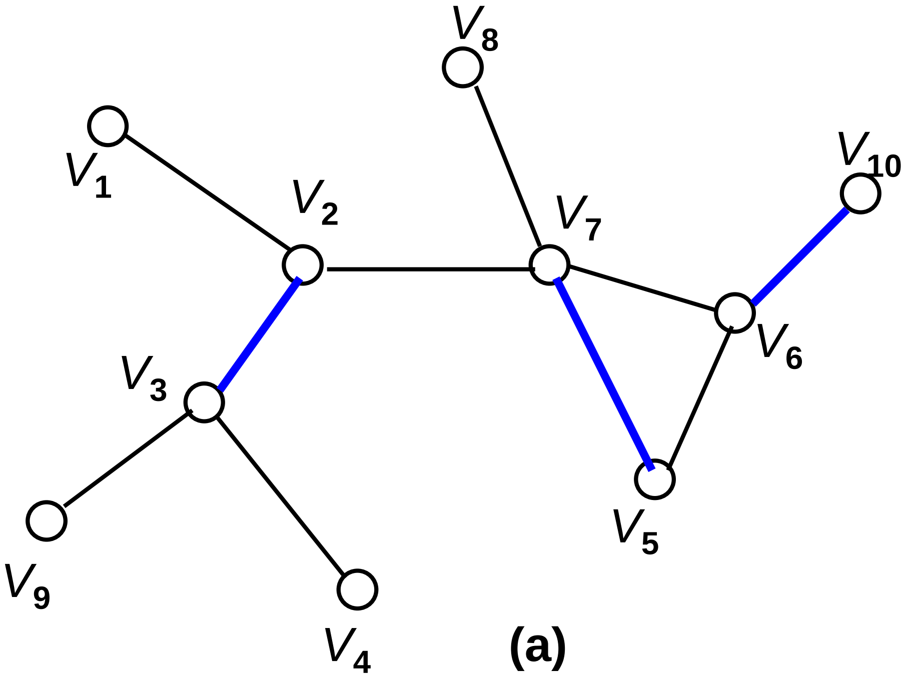
Bipartite Graph

Yicheng Lee

飞行员搭配问题1—最大匹配问题

- 飞行大队有若干个来自各地的飞行员，专门驾驶一种型号的飞机，这种飞机每架有两个飞行员。由于种种原因，例如互相配合的问题，有些飞行员不能在同一架飞机上飞行，问如何搭配飞行员，才能使出航的飞机最多。
- 为简单起见，设有10个飞行员，图(a)中的$V_1, V_2, \ldots V_{10}$就代表这10个飞行员。如果两个人可以同机飞行，就在他们之间连一条线，否则就不连。

§ 图(a)中的3条蓝色的粗线代表一种搭配方案。由于一个飞行员不能同时派往两架飞机，因此任何两条粗线不能有公共端点。称一个图中没有公共端点的一组边成为一个“匹配”。因此上述问题就转化为：如何找一个包含最多边的匹配，这个问题叫图的最大匹配问题。



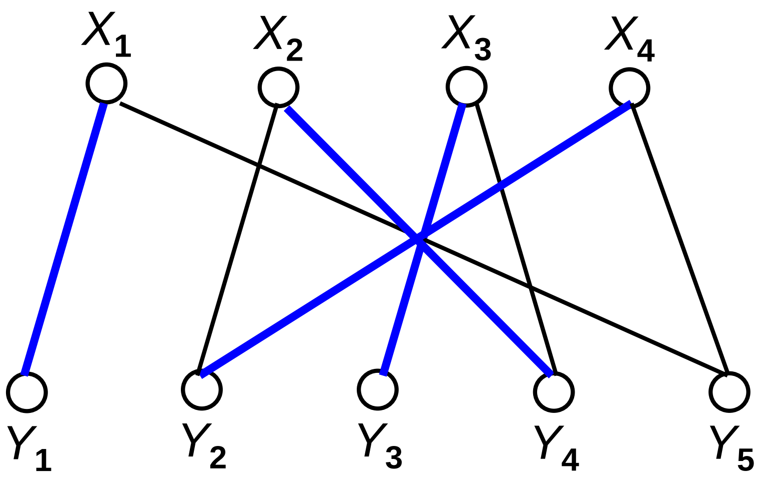
(a)

飞行员搭配问题2－二部图的最大匹配问题

- 如果飞行员分成两部分，一部分是正驾驶员，一部分是副驾驶员。如何搭配正副驾驶员才能使得出航飞机最多的问题可以归结为一个二部图上的最大匹配问题。
- 例如，假设有4个正驾驶员，有5个副驾驶员，飞机必须要有一名正驾驶员和一名副驾驶员才能起飞。正驾驶员和副驾驶员之间存在搭配的问题。

§ 图(b)中，**X_1,X_2,X_3,X_4**表示**4**个正驾驶员，**Y_1,Y_2,Y_3,Y_4,Y_5**表示**5**个副驾驶员。正驾驶员之间不能搭配，副驾驶员之间也不能搭配，所以这是一个二部图。

