数论反演

zms

December 30, 2016

大家好啊

大家好啊

- 今天讲的会不那么简单（$\geq$省选难度)

大家好啊

- 今天讲的会不那么简单（$\geq$省选难度)
- 也许需要一点数学基础

大家好啊

- 今天讲的会不那么简单（$\geq$省选难度)
- 也许需要一点数学基础
- 建议拿张草稿纸

大家好啊

- 今天讲的会不那么简单（$\geq$省选难度)
- 也许需要一点数学基础
- 建议拿张草稿纸
- 还有一个*flag*

问题

求质数

输出$[1, n]$中的所有质数

subtask1 $n \leq 10^5$

问题

求质数

输出$[1, n]$中的所有质数
subtask1 $n \le 10^5$
subtask2 $n \le 10^7$

问题

求质数

输出$[1, n]$中的所有质数
subtask1 $n \leq 10^5$
subtask2 $n \leq 10^7$

第一个问题可以 $O(nlgn)$ 解决

算法流程

现在我们希望能有一种线性的做法（筛法）。

算法流程

现在我们希望能有一种线性的做法（筛法）。
首先，每一个数的最小质因子是唯一的。（显然）

算法流程

现在我们希望能有一种线性的做法（筛法）。
首先，每一个数的最小质因子是唯一的。（显然）
思考如何线性求出每个数的最小质因子。记为F_i

算法流程

现在我们希望能有一种线性的做法（筛法）。
首先，每一个数的最小质因子是唯一的。（显然）
思考如何线性求出每个数的最小质因子。记为F_i
从小到大枚举，当前枚举到i，若F_i尚未求出，则其为质数。

算法流程

现在我们希望能有一种线性的做法（筛法）。
首先，每一个数的最小质因子是唯一的。（显然）
思考如何线性求出每个数的最小质因子。记为F_i
从小到大枚举，当前枚举到i，若F_i尚未求出，则其为质数。
否则，枚举$P_j < F_i$，显然有 $F_{i*P_j} = P_j$

算法流程

现在我们希望能有一种线性的做法（筛法）。
首先，每一个数的最小质因子是唯一的。（显然）
思考如何线性求出每个数的最小质因子。记为F_i
从小到大枚举，当前枚举到i，若F_i尚未求出，则其为质数。
否则，枚举$P_j < F_i$, 显然有 $F_{i*P_j} = P_j$
这样每个数有且仅有一次被计算到

关键代码

```
void init(int n){
  for(int i=2; i<=n; ++i){
    if(!vis[i]) p[pcnt++]=i;
    for(int j=0; j<pcnt&&p[j]*i<=n; ++j){
      vis[p[j]*i]=1;
      if(i%p[j]==0) break;
    }
  }
}
```

定义

在数论上，算术函数（或称数论函数）指定义域为正整数、陪域为复数的函数，每个算术函数都可视为复数的序列。
最重要的算术函数是积性及加性函数。算术函数的最重要操作为狄利克雷卷积，对于算术函数集，以它为乘法，一般函数加法为加法，可以得到一个阿贝尔环。

例子

其实我也不知道上一页在说啥。

例子

其实我也不知道上一页在说啥。
举些例子吧。

例子

其实我也不知道上一页在说啥。
举些例子吧。

- 欧拉函数Φ

例子

其实我也不知道上一页在说啥。
举些例子吧。

- 欧拉函数Φ
- 莫比乌斯函数μ

例子

其实我也不知道上一页在说啥。
举些例子吧。

- 欧拉函数Φ
- 莫比乌斯函数μ
- 元函数e

例子

其实我也不知道上一页在说啥。
举些例子吧。

- 欧拉函数Φ
- 莫比乌斯函数μ
- 元函数e
- 除数函数$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$

例子

其实我也不知道上一页在说啥。
举些例子吧。

- 欧拉函数Φ
- 莫比乌斯函数μ
- 元函数e
- 除数函数$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$
- 恒等函数I 单位函数Id 等等

积性函数

若$f(n)$为数论函数，且$f(1)=1$，
对于互质的正整数p,q有$f(p*q)=f(p)*f(q)$，
则称其为积性函数。
若$f(n)$为积性函数，且对于任意正整数p,q
都有$f(p*q)=f(p)*f(q)$，
则称其为完全积性函数。

