集训队试题准备

任清宇

November 14, 2019

1 CF575E Spectator Riots

1.1 题目大意

给出一个 $[0, 10^5] \times [0, 10^5]$ 区域中 N 个人 (x_i, y_i)，第 i 个人一秒后均匀随机分布在距离其初始位置曼哈顿距离不超过 v_i 且仍处于这个区域内的整点上。

现要求选出三个不共线的一秒后可能有人的点，使得它们的外接圆中包含的（包括圆周上）期望人数最大。保证初始所有人不在一条直线上（否则可能选不出这样的三个点）。如果有多种选法，应选择其中半径最大的圆；如果仍有多种选法，选择其中任意一种。答案与标准答案的半径差不超过 0.01 即视为正确。

数据范围：$3 \le N \le 10^5; 1 \le x_i, y_i \le 10^5; 0 \le v_i \le 2000$。

1.2 解法

方便起见，我们记 $\odot ABC$ 表示 ABC 的外接圆，R_{ABC} 表示其半径。

首先根据期望的线性性，相当于每个点有一个权值 u_i 表示一秒后期望有多少个人出现在这里；要求选出三个不共线的权值非零的点使得它们外接圆中包含（包括圆周，下同）的点权和尽量大。

我们发现，如果用一个很大的圆向内"收缩"，则必定在某个时刻圆周上至少有三个点（指权值非零的点，下同）且其仍然包含所有点。即如下命题：

Proposition 1. 存在一种方案使得选出的三个点的外接圆包含所有点。

为证明这个结论，我们先固定外接圆上两点，然后收缩外接圆。形式的证明如下：

Proof of Propsition 1. 选定凸包上相邻两点 A, B（凸包不包含凸多边形边上的点，下同）。不难发现所有点都在线段 AB 上或者直线 AB 的其中一侧。对于线段 AB 上的点，可以发现所有经过 A, B 的圆都包含这些点；设 C 点为不在线段 AB 上的使得 $\angle ACB$ 最小的一点。可以证明 $\odot ABC$ 包含所有点（事实上，若 C, D 位于直线 AB 同一侧且 $\angle ACB \le \angle ADB$，那么 $\odot ABC$ 一定包含 D 点）。 □

由此，问题转化成了：**选择三个点使得它们外接圆半径尽量大，且能包含所有点。**问题大大简化，由此也可以简化很多条件：例如不需要计算点权，而只需要找到所有点权非零的点。

但是所有点权非零的点仍然很多，可以证明只保留凸包的顶点答案仍然不变：这是因为：

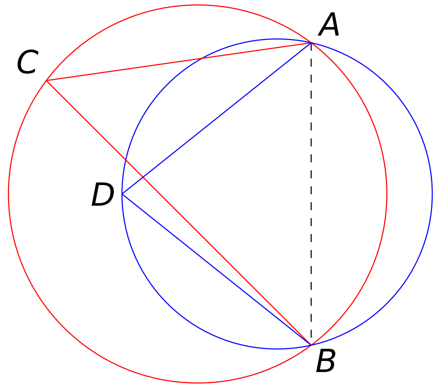

Figure 1: 当 $\angle ACB \le \angle ADB$ 时 $\odot ABC$ 包含点 D

1. 若一个圆包含凸包的所有顶点，则其一定包含凸包内的所有点。原因是圆是凸的图形；
2. 若三个点的外接圆包含所有点，则这三个点一定是凸包的顶点。因为过这个点做圆的切线，所有点都在这条直线的一侧，不难发现这个点必定是凸包的顶点。

求出凸包比较容易，不再赘述。接下来的问题仍然比较麻烦，我们先考虑四个点的情况(指凸包上有四个点，即一个凸四边形)。四个点的时候我们可以有四种选择方法，可以证明这样的结论：

Proposition 2. 设 $ABCD$ 是一个凸多边形，$R_{ABC} \ge R_{ABD}, R_{ACD}, R_{BCD}$，则 $D \in \odot ABC$。

证明方式是反证。我们先证明一个引理：

Lemma 1. 设有四个点 A, B, C, D，若 C, D 在直线 AB 同侧，$D \notin \odot ABC$，且 $\angle ACB < \frac{\pi}{2}$，则 $R_{ABC} < R_{ABD}$。

Proof. 根据正弦定理，$R_{ABC} = \frac{|AB|}{2\sin\angle ACB}$，而 $D \notin \odot ABC \iff \angle ADB < \angle ACB$，因此 $0 < \angle ADB < \angle ACB < \frac{\pi}{2}$。