§ 图(b)中的**4**条蓝色的粗线代表一种搭配方案。这个问题实际上是求一个二部图的最大匹配。

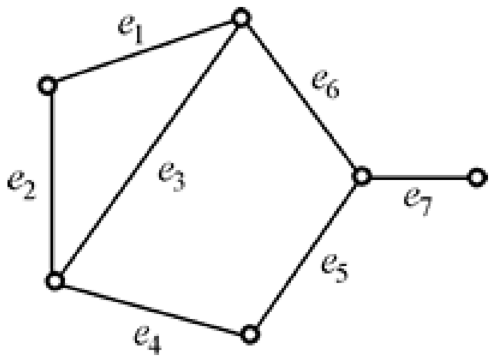


(b)

匹配

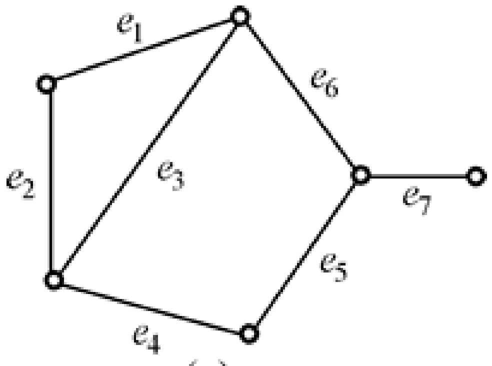
- 设G = <V, E>, 若E*(E*$\subseteq$E)中任何两条边均不相邻,
  - 则称E*为G中边独立集, 也称E*为G中的匹配(Matching);

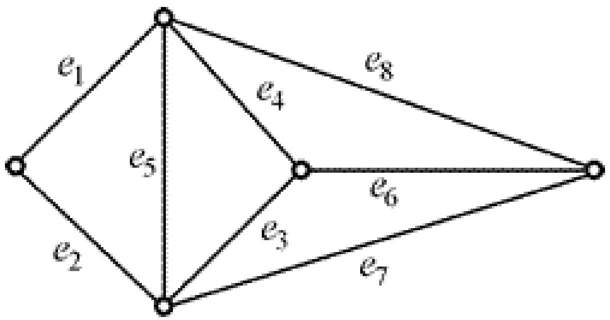
图(a)中，E*= { e_1, e_4, e_7 }就是一个匹配。所谓任何两条边均不相邻，通俗地讲，就是任何两条边都没有公共顶点。



(a)

若在E*中加入任意一条边所得集合都不是匹配, 则称E*为极大匹配;
边数最多的匹配称为最大匹配;
最大匹配的边数称为边独立数或匹配数, 记作$\beta_1(G)$, 简记为β_1。





图(a)中, $\{ e_2, e_6 \}$, $\{ e_3, e_5 \}$, $\{ e_1, e_4, e_7 \}$都是极大匹配, $\{ e_1, e_4, e_7 \}$是最大匹配, $\beta_1 = 3$。

图(b)中, $\{ e_1, e_3 \}$, $\{ e_2, e_4 \}$, $\{ e_4, e_7 \}$都是极大匹配, 也都是最大匹配, $\beta_1 = 2$。

二部图(二分图)

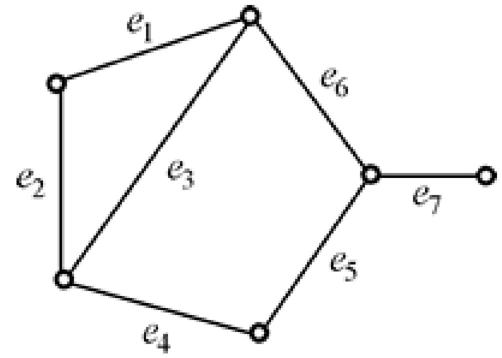
二部图：如果图G是一个简单图，它的顶点集合V是由两个没有公共元素的子集$X=\{X_1,X_2,..,X_m\}$与子集$Y=\{Y_1,Y_2,\ldots,Y_n\}$，并且X_i与$X_j(1\leq i,j\leq m)$之间，Y_s与$Y_t(1\leq s,t\leq m)$之间没有边连接，则G称为**二部图**。

完美(完备)匹配

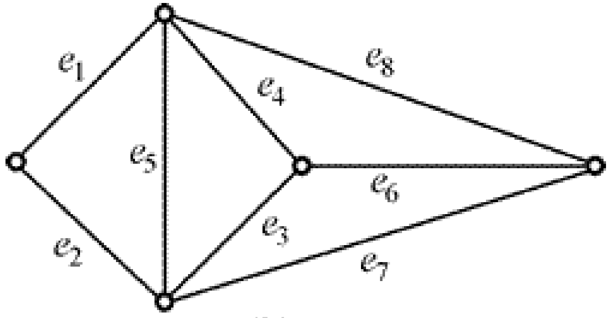
对于一个图G与给定的一个匹配M，如果图G中不存在M的未盖点(不饱和点)，则称匹配M为图G的完美匹配。