积性函数

若$f(n), g(n)$均为积性函数，
则$h(n) = f(n)g(n)$也为积性函数

定义式

狄利克雷卷积
对于数论函数f, g 令其卷积为h

$$h(n) = (f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d}) \tag{1}$$

性质

- 结合律 $(f * g) * h = f * (g * h)$
- 交换律 $f * g = g * f$
- 分配律 $f * (g + h) = f * g + f * h$

性质

- 结合律 $(f*g)*h = f*(g*h)$
- 交换律 $f*g = g*f$
- 分配律 $f*(g+h) = f*g + f*h$

若$f(n)g(n)$均为积性函数，
则$h(n) = (f*g)(n)$也为积性函数

单位元

元函数 $e(n) = [n = 1]$
对任意数论函数f,满足 $f * e = f$

定义

以下二式互为充要条件

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \tag{2}$$

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f(\frac{n}{d}) \tag{3}$$

证明

只需要证明 $\mu * I = e$ 即可

证明

只需要证明 $\mu * I = e$ 即可

$n = 1$时，显然成立

证明

只需要证明 $\mu * I = e$ 即可
$n = 1$时，显然成立
$n > 1$时，对于所有$d \mid n$且 $\mu(d)! = 0$
根据是否含有n的最小质因子（任选一个质因子皆可）
能恰好将 $\mu(d)$ 两两正负配对
那么和为零

经典公式

$Id = \Phi * I$

即 $n = \sum_{d|n} \Phi(d)$

经典公式

$Id = \Phi * I$

即 $n = \sum_{d|n} \Phi(d)$

将 $\frac{i}{n}$ 化为最简分数分类统计

重点

请务必理解并记住这两个式子!

$$n = \sum_{d|n} \phi(d) \tag{4}$$

$$[n = 1] = \sum_{d|n} \mu(d) \tag{5}$$

在oi中有许多与反演有关的数论题目
需要利用到以上线性筛及莫比乌斯反演相关知识
今天粗略选了一些问题和大家分享
下来还需要多加练习

声明

答案均默认向一个质数取模

经典问题

10^4次询问，每次给出n, m,求
$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} gcd(i,j)$
$1 \le n \le m \le 10^7$

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} gcd(i,j)$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} gcd(i,j)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d|gcd(i,j)} \phi(d)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} gcd(i,j)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d|gcd(i,j)}\phi(d)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{n}[d \mid i][d \mid j]\phi(d)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} gcd(i,j)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d|gcd(i,j)}\phi(d)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{n}[d\mid i][d\mid j]\phi(d)$$
$$=\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}\phi(d)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} gcd(i,j)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d|gcd(i,j)} \phi(d)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{n} [d \mid i][d \mid j]\phi(d)$$
$$= \sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{d} \rfloor} \phi(d)$$
$$= \sum_{d=1}^{n} \phi(d)\lfloor \frac{n}{d} \rfloor \lfloor \frac{m}{d} \rfloor$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} gcd(i,j)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d|gcd(i,j)}\phi(d)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{n}[d\mid i][d\mid j]\phi(d)$$
$$=\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}\phi(d)$$
$$=\sum_{d=1}^{n}\phi(d)\lfloor\frac{n}{d}\rfloor\lfloor\frac{m}{d}\rfloor$$

$\lfloor\frac{n}{d}\rfloor$ 只有 $\sqrt{n}$ 个不同的取值。

又一个经典问题

10^4次询问，每次给出n, m,求
$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[gcd(i,j)=1]$
$1 \leq n \leq m \leq 10^7$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[gcd(i,j)=1]$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[gcd(i,j)=1]$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d|gcd(i,j)}\mu(d)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[gcd(i,j)=1]$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d|gcd(i,j)}\mu(d)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{n}[d\mid i][d\mid j]\mu(d)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[gcd(i,j)=1]$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d|gcd(i,j)}\mu(d)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{n}[d\mid i][d\mid j]\mu(d)$$
$$=\sum_{d=1}^{n}\mu(d)\lfloor\frac{n}{d}\rfloor\lfloor\frac{m}{d}\rfloor$$

jzptab

10^4次询问，每次给出n, m,求
$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} lcm(i,j)$
$1 \leq n \leq m \leq 10^7$

