刚体动力学（Rigid Body Dynamics）

任　程

本文的内容由作者翻译整理了 Brian Vincent Mirtich 博士毕业论文“ Impulse-based dynamic simulation of rigid body systems,1996 ”的附录而来。

本文并不系统讲解刚体动力学，却旨在提纲挈领的讲解在学习刚体动力学（Rigid Body Dynamics）的过程中的几个十分关键的问题。其中第 1 节介绍向量、*矩阵*在不同坐标系间的转换及其作用，第 2 节介绍用矩阵表示的向量叉积并利用其表述*矩阵的求导*运算，第 3 节利用 1、2 节的内容进一步导出实用的*动力学公式*，说明了为何物理书中的刚体动力学公式形式有 $\boldsymbol{\tau}(t)=\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}}(t)$ 和 $\boldsymbol{\tau}(t)=\mathbf{I}\boldsymbol{\alpha}(t)+\boldsymbol{\omega}(t)\times\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}(t)$ 两种情形，而在实际情况（如机器人领域、计算机图形与动画领域）中使用的经常为 $\boldsymbol{\tau}(t)=\mathbf{I}\boldsymbol{\alpha}(t)+\boldsymbol{\omega}(t)\times\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}(t)$ 。

阅读本文前您需要已经具备最基本的向量、矩阵的知识，并已经知道基本的牛顿力学定律 $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ 。

1. 向量、矩阵、坐标系

本文中，一个坐标系指右手方向的三维坐标系，其三个基准轴向量 i,j,k 相互正交，满足 $i\times j=k$ 。

我们经常要将某向量在一个坐标系下的坐标转换到另一个坐标系下。例如对于一个向量 $\mathbf{v}$ ，设 3×1 列向量 $\mathbf{v}_f$ 表示其在坐标系 F （坐标系常以大写斜体字母表示）下的坐标，3×1 列向量 $\mathbf{v}_g$ 表示其在坐标系 G 下的坐标。如果我们以三个 3×1 列向量 $\mathbf{r}_x,\mathbf{r}_y,\mathbf{r}_z$ 分别表示坐标系 F 的基准轴 i,j,k 在坐标系 G 下的坐标。则有坐标转换公式：

$$\mathbf{v}_g=\begin{bmatrix}\mathbf{r}_x & \mathbf{r}_y & \mathbf{r}_z\end{bmatrix}\mathbf{v}_f=\mathbf{R}\mathbf{v}_f$$

其中 3×3 的矩阵 $\mathbf{R}$ 为一个旋转矩阵，它将向量 $\mathbf{v}$ 在坐标系 F 下的坐标转换为其在坐标系 G 下的坐标，此后本文中将称 $\mathbf{R}$ 为“由坐标系 F 到坐标系 G 的旋转矩阵”。一个旋转矩阵的各个列向量为单位向量（即长度为 1），且相互正交。此矩阵的各个行向量同样亦是如此。矩阵 $\mathbf{R}$ 的行列式（determinant）为 1，且 $\mathbf{R}$ 的一个重要且十分常用的特征为

$$\mathbf{R}^{-1}=\mathbf{R}^{T} \tag{1.1}$$

式(1.1)在被广泛应用于快速计算 $\mathbf{R}^{-1}$ 。

除向量外，矩阵也经常要被变换到不同坐标系中以能够作用于不同坐标系下的向量坐标。例如，设向量$\boldsymbol{\omega}$和向量$\mathbf{L}$分别表示一个刚体“在相对于附着在其自身的局部坐标系下”的角速度（angular velocity）和角动量（angular momentum），则$\boldsymbol{\omega}$和$\mathbf{L}$的关系为

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$$

其中$\mathbf{I}$为一个3×3的质量矩阵（mass matrix）。对于如何得到公式$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$，及惯量$\mathbf{I}$的表示请参看相关力学书籍，或者参看 Online Siggraph 2001 Course Notes: “Physically based modeling”中 Rigid Body Dynamics 一节：
http://www.pixar.com/companyinfo/research/pbm2001/

现假设角速度和角动量被表示在另一个坐标系下，例如表示在空间中始终固定的全局坐标系下。设$\boldsymbol{\omega}_o$和$\mathbf{L}_o$分别为角速度和角动量在全局坐标系下的坐标，则此时这两个向量通过一个矩阵$\mathbf{I}_o$相联系，即$\mathbf{L}_o = \mathbf{I}_o\boldsymbol{\omega}_o$

