$

$$[x == 0] = \sum_{k=0}^{x} \binom{x}{k} f(k+1)$$

$$f(x+1) = \sum_{k=0}^{x} (-1)^{x-k} \binom{x}{k} [k == 0]$$

$min - max$容斥

构造$\max(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \min(T)$

$$[x == 0] = \sum_{k=0}^{x} \binom{x}{k} f(k+1)$$

$$f(x+1) = \sum_{k=0}^{x} (-1)^{x-k} \binom{x}{k} [k == 0]$$

$$f(x+1) = (-1)^x$$

$$f(x) = (-1)^{x-1}$$

min — *max*容斥

构造$\max(S)=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-1}\min(T)$

$$[x==0]=\sum_{k=0}^{x}\binom{x}{k}f(k+1)$$

$$f(x+1)=\sum_{k=0}^{x}(-1)^{x-k}\binom{x}{k}[k==0]$$

$$f(x+1)=(-1)^x$$

$$f(x)=(-1)^{x-1}$$

因此有

$$\max(S)=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-1}\min(|T|)$$

$min-max$容斥

应用

主要解决集合概率问题

$min - max$容斥
应用

主要解决集合概率问题

例题：【HDU4336】
有n种卡牌，每一时刻你有p_i的概率得到其中一种（$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$）
求每种卡牌得到至少1张的期望时间。

$min - max$容斥
应用

记$\max(S)$表示集合S中最后拿到的卡的所需时间
$\min(S)$表示抽到集合S中第一张拿到的卡的期望时间。

$min - max$容斥

应用

记$\max(S)$表示集合S中最后拿到的卡的所需时间
$\min(S)$表示抽到集合S中第一张拿到的卡的期望时间。

$$E[\max(S)] = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} E[\min(T)]$$

$min - max$容斥
应用

记$\max(S)$表示集合S中最后拿到的卡的所需时间
$\min(S)$表示抽到集合S中第一张拿到的卡的期望时间。

$$E[\max(S)] = \sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|-1}E[\min(T)]$$

$$E[\min(S)] = \frac{1}{\sum_{x\in S} p_x}$$

$min - max$容斥
应用

记$\max(S)$表示集合S中最后拿到的卡的所需时间
$\min(S)$表示抽到集合S中第一张拿到的卡的期望时间。

$$E[\max(S)] = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} E[\min(T)]$$

$$E[\min(S)] = \frac{1}{\sum_{x \in S} p_x}$$

$\mathcal{O}(2^n)$出解

$min - max$容斥

应用

本质：使用经典容斥计算：

$min-max$容斥
应用

本质：使用经典容斥计算：
设$f(S)$表示取到S中任一元素的期望步数

$$f(S)=\frac{1}{\sum_{i\in S}p_i}$$

$min - max$容斥

应用

本质：使用经典容斥计算：
设$f(S)$表示取到S中任一元素的期望步数

$$f(S) = \frac{1}{\sum_{i \in S} p_i}$$

如只有三个元素a, b, c那么

$$Ans = f(a) + f(b) + f(c) - f(a, b) - f(a, c) - f(b, c) + f(a, b, c)$$

$min - max$容斥
应用

【BZOJ4036】按位或

刚开始你有一个数字0，每一秒钟你会随机选择一个$[0, 2^n)$（$n \leq 20$）的数字，与你手上的数字进行或操作。
选择数字i的概率是p_i。保证$0 \leq p[i] \leq 1, \sum p_i = 1$
问期望多少秒后，你手上的数字变成$2^n - 1$

$min - max$容斥

应用

记$\max(S)$表示集合S中最后被或到的期望时间
$\min(S)$表示或到集合S中第一个元素的期望时间

$min - max$容斥
应用

记$\max(S)$表示集合S中最后被或到的期望时间
$\min(S)$表示或到集合S中第一个元素的期望时间

$$E[\max(S)] = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} E[\min(T)]$$

$min - max$容斥
应用

记$\max(S)$表示集合S中最后被或到的期望时间
$\min(S)$表示或到集合S中第一个元素的期望时间

$$E[\max(S)] = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} E[\min(T)]$$

$$E[\min(S)] = \frac{1}{\sum_{T \cap S \neq \emptyset} p_T}$$

$min - max$容斥

应用

记$\max(S)$表示集合S中最后被或到的期望时间
$\min(S)$表示或到集合S中第一个元素的期望时间

$$E[\max(S)] = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} E[\min(T)]$$

$$E[\min(S)] = \frac{1}{\sum_{T \cap S \neq \emptyset} p_T}$$

快速莫比乌斯变换预处理后面的分式，直接求解

$min - max$容斥
推广

集合第k大怎么表示？

$$\mathrm{kthmax}(S) = \sum_{T \subseteq S} f(|T|) \min(T)$$

$min - max$容斥
推广

集合第k大怎么表示？

$$\mathrm{kthmax}(S) = \sum_{T \subseteq S} f(|T|)\min(T)$$

一个第$x+1$大的元素被计算了多少次？

$$\sum_{k=0}^{x} \binom{x}{k} f(k+1)$$

$min-max$容斥

推广

$$[x == k-1] = \sum_{j=0}^{x} \binom{x}{j} f(j+1)$$

$min - max$容斥

推广

$$[x == k - 1] = \sum_{j=0}^{x} \binom{x}{j} f(j + 1)$$

$$f(x + 1) = \sum_{j=0}^{x} (-1)^{x-j} \binom{x}{j} [j == k - 1]$$

$min - max$容斥

推广

$$[x == k-1] = \sum_{j=0}^{x} \binom{x}{j} f(j+1)$$

$$f(x+1) = \sum_{j=0}^{x} (-1)^{x-j} \binom{x}{j} [j == k-1]$$

$$f(x+1) = (-1)^{x-(k-1)} \binom{x}{k-1}$$

$$f(x) = (-1)^{x-k} \binom{x-1}{k-1}$$

$min - max$容斥

推广

因此有

$$\mathrm{kthmax}(S) = \sum_{T \subseteq S} \min(T)(-1)^{|T|-k} \binom{|T|-1}{k-1}$$