图(a)中, M = { e_1, e_4, e_7 }为完美匹配(最大匹配), 它也是最小边覆盖。

图(b)中不可能有完美匹配, 因此, 对任何匹配都存在未盖点。



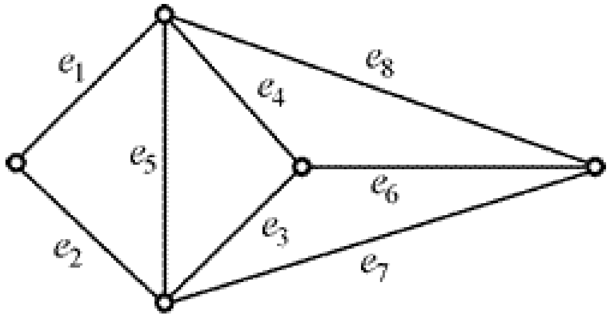
(a)



(b)

任取一个最大匹配, 比如: $M = \{ e_2, e_4 \}$, 则 $M\cup\{ e_6 \}$, $M\cup\{ e_8 \}$, $M\cup\{ e_7 \}$都是图的最小边覆盖。

任取一个最小边覆盖, 比如: $W = \{ e_1, e_3, e_6 \}$, 从中移去一条相邻的边, 则$\{ e_1, e_3 \}$和$\{ e_1, e_6 \}$都是图的最大匹配。



(b)

我们通常这样来做:

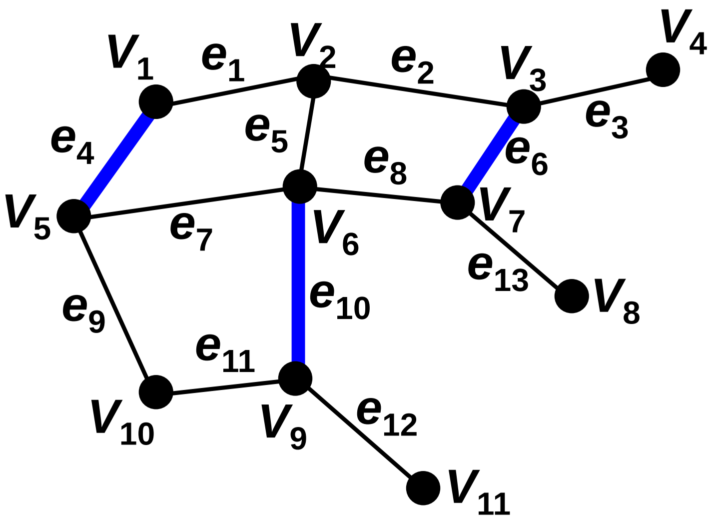
用最大匹配通过增加关联未盖点(不饱和点)的边获得最小边覆盖;

用最小边覆盖通过移去相邻的一条边获得最大匹配。

匹配问题的求解

❶ 未盖点(不饱和点)

设Vi是图G = <V, E>的一个顶点，M是图G中一个给定的匹配，如果V_i不与任意一条属于匹配M的边相关联，则称V_i是匹配M的未盖点(不饱和点)。很形象：没有被匹配M中的边“盖住”。



(a)

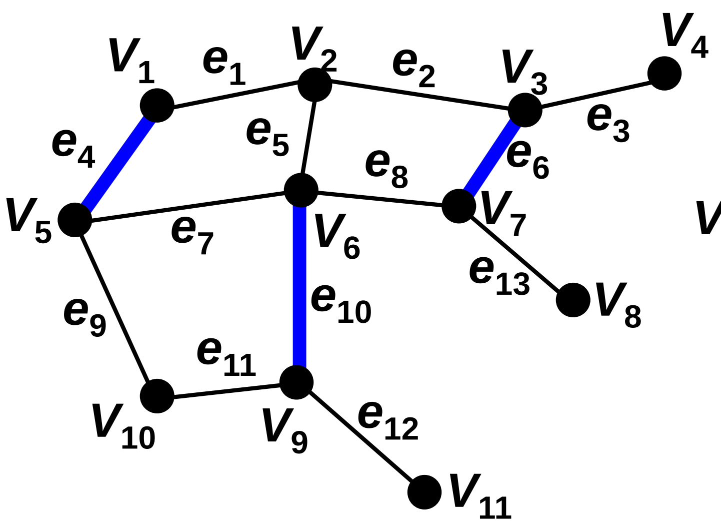
取定M={e_4, e_6, e_{10}}(由粗线组成的匹配)，则图(a)中，V_{10}就是M的一个未盖点。

❷ 交错轨

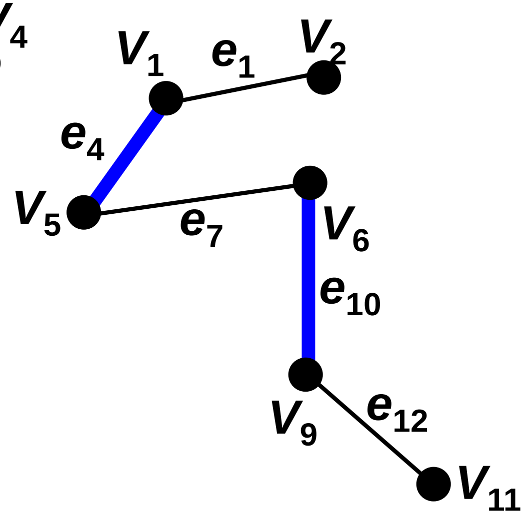
设P是图G的一条轨(路径)，如果P的任意两条相邻的边一定是一条属于匹配M而另一条不属于M，则称P是一条交错轨。