于是 $\sin\angle ADB < \sin\angle ACB$，所以 $R_{ABC} = \frac{|AB|}{2\sin\angle ACB} < \frac{|AB|}{2\sin\angle ADB} = R_{ABD}$。 □

有了这个，就可以考虑对于命题 2 进行反证，具体证明如下：

Proof of Propsition 2. 设 $R_{ABC} \ge R_{ABD}, R_{ACD}, R_{BCD}$，而 $D \notin \odot ABC$。

易知 $\angle ACB, \angle BAC$ 中至少有一个为锐角，不妨设 $\angle ACB < \frac{\pi}{2}$。那么根据引理 1，我们就有 $R_{ABC} < R_{ABD}$；与 $R_{ABC} \ge R_{ABD}$ 矛盾。因此假设不成立，即必有 $D \in \odot ABC$。 □

有了这个结论，我们可以发现多个点的情况也可以进行进一步简化：只需要找到一个最大的外接圆 $\odot ABC$，那么对于任意点 D，由于所有外接圆大小都不超过 $\odot ABC$ 的大小，那么根据命题 2，D 一定被 $\odot ABC$ 所包含。因此问题可以简化为：**选择三个点，最大化它们的外接圆半径。**

可以想到，如果三个点尽量接近在一条直线上，那么外接圆会更大。这启发我们考虑凸包上相邻的三个点。准确的说，答案必定是凸包上某相邻三个点的外接圆。这个结论也就是本题的中心结论：

Proposition 3. 必有最大的外接圆之一是凸包上相邻三个顶点产生的。

Proof. 假设最大的外接圆必定不是相邻三个顶点产生的，那么任取一个最大的外接圆，设其半径为 R_0，圆周上有凸包的 k 个顶点 $A_1, A_2 \ldots A_k$。

根据假设，至少存在两个下标 i, j 使得 A_i, A_{i+1} 在凸包上不相邻，A_j, A_{j+1} 在凸包上不相邻（否则不难看出可以选出相邻的三个顶点）。那么 $\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}, \overset{\frown}{A_jA_{j+1}}$ 必定有一个是劣弧，不失一般性假设 $\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$ 是劣弧。

找到凸包上 A_i, A_{i+1} 之间一点 B 使得 $\angle A_iBA_{i+1}$ 最小。根据上述结论，B 一定包含在圆内（否则与命题 2 不符）。

任取优弧 $\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$（即远离 B 点那一边的弧）上一点 C，易见 $\pi - \angle C < \angle B < \pi$，所以 $\sin\angle B = \sin(\pi - \angle B) < \sin C$。

于是 $R_0 = \frac{|A_iA_{i+1}|}{2\sin C} < \frac{|A_iA_{i+1}|}{2\sin B} = R_{A_iBA_{i+1}}$，与假设不符。 □

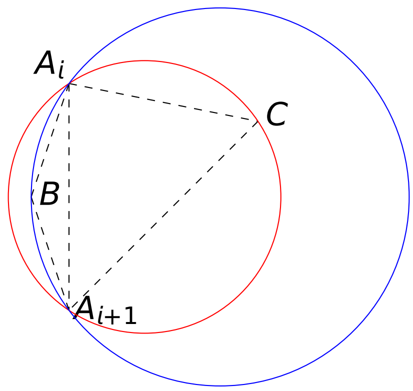

Figure 2: 选择 A_i, A_{i+1} 之间的点 B 以找到更大的圆

由此，我们已经得到了做法：枚举凸包上相邻三个点，计算外接圆半径并选择其中最大的即可。对于求出凸包，可以考虑每个曼哈顿意义下的领域在与 $[0, 0] \times [10^5, 10^5]$ 交之后会得到一个 k 边形（$4 \le k \le 8$），将 k 个顶点记下后求凸包即可，复杂度为 $O(n)$。至于计算外接圆半径，可以考虑 $R_{ABC} = \frac{|AB||AC||BC|}{2|AB \times AC|}$（$\times$ 表示叉积），实验表明此种方式的精度满足要求。

2 AGC035C Skolem XOR Tree

2.1 题目大意

给定正整数 N，求一个 $2N$ 个点的树；设结点的权值为 $1 \dots N, 1 \dots N$（即 $i, i+N$ 的权值都是 i），请构造一棵树使得 i 到 $i+N$ 路径上所有点的点权异或值为 i。不存在则输出 -1。

$1 \le N \le 10^5$

2.2 解法

如果 $N = 2^k (k \in \mathbb{N})$，那么是无解的：$N$ 到 $2N$ 路径上所有点权异或值二进制第 k 位一定是 0，于是肯定不为 2^k。