$min - max$容斥

推广

因此有

$$\text{kthmax}(S) = \sum_{T \subseteq S} \min(T)(-1)^{|T|-k} \binom{|T|-1}{k-1}$$

kthmax容斥依然适用于期望形式

$min - max$容斥

应用

重返现世——-YPL原创

有n种元素，每一时刻你有$\frac{p_i}{m}$的概率得到其中一种
$(\sum_{i=1}^{n} p_i = m)$
求得到k种元素的期望时间（对998244353取模）

$n \le 1000, \;\; k \in [n-10, n]$

$min - max$容斥

应用

根据

$$\mathrm{kthmax}(S) = \sum_{T \subseteq S} \min(T)(-1)^{|T|-k} \binom{|T|-1}{k-1}$$

有

$$E[\mathrm{kthmax}(S)] = \sum_{T \subseteq S} E[\min(T)](-1)^{|T|-k} \binom{|T|-1}{k-1}$$

(这里的k其实是$n-k+1$，输入是第k小，而我们要做的是求第$n-k+1$大)

$min - max$容斥

应用

$$E[\text{kthmax}(S)] = \sum_{T \subseteq S} \frac{m}{\sum_{i \in T} p_i} (-1)^{|T|-k} \binom{|T|-1}{k-1}$$

$min-max$容斥

应用

$$E[\text{kthmax}(S)]=\sum_{T\subseteq S}\frac{m}{\sum_{i\in T}p_i}(-1)^{|T|-k}\binom{|T|-1}{k-1}$$

DP解决
设$f_{i,j,k}$表示:
考虑前i个数作为S时
对于那些满足$(\sum_{i\in T}p_i)=j$的S的子集T
参量为k时，$\sum_T(-1)^{|T|-k}\binom{|T|-1}{k-1}$的值是多少

$min-max$容斥

应用

$f_{i,j,k}$从哪里转移？考虑i这个元素是否纳入T：

$min - max$容斥
应用

$f_{i,j,k}$从哪里转移？考虑i这个元素是否纳入T：
不纳入：$f_{i,j,k} += f_{i-1,j,k}$

$min-max$容斥

应用

$f_{i,j,k}$从哪里转移？考虑i这个元素是否纳入T：

不纳入：$f_{i,j,k}+=f_{i-1,j,k}$

纳入：

$min-max$容斥

应用

$$f_{i,j,k}+=$$

$$\sum_{T}(-1)^{|T|-k}\binom{|T|-1}{k-1}$$

$min - max$容斥

应用

$$f_{i,j,k}+=$$

$$\sum_T (-1)^{|T|-k} \binom{|T|-1}{k-1}$$

$$=\sum_T (-1)^{|T|-k} (\binom{(|T|-1)-1}{k-2} + \binom{(|T|-1)-1}{k-1})$$

$min - max$容斥

应用

$$
\begin{aligned}
& f_{i,j,k}+ = \\
& \sum_T (-1)^{|T|-k} \binom{|T|-1}{k-1} \\
= & \sum_T (-1)^{|T|-k} \left(\binom{(|T|-1)-1}{k-2} + \binom{(|T|-1)-1}{k-1} \right) \\
= & \sum_T (-1)^{(|T|-1)-(k-1)} \binom{(|T|-1)-1}{(k-1)-1} + \sum_T (-1)^{(|T|-1)-(k-1)} \binom{(|T|-1)-1}{k-1}
\end{aligned}
$$

$min-max$容斥

应用

$$
\begin{aligned}
& f_{i,j,k} + = \\
& \sum_T (-1)^{|T|-k} \binom{|T|-1}{k-1} \\
= & \sum_T (-1)^{|T|-k} \left(\binom{(|T|-1)-1}{k-2} + \binom{(|T|-1)-1}{k-1} \right) \\
= & \sum_T (-1)^{(|T|-1)-(k-1)} \binom{(|T|-1)-1}{(k-1)-1} + \sum_T (-1)^{(|T|-1)-(k-1)} \binom{(|T|-1)-1}{k-1} \\
= & \sum_T (-1)^{(|T|-1)-(k-1)} \binom{(|T|-1)-1}{(k-1)-1} - \sum_T (-1)^{(|T|-1)-k} \binom{(|T|-1)-1}{k-1}
\end{aligned}
$$

$min - max$容斥

应用

$$
\begin{aligned}
&f_{i,j,k}+= \\
&\sum_T(-1)^{|T|-k}\binom{|T|-1}{k-1} \\
=&\sum_T(-1)^{|T|-k}(\binom{(|T|-1)-1}{k-2}+\binom{(|T|-1)-1}{k-1}) \\
=&\sum_T(-1)^{(|T|-1)-(k-1)}\binom{(|T|-1)-1}{(k-1)-1}+\sum_T(-1)^{(|T|-1)-(k-1)}\binom{(|T|-1)-1}{k-1} \\
=&\sum_T(-1)^{(|T|-1)-(k-1)}\binom{(|T|-1)-1}{(k-1)-1}-\sum_T(-1)^{(|T|-1)-k}\binom{(|T|-1)-1}{k-1} \\
=&f_{i-1,j-p_i,k-1}-f_{i-1,j-p_i,k}
\end{aligned}
$$

容斥原理

Thanks For Listening!

RogerDTZ

2018 年 8 月 2 日