在图(a)中，取定M={e_4, e_6, e_{10}}(由粗线组成的匹配)，则图(b)、(c)所示的路径都是交错轨。

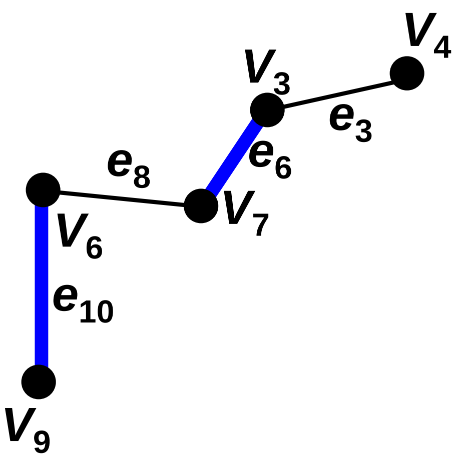
特别地，如果轨P仅含一条边，那么无论这条边是否属于匹配M，P一定是一条交错轨。



(a)



(b)



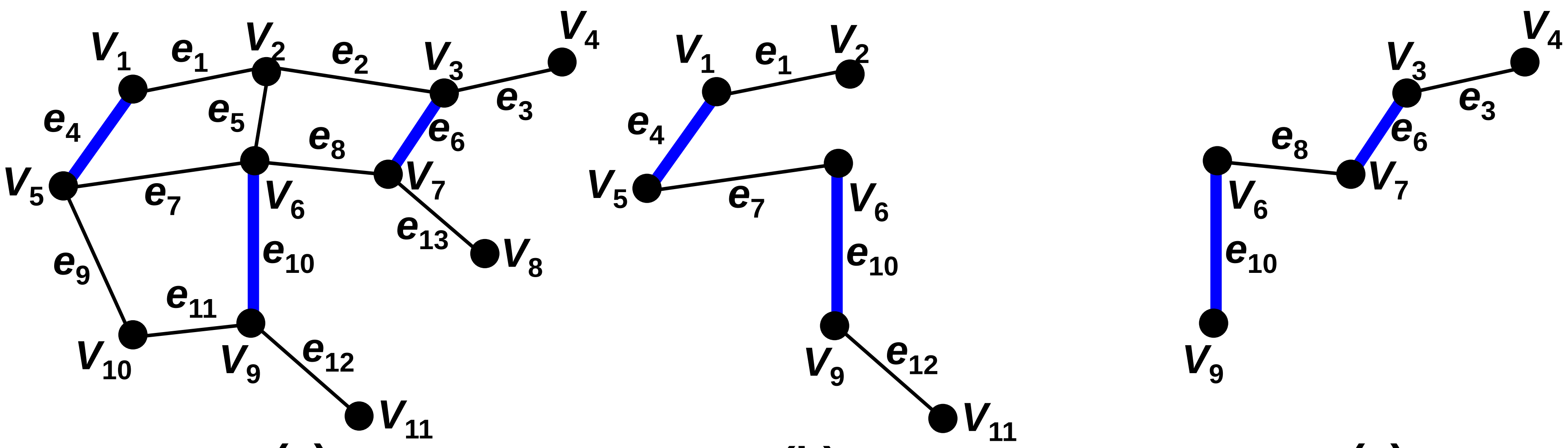
(c)

❸ 可增广轨

两个端点都是未盖点的**交错轨**称为**可增广轨**。

图(b)所示的交错轨的两个端点V_2, V_{11}都是匹配M的未盖点，所以这条轨是可增广轨，而图(c)所示的交错轨不是可增广轨。

特别地，如果两个未盖点之间仅含一条边，那么单单这条边也组成一条可增广轨。



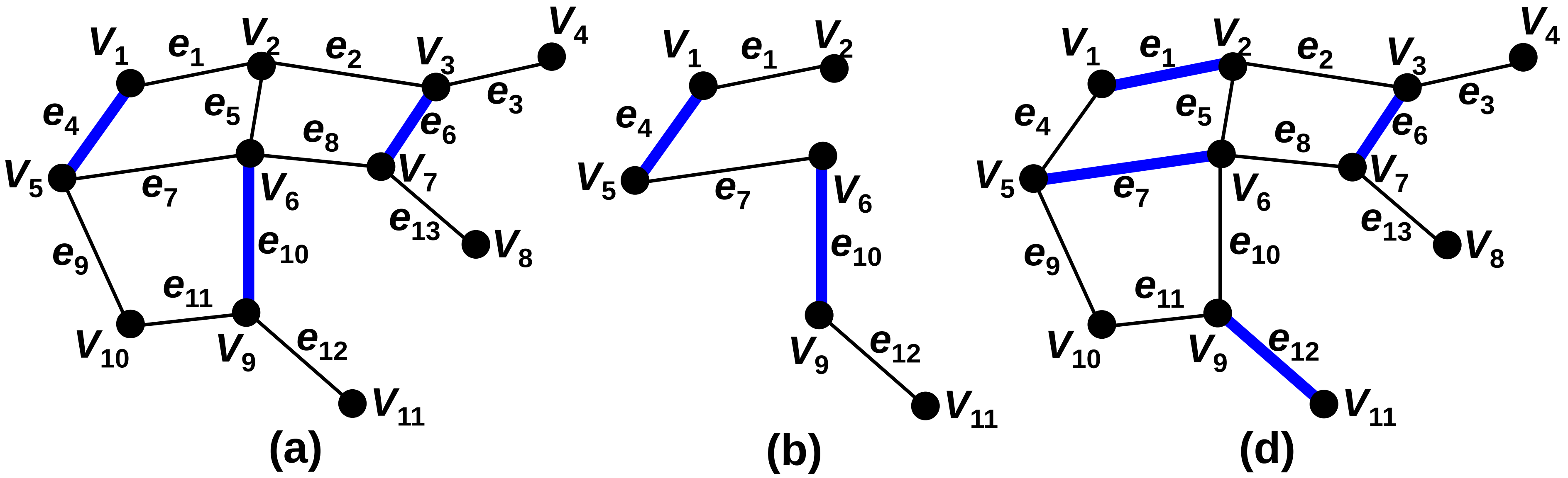
(a) (b) (c)

