

# 容斥原理及其应用

RogerDTZ

2018 年 8 月 2 日

# 基本概念

其实是我瞎定义的

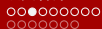
- ▶ 元素：需要考虑与统计的单个个体
- ▶ 性质：人为定义的条件
- ▶ 性质集合：具备某一些性质的元素所构成的集合

## 经典集合容斥

现在有三种性质 $a, b, c$ .

已知分别满足每一种性质的元素个数、分别满足每两种性质的元素个数、满足全部性质的元素个数.

求总共有多少个元素?



## 经典集合容斥

记满足性质 $a$ 的元素的集合为 $A$ .同理得到 $B$ 和 $C$ 。

## 经典集合容斥

记满足性质 $a$ 的元素的集合为 $A$ .同理得到 $B$ 和 $C$ 。

则上述问题可以用数学方式表达为

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

# 经典集合容斥

## 通用表达

$$\begin{aligned}
 & |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m| \\
 = & \sum_{1 \leq i_1 \leq m} |A_{i_1}| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq m} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| \\
 & - \dots + (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m|
 \end{aligned}$$

# 经典集合容斥

## 通用表达

$$\begin{aligned}
 & |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m| \\
 = & \sum_{1 \leq i_1 \leq m} |A_{i_1}| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq m} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| \\
 & - \dots + (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m|
 \end{aligned}$$

$$\left| \bigcup_{i=1}^m A_i \right| = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m} \left| \bigcap_{j=1}^k A_{i_j} \right|$$

# 经典集合容斥

## 通用表达

$$\begin{aligned}
 & |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m| \\
 = & \sum_{1 \leq i_1 \leq m} |A_{i_1}| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq m} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| \\
 & - \dots + (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m|
 \end{aligned}$$

$$\left| \bigcup_{i=1}^m A_i \right| = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m} \left| \bigcap_{j=1}^k A_{i_j} \right|$$

其中 $(-1)^{k-1}$ 称为此问题中的容斥系数。



# 经典集合容斥

## 通用表达2

另一种表达形式:

枚举集族 $B$ ,其容斥系数与 $B$ 的大小有关, 则有

$$\left| \bigcup_{i=1}^m A_i \right| = \sum_B (-1)^{|B|-1} \left| \bigcap_{A_j \in B} A_j \right|$$



# 经典集合容斥

关于容斥系数是否合法的证明



# 经典集合容斥

关于容斥系数是否合法的证明

考虑每个元素 $a$ ,它应被统计恰好一次

# 经典集合容斥

关于容斥系数是否合法的证明

考虑每个元素 $a$ ,它应被统计恰好一次  
实际统计次数?

# 经典集合容斥

## 关于容斥系数是否合法的证明

记包含 $a$ 的集合有 $k$ 个，分别为 $A_1, A_2, \dots, A_k$   
 集族 $C = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$

## 经典集合容斥

关于容斥系数是否合法的证明

记包含 $a$ 的集合有 $k$ 个，分别为 $A_1, A_2, \dots, A_k$   
集族 $C = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$

$$\left| \bigcup_{i=1}^m A_i \right| = \sum_B (-1)^{|B|-1} \left| \bigcap_{A_j \in B} A_j \right|$$

# 经典集合容斥

## 关于容斥系数是否合法的证明

记包含 $a$ 的集合有 $k$ 个，分别为 $A_1, A_2, \dots, A_k$   
集族 $C = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$

$$\left| \bigcup_{i=1}^m A_i \right| = \sum_B (-1)^{|B|-1} \left| \bigcap_{A_j \in B} A_j \right|$$

当且仅当枚举的集族 $B \subseteq C$ 时， $a$ 才有1或-1的贡献。

- ▶  $|B| = 1$ 时，共有 $\binom{k}{1}$ 次枚举到有效 $B$ ，贡献为正。
- ▶  $|B| = 2$ 时，共有 $\binom{k}{2}$ 次枚举到有效 $B$ ，贡献为负。
- ▶ .....
- ▶  $|B| = k$ 时，共有 $\binom{k}{k}$ 次枚举到有效 $B$ ，贡献为 $(-1)^{k-1}$

# 经典集合容斥

关于容斥系数是否合法的证明

元素 $a$ 的总统计次数 $sum$ ?

$$sum = \binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \dots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k}$$



# 经典集合容斥

关于容斥系数是否合法的证明

元素 $a$ 的总统计次数 $sum$ ?

$$sum = \binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \dots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k}$$

$$= 1$$

# 经典集合容斥

关于容斥系数是否合法的证明

元素 $a$ 的总统计次数 $sum$ ?

$$\begin{aligned}
 sum &= \binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \dots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

因此每个元素恰好被统计到了一次

# 经典集合容斥

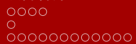
关于容斥系数是否合法的证明

元素 $a$ 的总统计次数 $sum$ ?

$$sum = \binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \dots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k}$$

$$= 1$$

因此每个元素恰好被统计到了一次  
即所有集合的并集大小等于元素个数之和



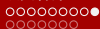
# 容斥问题的特征

- ▶ 一般是求元素总数



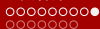
# 容斥问题的特征

- ▶ 一般是求元素总数
- ▶ 统计的元素具有若干性质



## 容斥问题的特征

- ▶ 一般是求元素总数
- ▶ 统计的元素具有若干性质
- ▶ 具有某一些性质的元素数量比较方便统计



## 容斥问题的特征

- ▶ 一般是求元素总数
- ▶ 统计的元素具有若干性质
- ▶ 具有某一些性质的元素数量比较方便统计

性质可以是什么？

## 容斥问题的特征

- ▶ 一般是求元素总数
- ▶ 统计的元素具有若干性质
- ▶ 具有某一些性质的元素数量比较方便统计

性质可以是什么？

- ▶ 一种特征
- ▶ 诸如大于、小于的条件



## 容斥问题的特征

- ▶ 一般是求元素总数
- ▶ 统计的元素具有若干性质
- ▶ 具有某一些性质的元素数量比较方便统计

性质可以是什么？

- ▶ 一种特征
- ▶ 诸如大于、小于的条件
- ▶ ...