则一个重要的关系式为：

$$\mathbf{I}_o = \mathbf{R}\mathbf{I}\mathbf{R}^T \tag{1.2}$$

其中$\mathbf{R}$是由刚体局部坐标系到全局坐标系的旋转矩阵。

$\mathbf{I}_o$如同$\mathbf{I}$一样代表着相同的映射关系，由$\mathbf{I}_o$和$\boldsymbol{\omega}_o$得到的角动量$\mathbf{L}_o$与由$\mathbf{I}$和$\boldsymbol{\omega}$得到的角动量$\mathbf{L}$相似，只是表示在不同的坐标系下：

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_o &= \mathbf{I}_o\boldsymbol{\omega}_o \\ &= (\mathbf{R}\mathbf{I}\mathbf{R}^T)(\mathbf{R}\boldsymbol{\omega}) \\ &= \mathbf{R}\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \\ &= \mathbf{R}\mathbf{L}\end{aligned}$$

2. 用矩阵表示向量叉积（cross products）

在一个向量空间$\mathbb{R}^3$，两个向量进行叉积$(\times)$可以得到另外一个向量：

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

式(2.1)可以用另一种方式表示：

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b}$$

其中$\tilde{\mathbf{a}}$是一个3×3的斜对称矩阵：

$$\tilde{\mathbf{a}}=\begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}$$

斜对称矩阵指矩阵具有性质：

$$\tilde{\mathbf{a}}^T=-\tilde{\mathbf{a}}$$

在动力学的公式表述中以矩阵的方式来表示向量叉积经常很有用。

设$\tilde{\mathbf{a}}_F$表示在坐标系F下“被向量$\mathbf{a}$施加叉积”的运算，$\tilde{\mathbf{a}}_G$表示在坐标系G下“被向量$\mathbf{a}$施加叉积”的运算。如果$\mathbf{R}$是由坐标系F到坐标系G旋转矩阵，则运算$\tilde{\mathbf{a}}_F$与$\tilde{\mathbf{a}}_G$的关系为：

$$\tilde{\mathbf{a}}_G=\mathbf{R}\tilde{\mathbf{a}}_F\mathbf{R}^T \tag{2.2}$$

$\tilde{\mathbf{a}}_G$与$\tilde{\mathbf{a}}_F$的不同仅在于它们作用于不同坐标系下。

矩阵求导：

叉积矩阵提供了一个很方便的渠道来表述一个矩阵的导数。

设坐标系B相对于一个惯性坐标系O进行旋转，角速度为$\boldsymbol{\omega}(t)$，旋转矩阵$\mathbf{R}(t)$为由坐标系B到坐标系O的旋转矩阵。如果$\boldsymbol{\omega}_o(t)$是角速度$\boldsymbol{\omega}(t)$在坐标系O下的坐标，$\boldsymbol{\omega}_b(t)$是角速度$\boldsymbol{\omega}(t)$在坐标系B下的坐标，则有矩阵的导数：

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{R}}&=\tilde{\boldsymbol{\omega}}_o\mathbf{R}\\ \dot{\mathbf{R}}&=\mathbf{R}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_b\end{aligned} \tag{2.3}$$

证明：设$\mathbf{r}$为固定在坐标系B中的一个向量，它随坐标系B一起在全局坐标框架O下旋转。以$\mathbf{r}_o$和$\mathbf{r}_b$分别表示$\mathbf{r}$在坐标系O和坐标系B下的坐标。则计算导数$\dot{\mathbf{r}}_o$有几种方式：

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_o&=\frac{d}{dt}(\mathbf{R}\mathbf{r}_b)=\dot{\mathbf{R}}\mathbf{r}_b+\mathbf{R}\dot{\mathbf{r}}_b=\dot{\mathbf{R}}\mathbf{r}_b\\ \dot{\mathbf{r}}_o&=\boldsymbol{\omega}_o\times\mathbf{r}_o=\boldsymbol{\omega}_o\times(\mathbf{R}\mathbf{r}_b)=\tilde{\boldsymbol{\omega}}_o\mathbf{R}\mathbf{r}_b\\ \dot{\mathbf{r}}_o&=\mathbf{R}(\boldsymbol{\omega}_b\times\mathbf{r}_b)=\mathbf{R}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_b\mathbf{r}_b\end{aligned}$$