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} lcm(i,j)$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} lcm(i,j)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{n}[gcd(i,j)=d]\frac{ij}{d}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} lcm(i,j)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{n}[gcd(i,j)=d]\frac{ij}{d}$$
$$=\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}[gcd(i,j)=1]ijd$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} lcm(i,j)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{n}[gcd(i,j)=d]\frac{ij}{d}$$
$$=\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}[gcd(i,j)=1]ijd$$
$$=\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor} ij\sum_{dd=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}[dd \mid gcd(i,j)]\mu(dd)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} lcm(i,j)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{n}[gcd(i,j)=d]\frac{ij}{d}$$
$$=\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}[gcd(i,j)=1]ijd$$
$$=\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor} ij\sum_{dd=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}[dd \mid gcd(i,j)]\mu(dd)$$
$$=\sum_{d=1}^{n}\sum_{dd=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d*dd}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d*dd}\rfloor} ij*dd^2\mu(dd)$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} lcm(i,j)\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{n}[gcd(i,j)=d]\frac{ij}{d}\\
&=\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}[gcd(i,j)=1]ijd\\
&=\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor} ij\sum_{dd=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}[dd \mid gcd(i,j)]\mu(dd)\\
&=\sum_{d=1}^{n}\sum_{dd=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d*dd}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d*dd}\rfloor} ij*dd^2\mu(dd)\\
&=\sum_{d=1}^{n} d\sum_{dd=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\mu(dd)dd^2\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d*dd}\rfloor} i\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d*dd}\rfloor} j
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} lcm(i,j) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{n}[gcd(i,j)=d]\frac{ij}{d} \\
&= \sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{d} \rfloor}[gcd(i,j)=1]ijd \\
&= \sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{d} \rfloor} ij \sum_{dd=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor}[dd \mid gcd(i,j)]\mu(dd) \\
&= \sum_{d=1}^{n}\sum_{dd=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor}\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d*dd} \rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{d*dd} \rfloor} ij * dd^2\mu(dd) \\
&= \sum_{d=1}^{n} d \sum_{dd=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor}\mu(dd)dd^2 \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d*dd} \rfloor} i \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{d*dd} \rfloor} j
\end{aligned}
$$

令$t = d * dd, S(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n*(n+1)}{2}$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} lcm(i,j) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{n}[gcd(i,j)=d]\frac{ij}{d} \\
&= \sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}[gcd(i,j)=1]ijd \\
&= \sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor} ij\sum_{dd=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}[dd \mid gcd(i,j)]\mu(dd) \\
&= \sum_{d=1}^{n}\sum_{dd=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d*dd}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d*dd}\rfloor} ij*dd^2\mu(dd) \\
&= \sum_{d=1}^{n} d\sum_{dd=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\mu(dd)dd^2\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d*dd}\rfloor} i\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d*dd}\rfloor} j \\
&\text{令} t = d*dd, S(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n*(n+1)}{2} \\
&= \sum_{t=1}^{n}\sum_{d|t} d\mu(\lfloor\frac{t}{d}\rfloor)\frac{t^2}{d^2}*S(\lfloor\frac{n}{t}\rfloor)*S(\lfloor\frac{m}{t}\rfloor)
\end{aligned}
$$

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} lcm(i,j)$
$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{n}[gcd(i,j)=d]\frac{ij}{d}$
$=\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}[gcd(i,j)=1]ijd$
$=\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor} ij\sum_{dd=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}[dd \mid gcd(i,j)]\mu(dd)$
$=\sum_{d=1}^{n}\sum_{dd=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d*dd}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d*dd}\rfloor} ij*dd^2\mu(dd)$
$=\sum_{d=1}^{n} d\sum_{dd=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\mu(dd)dd^2\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d*dd}\rfloor} i\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d*dd}\rfloor} j$
令$t=d*dd, S(n)=\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n*(n+1)}{2}$
$=\sum_{t=1}^{n}\sum_{d|t} d\mu(\lfloor\frac{t}{d}\rfloor)\frac{t^2}{d^2}*S(\lfloor\frac{n}{t}\rfloor)*S(\lfloor\frac{m}{t}\rfloor)$
$g(t)=\sum_{d|t}\frac{t^2}{d}\mu(\frac{t}{d})$为积性函数，可以线性筛预处理。
同上题可以分块统计答案。

最最基础题的题讲完了。
休息一下。

hdu5382 GCD?LCM!