## 容斥应用

来看一道例题：【BZOJ3589】动态树

给定一棵有根树 ( $n \leq 200,000$ )，每个点有初始为0的权值  
要求支持两种操作（操作数  $q \leq 200,000$ ）：

- ▶ 某一子树内的点点权加上  $x$
- ▶ 查询  $k$  条树链的并 ( $k \leq 5$ )

## 容斥应用

来看一道例题：【BZOJ3589】动态树

给定一棵有根树 ( $n \leq 200,000$ )，每个点有初始为0的权值  
要求支持两种操作（操作数  $q \leq 200,000$ ）：

- ▶ 某一子树内的点点权加上  $x$
- ▶ 查询  $k$  条树链的并 ( $k \leq 5$ )

子树加用树状数组实现

## 容斥应用

来看一道例题：【BZOJ3589】动态树

给定一棵有根树 ( $n \leq 200,000$ )，每个点有初始为0的权值  
要求支持两种操作（操作数  $q \leq 200,000$ ）：

- ▶ 某一子树内的点点权加上  $x$
- ▶ 查询  $k$  条树链的并 ( $k \leq 5$ )

子树加用树状数组实现

每条树链看做一个性质集合，属于这条树链的点即属于该集合  
题目要求所有集合的并

直接枚举每条、两两交、三三交.....容斥即可

LCA最好用  $O(1)$  查询的RMQ解决

# 容斥应用

## 【BZOJ1853】幸运数字

给定  $l, r$  ( $1 \leq l < r \leq 10^{10}$ ), 求  $[l, r]$  内有多少能好数整除的数?  
一个数被称作好数, 当且仅当其由6或8组成。



## 容斥应用

$[1, 10^{10}]$ 内的好数个数在3000以内。

## 容斥应用

$[1, 10^{10}]$ 内的好数个数在3000以内。

除去能被其他好数表示的好数，数量级进一步减少。

## 容斥应用

$[1, 10^{10}]$ 内的好数个数在3000以内。

除去能被其他好数表示的好数，数量级进一步减少。

性质设置：能被某些好数整除，即能被某些好数的LCM整除。



## 容斥应用

$[1, 10^{10}]$ 内的好数个数在3000以内。

除去能被其他好数表示的好数，数量级进一步减少。

性质设置：能被某些好数整除，即能被某些好数的LCM整除。

直接枚举集合容斥，复杂度极高。

## 容斥应用

$[1, 10^{10}]$ 内的好数个数在3000以内。

除去能被其他好数表示的好数，数量级进一步减少。

性质设置：能被某些好数整除，即能被某些好数的LCM整除。

直接枚举集合容斥，复杂度极高。

考虑深搜容斥，容斥系数即为 $(-1)^{k-1}$ ，其中 $k$ 是已搜索的数字数量。

## 容斥应用

$[1, 10^{10}]$ 内的好数个数在3000以内。

除去能被其他好数表示的好数，数量级进一步减少。

性质设置：能被某些好数整除，即能被某些好数的LCM整除。

直接枚举集合容斥，复杂度极高。

考虑深搜容斥，容斥系数即为 $(-1)^{k-1}$ ，其中 $k$ 是已搜索的数字数量。

只要搜索到的数的LCM大过 $r$ 就剪枝掉，基本可以秒出。

# 容斥应用

## 【BZOJ2669】局部极小值

有一个 $n$ 行 $m$ 列的整数矩阵 ( $1 \leq n \leq 4, 1 \leq m \leq 7$ )，其中1到 $nm$ 之间的每个整数恰好出现一次。

如果一个格子比所有相邻格子（相邻是指有公共边或公共顶点）都小，我们说这个格子是局部极小值。

给出所有局部极小值的位置，你的任务是判断有多少个可能的矩阵（有模数）。



## 容斥应用

考虑到网格大小不超过28，且同时存在的局部极小值最多只能有8个



## 容斥应用

考虑到网格大小不超过28，且同时存在的局部极小值最多只能有8个  
合法情况很少

## 容斥应用

考虑到网格大小不超过28，且同时存在的局部极小值最多只能有8个

合法情况很少

考虑计算：指定一些位置 $x \in S$ 一定要是局部最小值时，填满整个网格的方案数有多少。

## 容斥应用

考虑到网格大小不超过28，且同时存在的局部极小值最多只能有8个

合法情况很少

考虑计算：指定一些位置 $x \in S$ 一定要是局部最小值时，填满整个网格的方案数有多少。

从小到大填数，设当前要填入 $i$ 这个数。

哪里不能填呢？



## 容斥应用

考虑到网格大小不超过28，且同时存在的局部极小值最多只能有8个

合法情况很少

考虑计算：指定一些位置  $x \in S$  一定要是局部最小值时，填满整个网格的方案数有多少。

从小到大填数，设当前要填入  $i$  这个数。

哪里不能填呢？

若  $x \in S$  且  $x$  还未填入数字，则  $x$  的八相邻是不可填数的。



## 容斥应用

设 $f_{i,j}$ 表示已经填了 $1\dots i$ 的数字，且 $j$ 状态表示的局部极小值位置已经填了数时，方案数是多少

## 容斥应用

设 $f_{i,j}$ 表示已经填了 $1\dots i$ 的数字，且 $j$ 状态表示的局部极小值位置已经填了数时，方案数是多少

预处理 $g_j$ 表示所有格子除去 $S - j$ 中的局部极小值位置及其八相邻时，剩余多少格子

## 容斥应用

设 $f_{i,j}$ 表示已经填了 $1\dots i$ 的数字，且 $j$ 状态表示的局部极小值位置已经填了数时，方案数是多少

预处理 $g_j$ 表示所有格子除去 $S - j$ 中的局部极小值位置及其八相邻时，剩余多少格子

从 $f_{i-1}$ 转移到 $f_i$ 时，有两种选择：（1）填一个局部极小值位置；或者（2）划水填一个其他位置

## 容斥应用

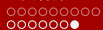
设 $f_{i,j}$ 表示已经填了 $1\dots i$ 的数字，且 $j$ 状态表示的局部极小值位置已经填了数时，方案数是多少