否则若 N 为奇数则可以这样构造：$1-2-3-(N+1)-(N+2)-(N+3)$ 构成一条链，然后对于每个大于 2 的偶数 t, 连接 $(N+1)-t-(t+1)$ 和 $(N+1)-(N+t+1)-(N+t)$。这样的话, 1, 2, 3 不难验证, 对于偶数 t, t 到 $N+t$ 的路径经过了 $t, N+1, (N+t+1), (N+t)$, 容易验证权值异或起来是 t；对于奇数也类似。

如果 N 是偶数，先如上述方式构造 $N-1$ 的方案，然后找到最大的满足 $2^k < N$ 的正整数 k，容易发现 $N, 2^k, 1, N-2^k+1, N$ 五个数异或起来为 N，于是连接 $N-2^k$ 和 $(2N)-(2N-2^k+1)$ 即可。可以发现 2^k 和 $2N-2^k+1$ 都和 $N+1$ 直接连边 ($N-2^k+1=3$ 时除外，这时应连接 $(2N)-3$)。这样，N 到 $2N$ 的路径异或值就也是 N 了。

总复杂度显然为 $O(N)$。

3 AGC026F Manju Game

3.1 题目大意

给出一个序列 $a_1 \ldots a_N$，A,B 两人轮流操作，每次可以选择与上次对方选择的位置相邻且没有被选过的位置并将这个位置的数加到自己的得分里；如果这是先手第一次操作或者选不出这样的位置，则可以任选一个没选过的位置选择；游戏在所有位置都被选过之后结束。问 A 和 B 采取最优策略时分别可以获得多少分。

$2 \le N \le 300000, 1 \le a_i \le 1000$

3.2 解法

我们把序列交替染成黑色和白色，奇数位置为黑色偶数位置是白色。设黑色位置的数的和为 B，白色的为 W。

如果 N 是**偶数**那么比较容易：这时候黑色和白色是对称的，那么：

1. 先手能保证至少获得 $\max(W, B)$ 分。他只需要选择最左边的位置，之后就只剩下一种选法了：先手获得 B，后手获得 W；同样他也可以获得 W，后手获得 B。
2. 后手能保证至少获得 $\min(W, B)$ 分。如果先手第一次选择黑色的位置，那么后手往左边走，这样他在右边成为先手，可以拿到所有白色位置；先手选白色也类似。

由于 $\max(W, B) + \min(W, B) = W + B$，所以一定是先手获得 $\max(W, B)$ 分，后手获得 $\min(W, B)$ 分。

当 N 是**奇数**的时候比较复杂，可以发现此时先手仍然可以保证获得 B 分。

我们来关注一下这时候双方的决策会是什么样：

1. 如果先手选择某个白色位置，那么后手可以往左或者往右走拿到那一边的所有黑色位置；然后在另一边先手仍然是先手，递归下去；
2. 如果先手选择某个黑色位置，类似 N 为偶数的情况，可以发现后手必定可以保证自己获得至少 W 分；所以先手如果决定要选择黑色位置，最好的结果就是先手获得 B 而后手获得 W。

我们考虑在前一种情况中后手有两种选择，于是先手的决策应当是一棵树：树根是它第一次要选择的白色位置，左子树是往左递归后的这样的树，右子树是往右递归后的这样的树。

如果先手决定选择黑色位置，那么结果已定，他会获得当前剩下区间里的黑色位置之和，而后手会获得白色位置之和。这样的决策在树上作为一个叶子。

先手确定这样一棵树之后，后手可以通过自己的选择来决定递归到哪个叶子里。这样的话，在这个叶子对应的区间之外，先手获得所有白色位置而后手获得所有黑色位置；在这个叶子对应的区间内恰好相反。

既然这样，树的形态就不重要，重要的是选出了哪些白色位置作为中间结点。选出了这些中间结点（即一些白色的位置，也可以一个不选）之后会把序列划分成若干段，后手会选择其中 (白色权值和 - 黑色权值和) 最大的一段走过去，并获得这里面的白色权值和以及别的段里面的黑色权值和。那么如果先手想要获得至少 $B + X$ 的权值，就要让每一段中 (黑色权值和 - 白色权值和) 至少为 X。

所以可以二分这个 X 的值，接下来就需要解决这样的问题：是否可以选出若干个白色位置把序列划分成若干段，每段的 (黑色权值和 - 白色权值和) 都大于等于 X，显然这可以 DP (或者说贪心）$O(N)$ 实现。

于是总复杂度则为 $O(N \log \sum a_i)$。