10^5组询问，给出n,求$S(n)$

$F(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [lcm(i,j) + gcd(i,j) \geq n]$

$S(n) = \sum_{i=1}^{n} F(i)$

$1 \leq n \leq 10^6$

令$G(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [lcm(i,j) + gcd(i,j) = n]$

令 $G(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [lcm(i,j) + gcd(i,j) = n]$
则有 $F(n) = F(n-1) + 2 * n - 1 - G(n-1)$

令$G(n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[lcm(i,j) + gcd(i,j) = n]$
则有 $F(n) = F(n-1) + 2 * n - 1 - G(n-1)$
$G(n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[lcm(i,j) + gcd(i,j) = n]$

令$G(n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[lcm(i,j)+gcd(i,j)=n]$
则有 $F(n)=F(n-1)+2*n-1-G(n-1)$
$G(n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[lcm(i,j)+gcd(i,j)=n]$
$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{d=1}^{n}[gcd(i,j)=d][\frac{ij}{d}+d=n]$

令$G(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [lcm(i,j) + gcd(i,j) = n]$
则有 $F(n) = F(n-1) + 2*n - 1 - G(n-1)$
$G(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [lcm(i,j) + gcd(i,j) = n]$
$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{d=1}^{n} [gcd(i,j) = d][\frac{ij}{d} + d = n]$
$= \sum_{d=1}^{n} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} [gcd(i,j) = 1][(ij+1)d = n]$

令$G(n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[lcm(i,j)+gcd(i,j)=n]$

则有 $F(n)=F(n-1)+2*n-1-G(n-1)$

$G(n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[lcm(i,j)+gcd(i,j)=n]$

$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{d=1}^{n}[gcd(i,j)=d][\frac{ij}{d}+d=n]$

$=\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}[gcd(i,j)=1][(ij+1)d=n]$

$=\sum_{d|n}[ij+1=\frac{n}{d}][gcd(i,j)=1]$

令$G(n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[lcm(i,j)+gcd(i,j)=n]$
则有 $F(n)=F(n-1)+2*n-1-G(n-1)$
$G(n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[lcm(i,j)+gcd(i,j)=n]$
$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{d=1}^{n}[gcd(i,j)=d][\frac{ij}{d}+d=n]$
$=\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}[gcd(i,j)=1][(ij+1)d=n]$
$=\sum_{d|n}[ij+1=\frac{n}{d}][gcd(i,j)=1]$
令$t(x)=\sum_{i}\sum_{j}[ij=x][gcd(i,j)=1]$,可以发现$t(x)=2^k$,$k$为$x$的不同质因子个数。（同种质数只能分到$i,j$的一边）
线性筛预处理t，枚举倍数计算f

杜教筛

据传这是dyh（cf id：TooDifficult）从Euler Project引入的黑科技。
比较具体的学习资料可以在tangjz的博客中找到。
我们先通过一个朴素的问题感受一下这个方法。

经典问题

$\sum_{i=1}^{n} \mu(i)$

$1 \leq n \leq 10^9$

令$f(n) = \mu(n)$,我们要求的就是$\sum_{i=1}^{n} f(i)$

令$f(n)=\mu(n)$,我们要求的就是$\sum_{i=1}^{n} f(i)$
令$h=f*I$,即$h(n)=\sum_{d|n} f(d)*I(\frac{n}{d})=[n=1]$

令$f(n)=\mu(n)$,我们要求的就是$\sum_{i=1}^{n}f(i)$
令$h=f*I$,即$h(n)=\sum_{d|n}f(d)*I(\frac{n}{d})=[n=1]$
现在考虑计算$s(n)=\sum_{i=1}^{n}h(i)$,显然$s(n)=1$

令$f(n)=\mu(n)$,我们要求的就是$\sum_{i=1}^{n}f(i)$
令$h=f*I$,即$h(n)=\sum_{d|n}f(d)*I(\frac{n}{d})=[n=1]$
现在考虑计算$s(n)=\sum_{i=1}^{n}h(i)$,显然$s(n)=1$
同时，我们不利用函数f的具体定义，我们可以得到
$s(n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{d|i}f(d)*I(\frac{n}{d})$

令$f(n)=\mu(n)$,我们要求的就是$\sum_{i=1}^{n} f(i)$
令$h=f*I$,即$h(n)=\sum_{d|n} f(d)*I(\frac{n}{d})=[n=1]$
现在考虑计算$s(n)=\sum_{i=1}^{n} h(i)$,显然$s(n)=1$
同时，我们不利用函数f的具体定义，我们可以得到
$s(n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{d|i} f(d)*I(\frac{n}{d})$
$=\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor} f(d)$