可增广轨的含义

对于图G的一个匹配M来说，如果能找到一条**可增广轨P**，那么这个匹配M一定可以通过下述方法改进成一个包含多一条边的匹配*Ms*(即匹配M扩充了)：

把P中原来属于匹配M的边从匹配M中去掉(粗边改成细边)，而把P中原来不属于M的边加到匹配Ms中去(细边改成粗边)，变化后的匹配Ms恰好比原匹配M多一条边。

如图(a)中图G的一个匹配M，找到图(b)所示的一条可增广轨，那么得到图(d)所示的新匹配Ms。Ms比M多一条边。



定理 M为G的最大匹配, 当且仅当G不含M可增广路径。

证：1) 必要性

假设: M为G中最大匹配。

若G中存在M的可增广路径Γ, 则Γ中在M中的边比不在M中的少1。

设$M' = (M \cup \Gamma(E)) - (M \cap \Gamma(E)) = M \oplus \Gamma(E)$, 则M'中边彼此不邻, 且M'比M多一条边, 即: M'是比M多一条边的匹配, 这就与“M是最大匹配”相矛盾。

所以, M不含可增广路径。

2) 充分性

设: M是G中不含可增广路径的匹配, M_1是G中的最大匹配。

下面证明: $|M| = |M_1|$。

设: $H = G[M_1 \oplus M]$。

当$H = \phi$时

显然, $M = M_1$, 所以, M为G中最大匹配。

若$H \neq \phi$时

由于M和M_1都是匹配, 所以, H各连通分支要么是由M和M_1中的边组成的交错圈, 在交错圈上M和M_1中的边数相等, 要么为由M和M_1的边组成的交错路径。

由已知条件可知: M不含可增广路径, M_1是最大匹配。由必要性可知: M_1中也无可增广的交错路径。

所以, 在由M和M_1组成的交错路径上, M和M_1的边也相等, 即: M与M_1边的个数相同。

因此, M为最大匹配。

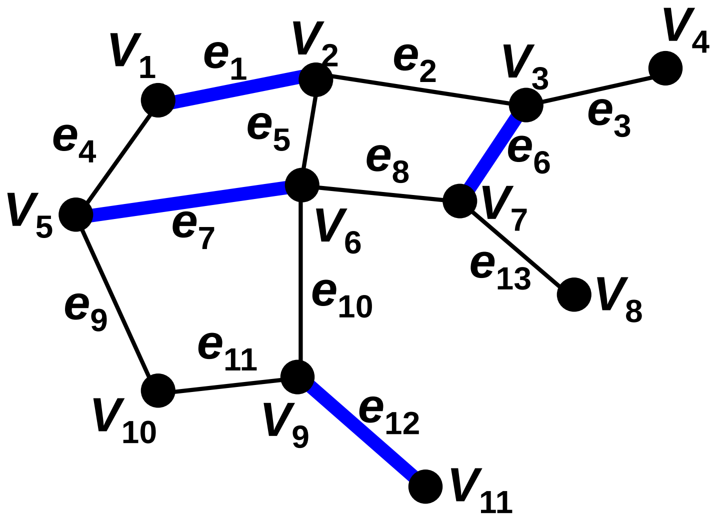
求最大匹配的可行方法:

- **给定一个初始匹配M(如果没有给定，则M＝∅)，如果图G没有未盖点，则肯定不会有可增广轨了，即M就是最大匹配。**
- **对图G的所有未盖点V_i，通过一定的方法搜索以V_i为端点的可增广轨，从而通过可增广轨逐渐把M扩大。(在扩大M的过程当中，某些未盖点会逐渐被M盖住)**

寻找可增广轨的方法

❹ 交错可达

设M是图G的一个匹配，V_i是取定的未盖点，如果存在从V_i到V_j的交错轨，则称由V_i交错可达V_j。



(d)

以图(d)为例，如果取定了未盖点V_4，那么存在着交错轨P={V_4, V_3, V_7, V_6}，因此由V_4交错可达V_6，同样由V_4还交错可达V_7等等。