预处理 $g_j$ 表示所有格子除去 $S - j$ 中的局部极小值位置及其八相邻时，剩余多少格子

从 $f_{i-1}$ 转移到 $f_i$ 时，有两种选择：（1）填一个局部极小值位置；或者（2）划水填一个其他位置  
可列出转移：

$$f_{i,j} = \sum_{k \in j} f_{i-1,j-\{k\}} \quad (1)$$

$$+ f_{i-1,j} * (g_j - (i - 1)) \quad (2)$$



## 容斥应用

对于选定的 $S$ ，答案为 $f_{n*m,S}$

## 容斥应用

对于选定的 $S$ ，答案为 $f_{n*m,S}$

可是保证了 $S$ 内的位置一定是局部极小值，却不能保证其他位置一定不是局部极小值

## 容斥应用

对于选定的 $S$ ，答案为 $f_{n*m,S}$

可是保证了 $S$ 内的位置一定是局部极小值，却不能保证其他位置一定不是局部极小值

有一些 $S$ 的方案在 $S'$  ( $S \in S'$ ) 时也被计算过了



## 容斥应用

对于选定的 $S$ ，答案为 $f_{n*m,S}$

可是保证了 $S$ 内的位置一定是局部极小值，却不能保证其他位置一定不是局部极小值

有一些 $S$ 的方案在 $S'$  ( $S \in S'$ ) 时也被计算过了

可以枚举 $S' \supseteq S$ 并容斥

## 容斥应用

对于选定的 $S$ ，答案为 $f_{n*m,S}$

可是保证了 $S$ 内的位置一定是局部极小值，却不能保证其他位置一定不是局部极小值

有一些 $S$ 的方案在 $S'$  ( $S \in S'$ ) 时也被计算过了

可以枚举 $S' \supseteq S$ 并容斥

容斥系数即 $(-1)^{|S'| - |S|}$

# 组合容斥

## 引例

借一道题引出新章节

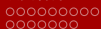
【BZOJ3622】已经没有什么好害怕的了

给定两个长度都为 $n$ 的数列 $a$ 和 $b$ ，保证所有数互不相同。

求有多少种两两配对 $\langle a, b \rangle$ 的方案

使得 $(a \text{ 大于 } b) = (a \text{ 小于 } b) + k$

$n \leq 2000$



引入

# 组合容斥

引例

满足(a大于b)对数恰好比(a小于b)的对数多k组  
 可解出前者对数应恰好为 $\frac{n+k}{2}$ ，记为c

# 组合容斥

## 引例

满足(a大于b)对数恰好比(a小于b)的对数多k组  
可解出前者对数应恰好为 $\frac{n+k}{2}$ ，记为c  
先对两个数组排序。

# 组合容斥

## 引例

满足( $a$ 大于 $b$ )对数恰好比( $a$ 小于 $b$ )的对数多 $k$ 组  
 可解出前者对数应恰好为 $\frac{n+k}{2}$ ，记为 $c$   
 先对两个数组排序。  
 考虑DP出至少有 $c$ 对满足( $a$ 大于 $b$ )的情况数。

## 组合容斥

### 引例

满足(a大于b)对数恰好比(a小于b)的对数多k组

可解出前者对数应恰好为 $\frac{n+k}{2}$ ，记为c

先对两个数组排序。

考虑DP出至少有c对满足(a大于b)的情况数。

设 $f_{i,j}$ 表示，考虑到 $a_1 \dots a_i$ ，已经有j个a配对了一个比它小的b时，a的选法种数。

## 组合容斥

### 引例

满足(a大于b)对数恰好比(a小于b)的对数多k组

可解出前者对数应恰好为 $\frac{n+k}{2}$ ，记为c

先对两个数组排序。

考虑DP出至少有c对满足(a大于b)的情况数。

设 $f_{i,j}$ 表示，考虑到 $a_1 \dots a_i$ ，已经有j个a配对了一个比它小的b时，a的选法种数。

注意这里不考虑未配对的a选谁



## 组合容斥

### 引例

满足(a大于b)对数恰好比(a小于b)的对数多k组

可解出前者对数应恰好为 $\frac{n+k}{2}$ ，记为c

先对两个数组排序。

考虑DP出至少有c对满足(a大于b)的情况数。

设 $f_{i,j}$ 表示，考虑到 $a_1 \dots a_i$ ，已经有j个a配对了一个比它小的b时，a的选法种数。

注意这里不考虑未配对的a选谁

也就是至少有j对满足(a大于b)的情况数为 $f_{n,j} * (n - j)!$

# 组合容斥

## 引例

满足(a大于b)对数恰好比(a小于b)的对数多k组

可解出前者对数应恰好为 $\frac{n+k}{2}$ ，记为c

先对两个数组排序。

考虑DP出至少有c对满足(a大于b)的情况数。

设 $f_{i,j}$ 表示，考虑到 $a_1 \dots a_i$ ，已经有j个a配对了一个比它小的b时，a的选法种数。

注意这里不考虑未配对的a选谁

也就是至少有j对满足(a大于b)的情况数为 $f_{n,j} * (n - j)!$

列出转移

$$f_{i,j} = f_{i-1,j} + f_{i-1,j-1} * (right_i - (j - 1))$$

其中 $right_i$ 表示一个极大值，使得 $a_i > b_{right_i}$

# 组合容斥

## 引例

这样一来我们可以得知合法对数至少为 $c$ 的方案数，至少为 $c + 1$ 的方案数....

# 组合容斥

## 引例

这样一来我们可以得知合法对数至少为 $c$ 的方案数，至少为 $c + 1$ 的方案数....

考虑容斥

# 组合容斥

## 引例

这样一来我们可以得知合法对数至少为 $c$ 的方案数，至少为 $c + 1$ 的方案数....

考虑容斥

设 $g_j$ 表示合法对数恰好为 $j$ 的方案数。则答案就是 $g_c$ 。

倒序计算 $g_j$ 。

## 组合容斥

### 引例

这样一来我们可以得知合法对数至少为 $c$ 的方案数，至少为 $c + 1$ 的方案数....

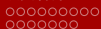
考虑容斥

设 $g_j$ 表示合法对数恰好为 $j$ 的方案数。则答案就是 $g_c$ 。

倒序计算 $g_j$ 。

$g_j = f_{n,j} * (n - j)! - \text{多余情况}$

多余情况指那些合法对数大于 $j$ 的情况。



引入

# 组合容斥

引例

考虑( $k > j$ )的 $g_k$ 在当前的 $f_{n,j}$ 中被算了多少次?

# 组合容斥

## 引例

考虑( $k > j$ )的 $g_k$ 在当前的 $f_{n,j}$ 中被算了多少次?

$f_{n,j}$ 的意义是, 选择 $j$ 个 $a$ 钦定它们有 $b$ 匹配, 剩下的 $a$ 随便选



# 组合容斥

## 引例

考虑( $k > j$ )的 $g_k$ 在当前的 $f_{n,j}$ 中被算了多少次?