令$f(n) = \mu(n)$,我们要求的就是$\sum_{i=1}^{n} f(i)$
令$h = f * I$,即$h(n) = \sum_{d|n} f(d) * I(\frac{n}{d}) = [n = 1]$
现在考虑计算$s(n) = \sum_{i=1}^{n} h(i)$,显然$s(n) = 1$
同时，我们不利用函数f的具体定义，我们可以得到
$s(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{d|i} f(d) * I(\frac{n}{d})$
$= \sum_{d=1}^{n} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} f(d)$
$= \sum_{d=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} [i \leq \lfloor \frac{n}{d} \rfloor] f(d)$

令$f(n)=\mu(n)$,我们要求的就是$\sum_{i=1}^{n} f(i)$
令$h=f*I$,即$h(n)=\sum_{d|n} f(d)*I(\frac{n}{d})=[n=1]$
现在考虑计算$s(n)=\sum_{i=1}^{n} h(i)$,显然$s(n)=1$
同时，我们不利用函数f的具体定义，我们可以得到
$s(n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{d|i} f(d)*I(\frac{n}{d})$
$=\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor} f(d)$
$=\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}[i\leq\lfloor\frac{n}{d}\rfloor]f(d)$
$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{d=1}^{n}[d\leq\lfloor\frac{n}{i}\rfloor]f(d)$

令$f(n)=\mu(n)$,我们要求的就是$\sum_{i=1}^{n}f(i)$
令$h=f*I$,即$h(n)=\sum_{d|n}f(d)*I(\frac{n}{d})=[n=1]$
现在考虑计算$s(n)=\sum_{i=1}^{n}h(i)$,显然$s(n)=1$
同时，我们不利用函数f的具体定义，我们可以得到
$s(n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{d|i}f(d)*I(\frac{n}{d})$
$=\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}f(d)$
$=\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}[i\leq\lfloor\frac{n}{d}\rfloor]f(d)$
$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{d=1}^{n}[d\leq\lfloor\frac{n}{i}\rfloor]f(d)$
$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{d=1}^{\lfloor\frac{n}{i}\rfloor}f(d)$

令$f(n)=\mu(n)$,我们要求的就是$\sum_{i=1}^{n} f(i)$
令$h=f*I$,即$h(n)=\sum_{d|n} f(d)*I(\frac{n}{d})=[n=1]$
现在考虑计算$s(n)=\sum_{i=1}^{n} h(i)$,显然$s(n)=1$
同时，我们不利用函数f的具体定义，我们可以得到
$s(n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{d|i} f(d)*I(\frac{n}{d})$
$=\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor} f(d)$
$=\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}[i\le\lfloor\frac{n}{d}\rfloor]f(d)$
$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{d=1}^{n}[d\le\lfloor\frac{n}{i}\rfloor]f(d)$
$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{d=1}^{\lfloor\frac{n}{i}\rfloor} f(d)$
$=\sum_{d=1}^{n} f(d)+\sum_{i=2}^{n}\sum_{d=1}^{\lfloor\frac{n}{i}\rfloor} f(d)$
第一部分为我们要求的答案，等式左侧的值$s(n)=1$已知，第二部分可以分块递归计算。

套路

杜教筛其实就是一个套路。
一般的，我们希望求$ans = \sum_{i=1}^{n} f(i)$

套路

杜教筛其实就是一个套路。
一般的，我们希望求$ans = \sum_{i=1}^{n} f(i)$
于是,我们**构造一个精巧的函数**$g(n)$,并令$h = f * g$

套路

杜教筛其实就是一个套路。
一般的，我们希望求$ans = \sum_{i=1}^{n} f(i)$
于是,我们**构造一个精巧的函数**$g(n)$,并令$h = f * g$
使得$\sum_{i=1}^{n} h(i)$的值可以在可接受的时间内求到。

套路

杜教筛其实就是一个套路。
一般的，我们希望求$ans = \sum_{i=1}^{n} f(i)$
于是,我们**构造一个精巧的函数**$g(n)$,并令$h = f * g$
使得$\sum_{i=1}^{n} h(i)$的值可以在可接受的时间内求到。
然后利用上页后半部分的推导，把原问题递归解决。