寻找以V_i为端点的可增广轨的方法：设法把由V_i交错可达的顶点都找出来，每找到一个，就检查一下它是不是未盖点，如果是，则可增广轨就找到了。如果已经把所有由V_i交错可达的顶点都找出来了，而其中没有一个是未盖点，就可以肯定以V_i为一端的可增广轨一定不存在了。

为了把由V_i交错可达的顶点都找出来，需要引入交错树的概念

❺ 交错树

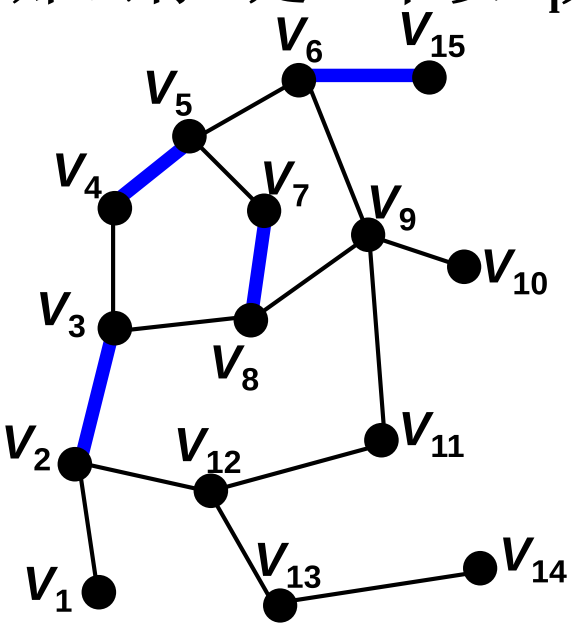
设M是图G={V,E}的一个取定的匹配，T是图G的一个子图，如果T具有下述性质：

(1) T是一棵树；

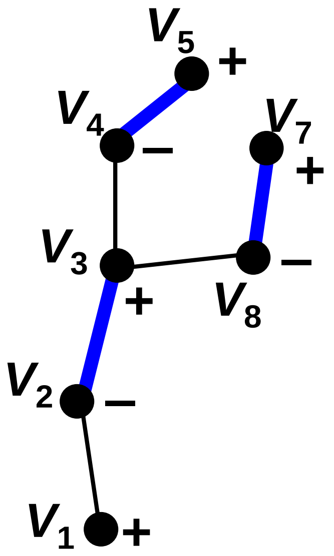
(2) T中存在一个顶点V_i，它是未盖点；

(3) 对于T的任意一个不同于V_i的顶点来说，T中连接V_i与V_j的唯一轨是交错轨。

那么称T是一个以V_i为根的交错树。



(a)



(b) T

图(a)中粗边代表一个匹配。图(b)所示的子图就是一个以V_1为根的交错树。

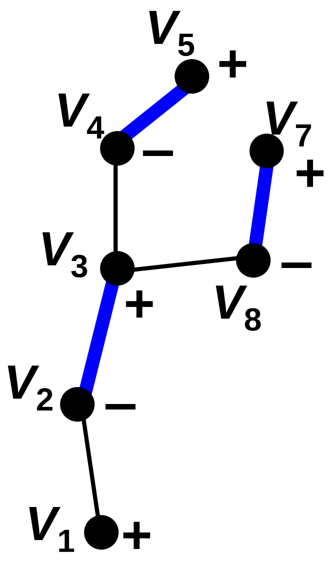
为了描述如何扩大一个交错树，需要介绍有关顶点分类的概念

❻ 内点、外点

交错树T的顶点可以分成两类：

外点：即图(b)中标‘+’号的顶点，如果V_j是外点，则连接根V_i与V_j的交错轨一定含偶数条边，且P上与V_j关联的边一定属于匹配M。

内点：即图(b)中标‘–’号的顶点，如果V_j是内点，则连接根V_i与V_j的交错轨一定含奇数条边，且P上与V_j关联的边一定不属于匹配M。



(b) T

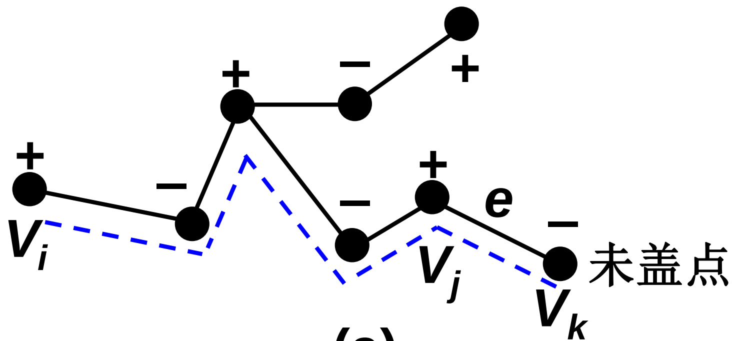
图(b)中V_1、V_3、V_5、V_7为外点，而V_2、V_4、V_8为内点。