$f_{n,j}$ 的意义是, 选择 $j$ 个 $a$ 钦定它们有 $b$ 匹配, 剩下的 $a$ 随便选

对于 $g_k$ 代表的每一种选法 $x$ , 就在每次随便选的过程中,  $x$ 会出现恰好一次。

## 组合容斥

### 引例

考虑( $k > j$ )的 $g_k$ 在当前的 $f_{n,j}$ 中被算了多少次?

$f_{n,j}$ 的意义是, 选择 $j$ 个 $a$ 钦定它们有 $b$ 匹配, 剩下的 $a$ 随便选

对于 $g_k$ 代表的每一种选法 $x$ , 就在每次随便选的过程中,  $x$ 会出现恰好一次。

这种选择总共会发生 $\binom{k}{j}$ 次, 因为有 $\binom{k}{j}$ 次钦点全部选中 $x$ 内的元素

## 组合容斥

### 引例

考虑( $k > j$ )的 $g_k$ 在当前的 $f_{n,j}$ 中被算了多少次?

$f_{n,j}$ 的意义是, 选择 $j$ 个 $a$ 钦定它们有 $b$ 匹配, 剩下的 $a$ 随便选

对于 $g_k$ 代表的每一种选法 $x$ , 就在每次随便选的过程中,  $x$ 会出现恰好一次。

这种选择总共会发生 $\binom{k}{j}$ 次, 因为有 $\binom{k}{j}$ 次钦点全部选中 $x$ 内的元素

所以每个 $x \in g_k$ 都被统计了 $\binom{k}{j}$ 次

# 组合容斥

## 引例

考虑( $k > j$ )的 $g_k$ 在当前的 $f_{n,j}$ 中被算了多少次?

$f_{n,j}$ 的意义是, 选择 $j$ 个 $a$ 钦定它们有 $b$ 匹配, 剩下的 $a$ 随便选

对于 $g_k$ 代表的每一种选法 $x$ , 就在每次随便选的过程中,  $x$ 会出现恰好一次。

这种选择总共会发生 $\binom{k}{j}$ 次, 因为有 $\binom{k}{j}$ 次钦点全部选中 $x$ 内的元素

所以每个 $x \in g_k$ 都被统计了 $\binom{k}{j}$ 次

$$g_j = f_{n,j} * (n-j)! - \sum_{j < k \leq n} \binom{k}{j} g_k$$

经典容斥  
○○○○○○○○○  
○○○○○○○

组合容斥  
○○○○  
●  
○○○○○○○○○○○

*min - max*容斥  
○○○○○  
○○○○○  
○○○○○○○○○

形式

# 组合容斥

问题形式

容斥系数不再是 $(-1)^k$ 形式，而是以组合数形式呈现

经典容斥  
○○○○○○○○○  
○○○○○○○

组合容斥  
○○○○  
●  
○○○○○○○○○○○

*min - max*容斥  
○○○○○  
○○○○○  
○○○○○○○○○

形式

## 组合容斥

问题形式

容斥系数不再是 $(-1)^k$ 形式，而是以组合数形式呈现  
涉及到集合枚举的问题

## 组合容斥

### 问题形式

容斥系数不再是 $(-1)^k$ 形式，而是以组合数形式呈现  
涉及到集合枚举的问题

形式通常是：

对于应恰好仅满足某种性质A的集合计数  
为了满足该性质，枚举并选择了 $k$ 个元素  
而剩下一部分随便取

设A是B的子性质，即满足B一定满足A，则这随便取的过程中，  
可能会涉及到满足B的情况

## 组合容斥

### 问题形式

容斥系数不再是 $(-1)^k$ 形式，而是以组合数形式呈现  
涉及到集合枚举的问题

形式通常是：

对于应恰好仅满足某种性质A的集合计数  
为了满足该性质，枚举并选择了 $k$ 个元素  
而剩下一部分随便取

设A是B的子性质，即满足B一定满足A，则这随便取的过程中，  
可能会涉及到满足B的情况

考虑某一种情况 $x$ ，在当前算了几次？每次枚举到 $x$ 的一些元素  
时，都会产生1的统计次数（随便取）



## 组合容斥

### 问题形式

容斥系数不再是 $(-1)^k$ 形式，而是以组合数形式呈现  
涉及到集合枚举的问题

形式通常是：

对于应恰好仅满足某种性质A的集合计数  
为了满足该性质，枚举并选择了 $k$ 个元素  
而剩下一部分随便取

设A是B的子性质，即满足B一定满足A，则这随便取的过程中，  
可能会涉及到满足B的情况

考虑某一种情况 $x$ ，在当前算了几次？每次枚举到 $x$ 的一些元素  
时，都会产生1的统计次数（随便取）

所以形式上是 $\binom{x}{k}$

# 组合容斥

## 例题

### 【BZOJ2839】集合计数

给定 $n$ 个元素 ( $n \leq 1000000$ )，共有 $2^n$ 个集合求取若干个集合且满足交集恰好为 $m$  ( $1 \leq m \leq n$ ) 的方案数。

# 组合容斥

## 例题

1. 设 $\alpha(k)$ 表示选定集合交集至少为 $k$ 的选法方案数，则有

$$\alpha(k) = \binom{n}{k} (2^{2^{n-k}} - 1)$$

## 组合容斥

### 例题

1. 设 $\alpha(k)$ 表示选定集合交集至少为 $k$ 的选法方案数，则有

$$\alpha(k) = \binom{n}{k} (2^{2^{n-k}} - 1)$$

2. 设答案为 $ans$ ，假设我们能够构造一个容斥系数 $f$ ，满足

$$ans = \sum_{i=0}^n f(i) \alpha(i)$$



# 组合容斥

## 例题

### 3.如何构造 $f$ 呢?

经典容斥  
○○○○○○○○○  
○○○○○○○

组合容斥  
○○○○  
○  
○○●○○○○○○○

*min - max*容斥  
○○○○○  
○○○○○  
○○○○○○○○○

例题

## 组合容斥

例题

3.如何构造 $f$ 呢?

从每种情况的统计次数入手



例题

## 组合容斥

例题

3. 如何构造  $f$  呢?

从每种情况的统计次数入手

考虑一种交集大小恰好为  $x$  的选择方案，它会被统计多少次?

## 组合容斥

### 例题

3. 如何构造  $f$  呢?