套路

杜教筛其实就是一个套路。
一般的，我们希望求$ans = \sum_{i=1}^{n} f(i)$
于是,我们**构造一个精巧的函数**$g(n)$,并令$h = f * g$
使得$\sum_{i=1}^{n} h(i)$的值可以在可接受的时间内求到。
然后利用上页后半部分的推导，把原问题递归解决。
难点在于找$g(n)$

变式

$\sum_{i=1}^{n} \phi(i) * i$
$1 \leq n \leq 10^9$

令$g(n) = Id(n) = n$

$h(n) = \sum_{d|n} f(d) * g(\frac{n}{d}) = n \sum_{d|n} \phi(d) = n^2$

令$g(n) = Id(n) = n$

$h(n) = \sum_{d|n} f(d) * g(\frac{n}{d}) = n \sum_{d|n} \phi(d) = n^2$

$\sum_{i=1}^{n} h(i) = \frac{n*(n+1)*(2n+1)}{6}$

令$g(n) = Id(n) = n$
$h(n) = \sum_{d|n} f(d) * g(\frac{n}{d}) = n \sum_{d|n} \phi(d) = n^2$
$\sum_{i=1}^{n} h(i) = \frac{n*(n+1)*(2n+1)}{6}$
$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{d|i} f(d) * g(\frac{i}{d})$

令$g(n) = Id(n) = n$
$h(n) = \sum_{d|n} f(d) * g(\frac{n}{d}) = n \sum_{d|n} \phi(d) = n^2$
$\sum_{i=1}^{n} h(i) = \frac{n*(n+1)*(2n+1)}{6}$
$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{d|i} f(d) * g(\frac{i}{d})$
$= \sum_{d=1}^{n} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} f(d) * g(i)$

令$g(n) = Id(n) = n$

$h(n) = \sum_{d|n} f(d) * g(\frac{n}{d}) = n \sum_{d|n} \phi(d) = n^2$

$\sum_{i=1}^{n} h(i) = \frac{n*(n+1)*(2n+1)}{6}$

$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{d|i} f(d) * g(\frac{i}{d})$

$= \sum_{d=1}^{n} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} f(d) * g(i)$

$= \sum_{d=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} [i \leq \lfloor \frac{n}{d} \rfloor] f(d) * g(i)$

$$
\begin{aligned}
&令 g(n) = Id(n) = n \\
&h(n) = \sum_{d|n} f(d) * g(\tfrac{n}{d}) = n \sum_{d|n} \phi(d) = n^2 \\
&\sum_{i=1}^{n} h(i) = \tfrac{n*(n+1)*(2n+1)}{6} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{d|i} f(d) * g(\tfrac{i}{d}) \\
&= \sum_{d=1}^{n} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} f(d) * g(i) \\
&= \sum_{d=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} [i \le \lfloor \tfrac{n}{d} \rfloor] f(d) * g(i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{d=1}^{n} [d \le \lfloor \tfrac{n}{i} \rfloor] f(d) * g(i)
\end{aligned}
$$

令$g(n) = Id(n) = n$

$h(n) = \sum_{d|n} f(d) * g(\frac{n}{d}) = n \sum_{d|n} \phi(d) = n^2$

$\sum_{i=1}^{n} h(i) = \frac{n*(n+1)*(2n+1)}{6}$

$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{d|i} f(d) * g(\frac{i}{d})$

$= \sum_{d=1}^{n} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} f(d) * g(i)$

$= \sum_{d=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} [i \le \lfloor \frac{n}{d} \rfloor] f(d) * g(i)$

$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{d=1}^{n} [d \le \lfloor \frac{n}{i} \rfloor] f(d) * g(i)$

$= \sum_{i=1}^{n} g(i) \sum_{d=1}^{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor} f(d)$

令$g(n)=Id(n)=n$

$h(n)=\sum_{d|n}f(d)*g(\frac{n}{d})=n\sum_{d|n}\phi(d)=n^2$

$\sum_{i=1}^{n}h(i)=\frac{n*(n+1)*(2n+1)}{6}$

$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{d|i}f(d)*g(\frac{i}{d})$

$=\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}f(d)*g(i)$

$=\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}[i\le\lfloor\frac{n}{d}\rfloor]f(d)*g(i)$

$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{d=1}^{n}[d\le\lfloor\frac{n}{i}\rfloor]f(d)*g(i)$

$=\sum_{i=1}^{n}g(i)\sum_{d=1}^{\lfloor\frac{n}{i}\rfloor}f(d)$

$=\sum_{d=1}^{n}f(d)+\sum_{i=2}^{n}g(i)\sum_{d=1}^{\lfloor\frac{n}{i}\rfloor}f(d)$