扩大以V_i为根的交错树的方法

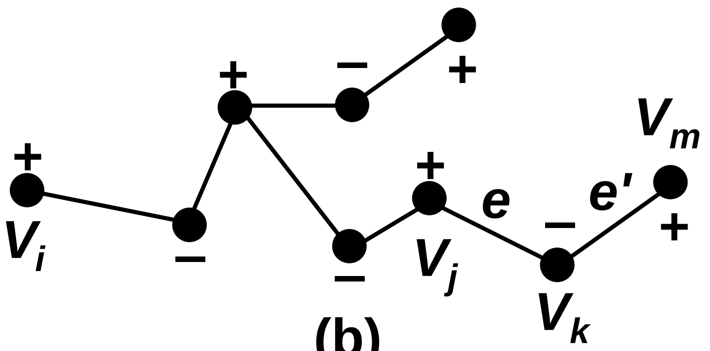
看看图G中有没有与交错树T的外点关联而不属于T的边*e*，如果有，就看看*e*的另一个端点V_k是不是属于T(肯定不属于T)，如果V_k不属于T，那么就可以把*e*和V_k都加入到T中，使T扩大。在扩大的时候，还可以分为两种情况：

V_k是未盖点，这时，把*e*与V_k加入到T中后，T中连接根V_i与V_k的交错路是一条可增广轨。(见下图(a))

V_k不是未盖点，也就是说，有一条属于匹配M的边*e'*与V_k关联，这时，在把e与V_k加入到T中后，还可以把*e'*以及它的端点V_m加入到T中去，因为很显然从V_i也交错可达*e'*的另一端点V_m。另外，V_k应该是内点，而V_m是外点。(见下图(b))

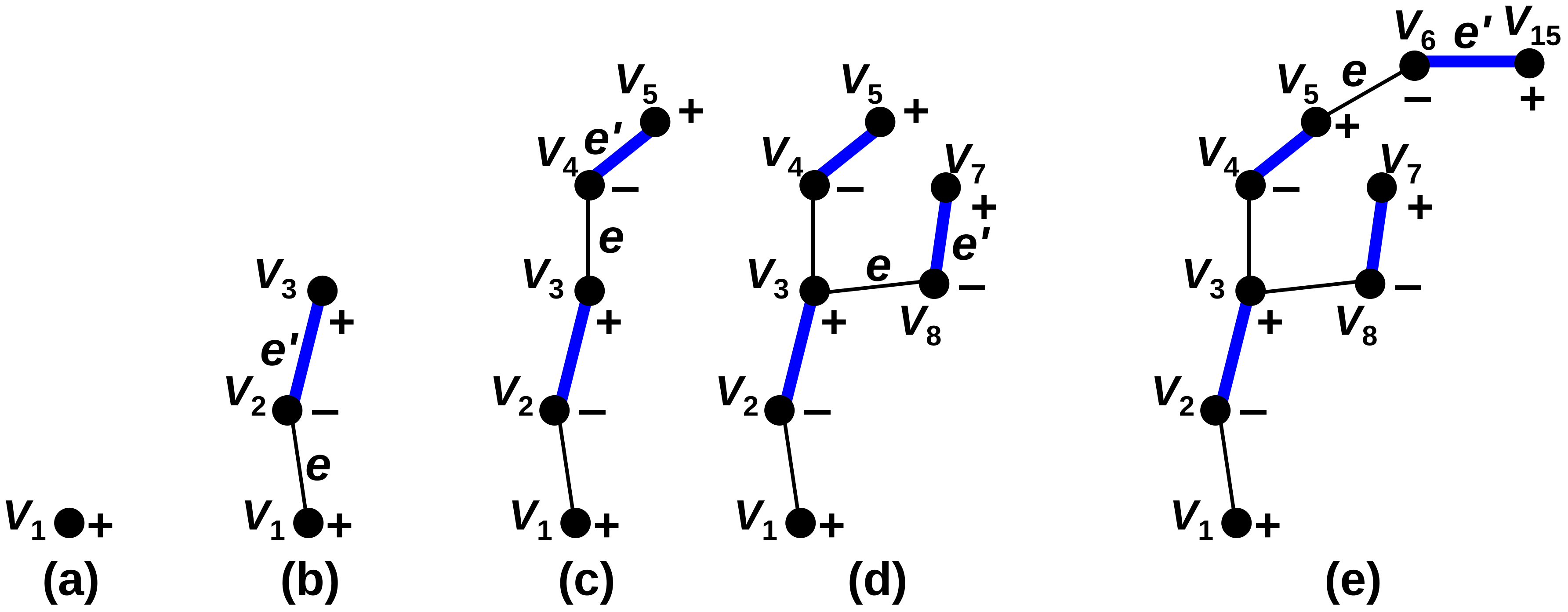


(a)



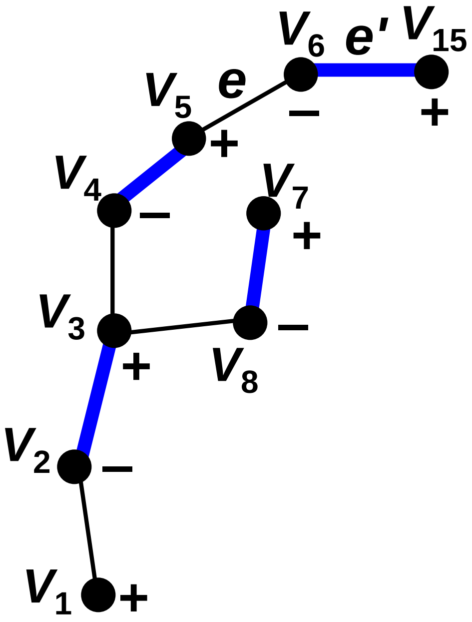
(b)