从每种情况的统计次数入手

考虑一种交集大小恰好为  $x$  的选择方案，它会被统计多少次?

$$T = \sum_{i=0}^x f(i) \binom{x}{i}$$



## 组合容斥

### 例题

3. 如何构造  $f$  呢?

从每种情况的统计次数入手

考虑一种交集大小恰好为  $x$  的选择方案，它会被统计多少次?

$$T = \sum_{i=0}^x f(i) \binom{x}{i}$$

根据我们的最终目的，应该让  $T = [x == m]$

# 组合容斥

## 例题

3. 如何构造  $f$  呢?

从每种情况的统计次数入手

考虑一种交集大小恰好为  $x$  的选择方案，它会被统计多少次?

$$T = \sum_{i=0}^x f(i) \binom{x}{i}$$

根据我们的最终目的，应该让  $T = [x == m]$

所以有如下式子

$$[x == m] = \sum_{i=0}^x \binom{x}{i} f(i)$$

# 组合容斥

## 例题

根据二项式反演，我们可以解得 $f$ 的表达式：

$$f(x) = \sum_{i=0}^x (-1)^{x-i} \binom{x}{i} [i == m]$$
$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x < m \\ (-1)^{x-m} \binom{x}{m} & , x \geq m \end{cases}$$

# 组合容斥

## 例题

因此

$$\begin{aligned} ans &= \sum_{i=0}^n f(i)\alpha(i) \\ &= \sum_{i=m}^n (-1)^{i-m} \binom{i}{m} \binom{n}{i} (2^{2^{n-i}} - 1) \end{aligned}$$

# 组合容斥

## 例题

因此

$$\begin{aligned} ans &= \sum_{i=0}^n f(i)\alpha(i) \\ &= \sum_{i=m}^n (-1)^{i-m} \binom{i}{m} \binom{n}{i} (2^{2^{n-i}} - 1) \end{aligned}$$

预处理，可在 $O(n)$ 出解

# 组合容斥

## 例题

前夕-By YPL

给定 $n$ 个元素 ( $n \leq 10^7$ ), 共有 $2^n$ 个集合求取若干个集合且满足交集大小恰好为4的倍数的方案数 (模998244353)

# 组合容斥

## 例题

1. 照样设 $\alpha(k)$ 表示选定集合交集至少为 $k$ 的选法方案数，则有

$$\alpha(k) = \binom{n}{k} (2^{2^{n-k}} - 1)$$

## 组合容斥

### 例题

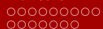
1. 照样设 $\alpha(k)$ 表示选定集合交集至少为 $k$ 的选法方案数，则有

$$\alpha(k) = \binom{n}{k} (2^{2^{n-k}} - 1)$$

2. 设答案为 $ans$ ，假设我们能够构造一个容斥系数 $f$ ，满足

$$ans = \sum_{i=0}^n f(i) \alpha(i)$$





# 组合容斥

## 例题

3.如何构造 $f$ 呢?

# 组合容斥

## 例题

3.如何构造 $f$ 呢?

还是从每种情况的统计次数入手

## 组合容斥

### 例题

3.如何构造 $f$ 呢?

还是从每种情况的统计次数入手

考虑一种交集大小恰好为 $x$ 的选择方案，它会被统计多少次?

## 组合容斥

### 例题

3. 如何构造  $f$  呢?

还是从每种情况的统计次数入手

考虑一种交集大小恰好为  $x$  的选择方案，它会被统计多少次?

$$T = \sum_{k=0}^x f(k) \binom{x}{k}$$

# 组合容斥

## 例题

3. 如何构造  $f$  呢?

还是从每种情况的统计次数入手

考虑一种交集大小恰好为  $x$  的选择方案，它会被统计多少次?

$$T = \sum_{k=0}^x f(k) \binom{x}{k}$$

根据我们的最终目的，应该让  $T = [x \equiv 0 \pmod{4}]$

所以有如下式子

$$[x \equiv 0 \pmod{4}] = \sum_{k=0}^x \binom{x}{k} f(k)$$

# 组合容斥

## 例题

根据二项式反演，我们可以解得 $f$ 的表达式：

$$f(x) = \sum_{k=0}^x (-1)^{x-k} \binom{x}{k} [k \equiv 0 \pmod{4}]$$

# 组合容斥

## 例题

根据二项式反演，我们可以解得 $f$ 的表达式：

$$f(x) = \sum_{k=0}^x (-1)^{x-k} \binom{x}{k} [k \equiv 0 \pmod{4}]$$

记 $\omega_m$ 为主 $m$ 次单位根，根据求和引理，有

$$[n \equiv 0 \pmod{m}] = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} (\omega_m^n)^i$$

# 组合容斥

## 例题

根据二项式反演，我们可以解得 $f$ 的表达式：

$$f(x) = \sum_{k=0}^x (-1)^{x-k} \binom{x}{k} [k \equiv 0 \pmod{4}]$$

记 $\omega_m$ 为主 $m$ 次单位根，根据求和引理，有

$$[n \equiv 0 \pmod{m}] = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} (\omega_m^n)^i$$

令 $m = 4$ ，则这个式子可以替换掉原式的那部分



## 组合容斥

### 例题

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^x (-1)^{x-k} \binom{x}{k} [k \equiv 0 \pmod{4}] \\ &= \sum_{k=0}^x (-1)^{x-k} \binom{x}{k} \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} (\omega_m^k)^i \end{aligned}$$

例题

## 组合容斥

例题

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^x (-1)^{x-k} \binom{x}{k} [k \equiv 0 \pmod{4}] \\ &= \sum_{k=0}^x (-1)^{x-k} \binom{x}{k} \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} (\omega_m^k)^i \\ &= \sum_{k=0}^x (-1)^{x+k} \binom{x}{k} \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} (\omega_m^k)^i \end{aligned}$$

## 组合容斥

## 例题

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{k=0}^x (-1)^{x-k} \binom{x}{k} [k \equiv 0 \pmod{4}] \\
 &= \sum_{k=0}^x (-1)^{x-k} \binom{x}{k} \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} (\omega_m^k)^i \\
 &= \sum_{k=0}^x (-1)^{x+k} \binom{x}{k} \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} (\omega_m^k)^i \\
 &= \frac{(-1)^x}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=0}^x (-1)^k \binom{x}{k} (\omega_m^i)^k
 \end{aligned}$$