令$g(n)=Id(n)=n$
$h(n)=\sum_{d|n}f(d)*g(\frac{n}{d})=n\sum_{d|n}\phi(d)=n^2$
$\sum_{i=1}^{n}h(i)=\frac{n*(n+1)*(2n+1)}{6}$
$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{d|i}f(d)*g(\frac{i}{d})$
$=\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}f(d)*g(i)$
$=\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}[i\leq\lfloor\frac{n}{d}\rfloor]f(d)*g(i)$
$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{d=1}^{n}[d\leq\lfloor\frac{n}{i}\rfloor]f(d)*g(i)$
$=\sum_{i=1}^{n}g(i)\sum_{d=1}^{\lfloor\frac{n}{i}\rfloor}f(d)$
$=\sum_{d=1}^{n}f(d)+\sum_{i=2}^{n}g(i)\sum_{d=1}^{\lfloor\frac{n}{i}\rfloor}f(d)$
$g(n)$的前缀和是易求的，问题解决。

再讲一道不是那么裸的题吧。

$FR\#1 flower's divisor$

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_1(ij)$

$1 \le n \le 10^9$

我们主要的目标，是将$i * j$分离。

我们主要的目标，是将$i * j$分离。

$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{d=1}^{n^2} [d \mid ij] d$

我们主要的目标，是将$i*j$分离。

$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{d=1}^{n^2}[d \mid ij]d$

$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{d=1}^{n^2}[\frac{d}{gcd(d,i)} \mid j]d$

我们主要的目标，是将$i * j$分离。

$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{d=1}^{n^2} [d \mid ij] d$

$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{d=1}^{n^2} [\frac{d}{gcd(d,i)} \mid j] d$

$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{d=1}^{n^2} \lfloor \frac{n * gcd(i,d)}{d} \rfloor d$

我们主要的目标，是将$i*j$分离。

$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{d=1}^{n^2}[d \mid ij]d$

$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{d=1}^{n^2}[\frac{d}{gcd(d,i)} \mid j]d$

$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{d=1}^{n^2}\lfloor\frac{n*gcd(i,d)}{d}\rfloor d$

$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{d=1}^{n^2}[gcd(i,d)=k]\lfloor\frac{nk}{d}\rfloor d$

我们主要的目标，是将$i*j$分离。

$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{d=1}^{n^2}[d \mid ij]d$

$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{d=1}^{n^2}[\frac{d}{gcd(d,i)} \mid j]d$

$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{d=1}^{n^2}\lfloor\frac{n*gcd(i,d)}{d}\rfloor d$

$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{d=1}^{n^2}[gcd(i,d)=k]\lfloor\frac{nk}{d}\rfloor d$

$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor}\sum_{d=1}^{\lfloor\frac{n^2}{k}\rfloor}[gcd(i,d)=1]\lfloor\frac{n}{d}\rfloor dk$

我们主要的目标，是将$i*j$分离。

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{d=1}^{n^2}[d \mid ij]d\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{d=1}^{n^2}[\tfrac{d}{gcd(d,i)} \mid j]d\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{d=1}^{n^2}\lfloor\tfrac{n*gcd(i,d)}{d}\rfloor d\\
&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{d=1}^{n^2}[gcd(i,d)=k]\lfloor\tfrac{nk}{d}\rfloor d\\
&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor}\sum_{d=1}^{\lfloor\frac{n^2}{k}\rfloor}[gcd(i,d)=1]\lfloor\tfrac{n}{d}\rfloor dk\\
&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor}\sum_{d=1}^{n}[gcd(i,d)=1]\lfloor\tfrac{n}{d}\rfloor dk
\end{aligned}
$$

我们主要的目标，是将$i*j$分离。

$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{d=1}^{n^2} [d \mid ij] d$

$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{d=1}^{n^2} [\frac{d}{gcd(d,i)} \mid j] d$

$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{d=1}^{n^2} \lfloor \frac{n*gcd(i,d)}{d} \rfloor d$

$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{d=1}^{n^2} [gcd(i,d) = k] \lfloor \frac{nk}{d} \rfloor d$

$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} \sum_{d=1}^{\lfloor \frac{n^2}{k} \rfloor} [gcd(i,d) = 1] \lfloor \frac{n}{d} \rfloor dk$