下面图(a)、(b)、(c)、(d)、(e)给出了从V_1出发扩展交错树的具体过程。

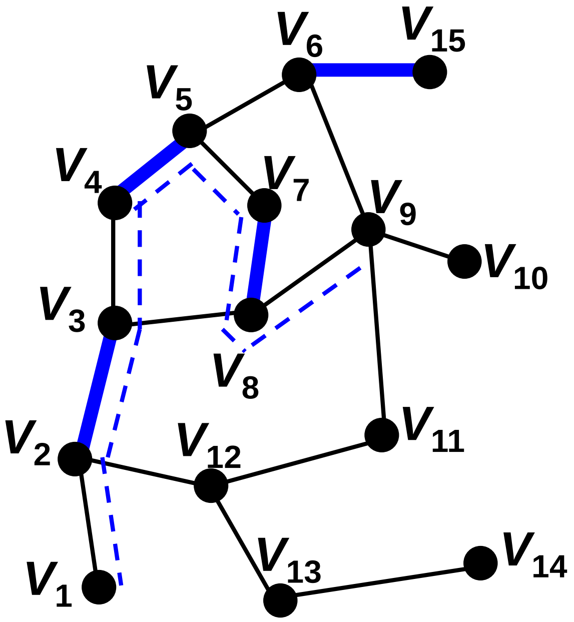


对于图(e)所示的交错树，不能再用上述方法扩大了，因为找不到一条不属于T的边e，这条边与T的某个外点关联，且e的另一个端点V_k也不属于T。

但能不能就此断定以V1为一端的可增广轨一定不存在呢？答案是否定的(见下页)。



(e)



(f)

对于图(e)中的交错树，已经无法扩大了，但以V1为一端的可增广轨是存在的。在图(f)中用虚线标出的(V_1,V_2,V_3,V_4,V_5,V_7,V_8,V_9)就是一条连接V_1和V_9的可增广轨。

二分图的最大匹配

求二部图的最大匹配的算法有：

1. **网络流**
   1. **其中dinic为 O(Msqrt(N))**
2. **匈牙利算法**
   1. **O(MN)**
   2. **代码量最小，要求掌握**
3. **Hopcroft-Karp算法(匈牙利算法的改进)**
   1. **O(Msqrt(N))**

练习题

- 设二分图结点数为N，二分图最大匹配数为F。思考以下问题:
  - 求二分图的最大边独立集大小。
  - 二分图有多少个不饱和点?
  - 求二分图的最小边覆盖集大小。
  - 求二分图的最小点覆盖集大小。
  - 求二分图的最大点独立集大小。

棋盘问题

- 在8X8的国际象棋棋盘，扣去左上角和右下角两个1X1的方格后，所有的格子是否能用1X2的长方形恰好填满？

棋盘问题

- 在8X8的国际象棋棋盘，扣去左上角和右下角两个1X1的方格后，所有的格子是否能用1X2的长方形恰好填满？

- 将棋盘染成黑白相间，构成一个二分图。
- 注意到黑色格子的数目不等于白色格子的数目。
- 说明该二部图不存在完美匹配。

棋盘问题

- 一个 N*M 的棋盘上某些格子上有障碍。
- 现在我们想用1*2和2*1的方块填满棋盘。判断是否存在一种方案将棋盘填满。
- 1<=N,M<=40

Knights of the Round Table

- 黑白染色找奇环，判定二分图。

二分图游戏

- 两个人在二分图G上做游戏，方法就是交替地选择不同的顶点vo,v1,v2,...,使得对于每个j>0,vj相邻语vj-1，最后一个取点者得胜（不一定选完所有得顶点，选到不能选为止）
- 每个顶点只能选一次
- 问先手是否有必胜策略？

- 第一个人有得胜策略当且仅当G中无完美匹配
- 证明:
  - 不妨设G是连通的，否则对G的每个连通分支进行讨论。

充分性

- 图有不饱和点(未盖点)时，先手有优胜策略。
- 优胜策略:
  - 第一步先手先选不饱和点，后面的走法：每次走匹配边即可。

必要性

- 设第一个选点人为甲，第二个选点人为乙。用反证法。
- 假设G中存在完美匹配M，则G中每个顶点都是饱和点。
- 甲选v0后，乙选v1，使得(v0, v1)∈M，若甲不能再选点，则乙胜；否则甲取v2，此时(v1, v2)不属于M，乙一定能取点v3，使得(v2, v3)∈M，若甲不能再选点，则乙胜；
- 否则甲无论怎样取到与v3相邻的v4，都有(v3, v4)不属于M，乙必定能取到点v5，
- 使得(v4, v5)∈M，这样继续下去…

- 或者，乙取到某个vi，使得(vi-1, vi)∈M，甲无法取点了；或者乙取完最后一个顶点。总之是乙胜，这与甲有得胜策略相矛盾。

- 因此，只有当G中无完美匹配时，第一个人才可能有得胜策略。