# 组合容斥

## 例题

$$f(x) = \frac{(-1)^x}{m} \sum_{i=0}^{m-1} (1 - \omega_m^i)^x$$

## 组合容斥

### 例题

$$f(x) = \frac{(-1)^x}{m} \sum_{i=0}^{m-1} (1 - \omega_m^i)^x$$

可于 $\mathcal{O}(n)$ 内计算完成。

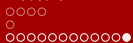
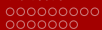
## 组合容斥

### 例题

$$f(x) = \frac{(-1)^x}{m} \sum_{i=0}^{m-1} (1 - \omega_m^i)^x$$

可于 $\mathcal{O}(n)$ 内计算完成。

一个集合都不选（空集都不选）也是一种方案，输出答案要额外+1



# 容斥系数的构造方法

## 总结

# 容斥系数的构造方法

## 总结

- ▶ 构造一个函数 $\alpha(k)$ 表示选择集合至少满足 $k$ 个性质的方案数



# 容斥系数的构造方法

## 总结

- ▶ 构造一个函数 $\alpha(k)$ 表示选择集合至少满足 $k$ 个性质的方案数
- ▶ 构造容斥系数 $f(k)$ ，列出答案表达式

# 容斥系数的构造方法

## 总结

- ▶ 构造一个函数 $\alpha(k)$ 表示选择集合至少满足 $k$ 个性质的方案数
- ▶ 构造容斥系数 $f(k)$ ，列出答案表达式
- ▶ 分析对于每一种具体选法，它被统计的次数

# 容斥系数的构造方法

## 总结

- ▶ 构造一个函数 $\alpha(k)$ 表示选择集合至少满足 $k$ 个性质的方案数
- ▶ 构造容斥系数 $f(k)$ ，列出答案表达式
- ▶ 分析对于每一种具体选法，它被统计的次数
- ▶ 再考虑每一种具体选法应该被统计多少次，联立解出容斥系数 $f(k)$

## min - max容斥

### 概念

min - max容斥，又称最值反演

给定集合 $S$ ， $\max(S)$ 表示 $S$ 中最大值， $\min(S)$ 表示 $S$ 中最小值  
则有

$$\max(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \min(T)$$

$$\min(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \max(T)$$

## *min - max*容斥

$$\text{证明 } \max(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \min(T)$$

对S中的元素从大到小排序

## *min - max*容斥

$$\text{证明 } \max(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \min(T)$$

对 $S$ 中的元素从大到小排序

考虑第 $x + 1$ 大的元素，会被计算多少次？（即作为 $\min(T)$ 呈现）

## $min - max$ 容斥

$$\text{证明 } \max(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \min(T)$$

对 $S$ 中的元素从大到小排序

考虑第 $x + 1$ 大的元素，会被计算多少次？（即作为 $\min(T)$ 呈现）

$$\sum_{k=0}^x \binom{x}{k} = 2^x$$

## min - max容斥

$$\text{证明 } \max(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \min(T)$$

对S中的元素从大到小排序

考虑第 $x + 1$ 大的元素，会被计算多少次？（即作为 $\min(T)$ 呈现）

$$\sum_{k=0}^x \binom{x}{k} = 2^x$$

我们希望当且仅当 $x + 1 = 1$ 时，该次数为1；其他情况都为0



## $\min - \max$ 容斥

$$\text{证明} \max(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \min(T)$$

对 $S$ 中的元素从大到小排序

考虑第 $x + 1$ 大的元素，会被计算多少次？（即作为 $\min(T)$ 呈现）

$$\sum_{k=0}^x \binom{x}{k} = 2^x$$

我们希望当且仅当 $x + 1 == 1$ 时，该次数为1；其他情况都为0

$x + 1 == 1$ 即 $x == 0$ 时，很特殊，选法是奇数；而其他情况选法是偶数

## $\min - \max$ 容斥

$$\text{证明} \max(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \min(T)$$

对 $S$ 中的元素从大到小排序

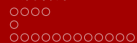
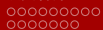
考虑第 $x + 1$ 大的元素，会被计算多少次？（即作为 $\min(T)$ 呈现）

$$\sum_{k=0}^x \binom{x}{k} = 2^x$$

我们希望当且仅当 $x + 1 = 1$ 时，该次数为1；其他情况都为0

$x + 1 = 1$ 即 $x = 0$ 时，很特殊，选法是奇数；而其他情况选法是偶数

考虑 $x \neq 0$ 时，用什么方法正负抵消



## *min* - *max*容斥

$$\text{证明 } \max(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \min(T)$$

## *min - max*容斥

$$\text{证明 } \max(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \min(T)$$

设全集为  $U = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  ( $n > 0$ )

则全集的所有子集恰好一半是奇数大小，一半是偶数大小

## min - max容斥

证明  $\max(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \min(T)$

设全集为  $U = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  ( $n > 0$ )

则全集的所有子集恰好一半是奇数大小，一半是偶数大小

$n$ 为奇数和 $n$ 为偶数的情况分别如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} \\ \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-1} \end{array} \right\}$$

## min-max容斥

证明  $\max(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \min(T)$

设全集为  $U = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  ( $n > 0$ )

则全集的所有子集恰好一半是奇数大小，一半是偶数大小

$n$ 为奇数和 $n$ 为偶数的情况分别如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} \\ \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-1} \end{array} \right\}$$

因此在 $x$  ( $x > 0$ ) 大小的全集中取子集 $T$ 时，只要加上 $(-1)^{|T|}$ 的系数，就可以正负抵消掉，总贡献次数恰好为0

## min - max容斥

证明  $\max(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \min(T)$

设全集为  $U = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  ( $n > 0$ )

则全集的所有子集恰好一半是奇数大小，一半是偶数大小  
 $n$ 为奇数和 $n$ 为偶数的情况分别如下：

$$\left\{ \begin{aligned} \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} &= \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} \\ \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} &= \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-1} \end{aligned} \right\}$$