$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} \sum_{d=1}^{n} [gcd(i,d) = 1] \lfloor \frac{n}{d} \rfloor dk$

$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor} \sum_{d=1}^{n} [gcd(i,d) = 1] \lfloor \frac{n}{d} \rfloor dk$

我们主要的目标，是将$i*j$分离。

$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{d=1}^{n^2}[d \mid ij]d$

$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{d=1}^{n^2}[\frac{d}{gcd(d,i)} \mid j]d$

$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{d=1}^{n^2}\lfloor\frac{n*gcd(i,d)}{d}\rfloor d$

$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{d=1}^{n^2}[gcd(i,d)=k]\lfloor\frac{nk}{d}\rfloor d$

$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor}\sum_{d=1}^{\lfloor\frac{n^2}{k}\rfloor}[gcd(i,d)=1]\lfloor\frac{n}{d}\rfloor dk$

$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor}\sum_{d=1}^{n}[gcd(i,d)=1]\lfloor\frac{n}{d}\rfloor dk$

$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{i}\rfloor}\sum_{d=1}^{n}[gcd(i,d)=1]\lfloor\frac{n}{d}\rfloor dk$

$= \sum_{i=1}^{n}S(\lfloor\frac{n}{i}\rfloor)\sum_{d=1}^{n}\lfloor\frac{n}{d}\rfloor d[gcd(i,d)=1]$

我们主要的目标，是将$i*j$分离。

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{d=1}^{n^2}[d\mid ij]d$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{d=1}^{n^2}[\frac{d}{gcd(d,i)}\mid j]d$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{d=1}^{n^2}\lfloor\frac{n*gcd(i,d)}{d}\rfloor d$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{d=1}^{n^2}[gcd(i,d)=k]\lfloor\frac{nk}{d}\rfloor d$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor}\sum_{d=1}^{\lfloor\frac{n^2}{k}\rfloor}[gcd(i,d)=1]\lfloor\frac{n}{d}\rfloor dk$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor}\sum_{d=1}^{n}[gcd(i,d)=1]\lfloor\frac{n}{d}\rfloor dk$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{i}\rfloor}\sum_{d=1}^{n}[gcd(i,d)=1]\lfloor\frac{n}{d}\rfloor dk$$
$$=\sum_{i=1}^{n}S(\lfloor\frac{n}{i}\rfloor)\sum_{d=1}^{n}\lfloor\frac{n}{d}\rfloor d[gcd(i,d)=1]$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor}S(\lfloor\frac{n}{ik}\rfloor)\sum_{d=1}^{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor}\lfloor\frac{n}{dk}\rfloor dk\mu(k)$$

我们主要的目标，是将$i*j$分离。

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{d=1}^{n^2}[d \mid ij]d \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{d=1}^{n^2}[\frac{d}{gcd(d,i)} \mid j]d \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{d=1}^{n^2}\lfloor\frac{n*gcd(i,d)}{d}\rfloor d \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{d=1}^{n^2}[gcd(i,d)=k]\lfloor\frac{nk}{d}\rfloor d \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor}\sum_{d=1}^{\lfloor\frac{n^2}{k}\rfloor}[gcd(i,d)=1]\lfloor\frac{n}{d}\rfloor dk \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor}\sum_{d=1}^{n}[gcd(i,d)=1]\lfloor\frac{n}{d}\rfloor dk \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{i}\rfloor}\sum_{d=1}^{n}[gcd(i,d)=1]\lfloor\frac{n}{d}\rfloor dk \\
&= \sum_{i=1}^{n}S(\lfloor\frac{n}{i}\rfloor)\sum_{d=1}^{n}\lfloor\frac{n}{d}\rfloor d[gcd(i,d)=1] \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor}S(\lfloor\frac{n}{ik}\rfloor)\sum_{d=1}^{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor}\lfloor\frac{n}{dk}\rfloor dk\mu(k) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\mu(k)k\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor}S(\lfloor\frac{n}{ik}\rfloor)\sum_{d=1}^{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor}\lfloor\frac{n}{dk}\rfloor d
\end{aligned}
$$

公式给的还是比较详细了，大家可以下来慢慢理解。

今天算是和大家初探了一下反演，以后也多交流讨论这方面的知识。

今天算是和大家初探了一下反演，以后也多交流讨论这方面的知识。
谢谢没有睡着的同学。