因此在 $x$  ( $x > 0$ ) 大小的全集中取子集 $T$ 时，只要加上 $(-1)^{|T|}$ 的系数，就可以正负抵消掉，总贡献次数恰好为0

而 $x = 0$ 时最特殊，只能取空集，贡献次数为 $(-1)^0 = 1$

## *min - max*容斥

$$\text{构造 } \max(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \min(T)$$

正向考虑如何用子集的最小值表达全集的最大值



## *min - max*容斥

$$\text{构造} \max(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \min(T)$$

正向考虑如何用子集的最小值表达全集的最大值  
考虑构造容斥系数  $f(x)$  使得

$$\max(S) = \sum_{T \subseteq S} f(|T|) \min(T)$$

## min - max容斥

$$\text{构造} \max(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \min(T)$$

正向考虑如何用子集的最小值表达全集的最大值  
考虑构造容斥系数  $f(x)$  使得

$$\max(S) = \sum_{T \subseteq S} f(|T|) \min(T)$$

一个第  $x + 1$  大的元素被计算了多少次？

$$\sum_{k=0}^x \binom{x}{k} f(k+1)$$

## *min - max*容斥

构造  $\max(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \min(T)$

$$[x == 0] = \sum_{k=0}^x \binom{x}{k} f(k+1)$$

## min - max容斥

构造  $\max(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \min(T)$

$$[x == 0] = \sum_{k=0}^x \binom{x}{k} f(k+1)$$

$$f(x+1) = \sum_{k=0}^x (-1)^{x-k} \binom{x}{k} [k == 0]$$

## min - max容斥

构造  $\max(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \min(T)$

$$[x == 0] = \sum_{k=0}^x \binom{x}{k} f(k+1)$$

$$f(x+1) = \sum_{k=0}^x (-1)^{x-k} \binom{x}{k} [k == 0]$$

$$f(x+1) = (-1)^x$$

$$f(x) = (-1)^{x-1}$$

## min - max容斥

构造  $\max(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \min(T)$

$$[x == 0] = \sum_{k=0}^x \binom{x}{k} f(k+1)$$

$$f(x+1) = \sum_{k=0}^x (-1)^{x-k} \binom{x}{k} [k == 0]$$

$$f(x+1) = (-1)^x$$

$$f(x) = (-1)^{x-1}$$

因此有

$$\max(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} \min(|T|)$$



应用

# min - max容斥

应用

主要解决集合概率问题

## min - max容斥

### 应用

主要解决集合概率问题

例题：【HDU4336】

有 $n$ 种卡牌，每一时刻你有 $p_i$ 的概率得到其中一种 ( $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ )  
求每种卡牌得到至少1张的期望时间。



## *min - max*容斥

### 应用

记 $\max(S)$ 表示集合 $S$ 中最后拿到的卡的所需时间  
 $\min(S)$ 表示抽到集合 $S$ 中第一张拿到的卡的期望时间。

## min - max容斥

记 $\max(S)$ 表示集合 $S$ 中最后拿到的卡的所需时间  
 $\min(S)$ 表示抽到集合 $S$ 中第一张拿到的卡的期望时间。

$$E[\max(S)] = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} E[\min(T)]$$

## min - max容斥

### 应用

记 $\max(S)$ 表示集合 $S$ 中最后拿到的卡的所需时间  
 $\min(S)$ 表示抽到集合 $S$ 中第一张拿到的卡的期望时间。

$$E[\max(S)] = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} E[\min(T)]$$

$$E[\min(S)] = \frac{1}{\sum_{x \in S} p_x}$$

# min - max容斥

记 $\max(S)$ 表示集合 $S$ 中最后拿到的卡的所需时间  
 $\min(S)$ 表示抽到集合 $S$ 中第一张拿到的卡的期望时间。

$$E[\max(S)] = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} E[\min(T)]$$

$$E[\min(S)] = \frac{1}{\sum_{x \in S} p_x}$$

$O(2^n)$ 出解

# *min* - *max*容斥

## 应用

本质：使用经典容斥计算：

## min - max容斥

本质：使用经典容斥计算：

设 $f(S)$ 表示取到 $S$ 中任一元素的期望步数

$$f(S) = \frac{1}{\sum_{i \in S} p_i}$$

## min - max容斥

### 应用

本质：使用经典容斥计算：

设 $f(S)$ 表示取到 $S$ 中任一元素的期望步数

$$f(S) = \frac{1}{\sum_{i \in S} p_i}$$

如只有三个元素 $a, b, c$ 那么

$$Ans = f(a) + f(b) + f(c) - f(a, b) - f(a, c) - f(b, c) + f(a, b, c)$$

## min - max容斥

### 应用

#### 【BZOJ4036】按位或

刚开始你有一个数字0，每一秒钟你会随机选择一个 $[0, 2^n)$  ( $n \leq 20$ ) 的数字，与你手上的数字进行或操作。  
选择数字 $i$ 的概率是 $p_i$ 。保证 $0 \leq p[i] \leq 1, \sum p_i = 1$   
问期望多少秒后，你手上的数字变成 $2^n - 1$



# *min* - *max*容斥

## 应用

记 $\max(S)$ 表示集合 $S$ 中最后被或到的期望时间

$\min(S)$ 表示或到集合 $S$ 中第一个元素的期望时间

## min - max容斥

记 $\max(S)$ 表示集合 $S$ 中最后被或到的期望时间

$\min(S)$ 表示或到集合 $S$ 中第一个元素的期望时间

$$E[\max(S)] = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} E[\min(T)]$$

## min - max容斥

记 $\max(S)$ 表示集合 $S$ 中最后被或到的期望时间

$\min(S)$ 表示或到集合 $S$ 中第一个元素的期望时间

$$E[\max(S)] = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} E[\min(T)]$$

$$E[\min(S)] = \frac{1}{\sum_{T \cap S \neq \emptyset} p_T}$$

## min - max容斥

### 应用

记 $\max(S)$ 表示集合 $S$ 中最后被或到的期望时间

$\min(S)$ 表示或到集合 $S$ 中第一个元素的期望时间

$$E[\max(S)] = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|-1} E[\min(T)]$$

$$E[\min(S)] = \frac{1}{\sum_{T \cap S \neq \emptyset} p_T}$$

快速莫比乌斯变换预处理后面的分式，直接求解

# min - max容斥 推广

集合第k大怎么表示？

$$\text{kthmax}(S) = \sum_{T \subseteq S} f(|T|) \min(T)$$

# min - max容斥

## 推广

集合第 $k$ 大怎么表示？

$$\text{kthmax}(S) = \sum_{T \subseteq S} f(|T|) \min(T)$$

一个第 $x + 1$ 大的元素被计算了多少次？

$$\sum_{k=0}^x \binom{x}{k} f(k + 1)$$

# *min* - *max*容斥

## 推广

$$[x == k - 1] = \sum_{j=0}^x \binom{x}{j} f(j + 1)$$

# min - max容斥

## 推广

$$[x == k - 1] = \sum_{j=0}^x \binom{x}{j} f(j + 1)$$

$$f(x + 1) = \sum_{j=0}^x (-1)^{x-j} \binom{x}{j} [j == k - 1]$$



# min - max容斥

## 推广

$$[x == k - 1] = \sum_{j=0}^x \binom{x}{j} f(j + 1)$$

$$f(x + 1) = \sum_{j=0}^x (-1)^{x-j} \binom{x}{j} [j == k - 1]$$

$$f(x + 1) = (-1)^{x-(k-1)} \binom{x}{k-1}$$

$$f(x) = (-1)^{x-k} \binom{x-1}{k-1}$$

# min - max容斥

## 推广

因此有

$$\text{kthmax}(S) = \sum_{T \subseteq S} \min(T) (-1)^{|T|-k} \binom{|T|-1}{k-1}$$

# *min* - *max*容斥

## 推广

因此有

$$\text{kthmax}(S) = \sum_{T \subseteq S} \min(T) (-1)^{|T|-k} \binom{|T|-1}{k-1}$$

kthmax容斥依然适用于期望形式

# min - max容斥

## 应用

### 重返现世—YPL原创

有 $n$ 种元素，每一时刻你有 $\frac{p_i}{m}$ 的概率得到其中一种

$$\left(\sum_{i=1}^n p_i = m\right)$$

求得到 $k$ 种元素的期望时间（对998244353取模）

$$n \leq 1000, k \in [n - 10, n]$$

# min - max容斥

## 应用

根据

$$\text{kthmax}(S) = \sum_{T \subseteq S} \min(T) (-1)^{|T|-k} \binom{|T|-1}{k-1}$$

有

$$E[\text{kthmax}(S)] = \sum_{T \subseteq S} E[\min(T)] (-1)^{|T|-k} \binom{|T|-1}{k-1}$$

(这里的 $k$ 其实是 $n - k + 1$ ，输入是第 $k$ 小，而我们要做的是求第 $n - k + 1$ 大)

# min - max容斥

## 应用

$$E[\text{kthmax}(S)] = \sum_{T \subseteq S} \frac{m}{\sum_{i \in T} p_i} (-1)^{|T|-k} \binom{|T|-1}{k-1}$$

## min - max容斥

### 应用

$$E[\text{kthmax}(S)] = \sum_{T \subseteq S} \frac{m}{\sum_{i \in T} p_i} (-1)^{|T|-k} \binom{|T|-1}{k-1}$$

DP解决

设 $f_{i,j,k}$ 表示:

考虑前 $i$ 个数作为 $S$ 时

对于那些满足 $(\sum_{i \in T} p_i) = j$ 的 $S$ 的子集 $T$

参量为 $k$ 时,  $\sum_T (-1)^{|T|-k} \binom{|T|-1}{k-1}$ 的值是多少

# *min* - *max*容斥 应用

$f_{i,j,k}$  从哪里转移？考虑  $i$  这个元素是否纳入  $T$ ：



# min - max容斥 应用

$f_{i,j,k}$  从哪里转移? 考虑  $i$  这个元素是否纳入  $T$ :  
不纳入:  $f_{i,j,k} += f_{i-1,j,k}$

# min - max容斥 应用

$f_{i,j,k}$  从哪里转移？考虑  $i$  这个元素是否纳入  $T$ ：

不纳入： $f_{i,j,k} + = f_{i-1,j,k}$

纳入：

# min - max容斥 应用

$$f_{i,j,k} + = \sum_T (-1)^{|T|-k} \binom{|T|-1}{k-1}$$

# min - max容斥

## 应用

$$\begin{aligned} f_{i,j,k} &+ = \\ &\sum_T (-1)^{|T|-k} \binom{|T|-1}{k-1} \\ &= \sum_T (-1)^{|T|-k} \left( \binom{(|T|-1)-1}{k-2} + \binom{(|T|-1)-1}{k-1} \right) \end{aligned}$$

# min-max容斥

## 应用

$$\begin{aligned}f_{i,j,k} &= \\& \sum_T (-1)^{|T|-k} \binom{|T|-1}{k-1} \\&= \sum_T (-1)^{|T|-k} \left( \binom{(|T|-1)-1}{k-2} + \binom{(|T|-1)-1}{k-1} \right) \\&= \sum_T (-1)^{(|T|-1)-(k-1)} \binom{(|T|-1)-1}{(k-1)-1} + \sum_T (-1)^{(|T|-1)-(k-1)} \binom{(|T|-1)-1}{k-1}\end{aligned}$$

# min - max容斥

## 应用

$$\begin{aligned} f_{i,j,k} &= \\ & \sum_T (-1)^{|T|-k} \binom{|T|-1}{k-1} \\ &= \sum_T (-1)^{|T|-k} \left( \binom{(|T|-1)-1}{k-2} + \binom{(|T|-1)-1}{k-1} \right) \\ &= \sum_T (-1)^{(|T|-1)-(k-1)} \binom{(|T|-1)-1}{(k-1)-1} + \sum_T (-1)^{(|T|-1)-(k-1)} \binom{(|T|-1)-1}{k-1} \\ &= \sum_T (-1)^{(|T|-1)-(k-1)} \binom{(|T|-1)-1}{(k-1)-1} - \sum_T (-1)^{(|T|-1)-k} \binom{(|T|-1)-1}{k-1} \end{aligned}$$

# min - max容斥

## 应用

$$\begin{aligned}f_{i,j,k} &+ = \\&\sum_T (-1)^{|T|-k} \binom{|T|-1}{k-1} \\&= \sum_T (-1)^{|T|-k} \left( \binom{(|T|-1)-1}{k-2} + \binom{(|T|-1)-1}{k-1} \right) \\&= \sum_T (-1)^{(|T|-1)-(k-1)} \binom{(|T|-1)-1}{(k-1)-1} + \sum_T (-1)^{(|T|-1)-(k-1)} \binom{(|T|-1)-1}{k-1} \\&= \sum_T (-1)^{(|T|-1)-(k-1)} \binom{(|T|-1)-1}{(k-1)-1} - \sum_T (-1)^{(|T|-1)-k} \binom{(|T|-1)-1}{k-1} \\&= f_{i-1,j-p_i,k-1} - f_{i-1,j-p_i,k}\end{aligned}$$

# 容斥原理

Thanks For Listening!

RogerDTZ

2018年8月2日