因为三个式子彼此相等，故而可得

$$\dot{\mathbf{R}}\mathbf{r}_b = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_o \mathbf{R}\mathbf{r}_b = \mathbf{R}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_b \mathbf{r}_b \tag{2.4}$$

从而有式(2.3)。

3. 刚体动力学

作用在一个刚体上的所有外部影响可合成为作用在刚体质心的一个外力（force） $f(t)$ 和一个作用于刚体的外力矩（moment） $\boldsymbol{\tau}(t)$ 。

设 $\mathbf{r}(t)$ 为刚体质心（center of mass）的位置， m 为刚体质量（mass），根据牛顿第二定律，有

$$f(t) = \frac{d}{dt}\left[m\dot{\mathbf{r}}(t)\right] = m\ddot{\mathbf{r}}(t) \tag{3.1}$$

如果我们以 $\mathbf{v}(t)$ 表示质心的速度，则可将上式表述为一阶常微分方程（ordinary differential equation，ODE）：

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}(t) &= \mathbf{v}(t) \\ \dot{\mathbf{v}}(t) &= \frac{1}{m} f(t) \end{aligned} \tag{3.2}$$

对此微分方程进行数值积分，则可以求解出各个时刻质心的运动状态来。关于数值积分，请参看数值分析教材，或者 Online Siggraph 2001 Course Notes: “Physically based modeling” 中 Differential Equation Basics 一节：
http://www.pixar.com/companyinfo/research/pbm2001/

刚体运动的另一个成分为旋转。设 $\boldsymbol{\omega}_o(t)$ 为刚体的角速度， $\boldsymbol{\tau}_o(t)$ 为施加于刚体的力矩。则与式(3.1)相对应的公式为：

$$\boldsymbol{\tau}_o(t) = \frac{d}{dt}\left[\mathbf{I}_o(t)\boldsymbol{\omega}_o(t)\right] \tag{3.3}$$

$\mathbf{I}_o(t)$ 经常被称为质量矩阵（mass matrix）或者惯性张量（inertia tensor），其描述了刚体中的质量分配情况。

然而公式(3.3)仅在非旋转坐标系下成立，公式中 o 用以说明各个向量、矩阵都表示在非旋转坐标系下。由公式(1.2)有 $\mathbf{I}_o = \mathbf{R}\mathbf{I}\mathbf{R}^T$ ，其中 $\mathbf{I}$ 为刚体坐标系下的质量

矩阵，其描述了相对于原点在刚体质心、随刚体一起旋转的局部坐标系时刚体质量的分配情况，$\mathbf{I}$ 是一个*常量*对角阵。

设 $\mathbf{R}(t)$ 为由坐标系 B 到坐标系 O 的旋转矩阵，$\boldsymbol{\omega}(t)$ 和 $\boldsymbol{\tau}(t)$ 为刚体在坐标系 B 下的角速度和力矩坐标，则式(3.3)可重新表述为：

$$\begin{aligned}\mathbf{R}\tau(t) &= \frac{d}{dt}\left[\left(\mathbf{R}(t)\mathbf{I}\mathbf{R}^T(t)\right)\left(\mathbf{R}(t)\boldsymbol{\omega}(t)\right)\right] \\ &= \dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}(t) + \mathbf{R}(t)\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}}(t) \\ &= \mathbf{R}(t)\tilde{\boldsymbol{\omega}}(t)\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}(t) + \mathbf{R}(t)\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}}(t)\end{aligned}$$

等式两边同乘以 $\mathbf{R}^T(t)$，得

$$\tau(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}(t) + \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}}(t) \tag{3.4}$$

进而求解 $\dot{\boldsymbol{\omega}}(t)$ 得

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}(t) = \mathbf{I}^{-1}\left[-\tilde{\boldsymbol{\omega}}(t)\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}(t) + \boldsymbol{\tau}(t)\right] \tag{3.5}$$

将 $\mathbf{I}$ 的对角元素分别写为 I_x, I_y, I_z 后可得

$$\begin{bmatrix}\dot{\omega}_x(t) \\ \dot{\omega}_y(t) \\ \dot{\omega}_z(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{I_y - I_z}{I_x}\omega_y(t)\omega_z(t) \\ \frac{I_z - I_x}{I_y}\omega_z(t)\omega_x(t) \\ \frac{I_x - I_y}{I_z}\omega_x(t)\omega_y(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{\tau_x(t)}{I_x} \\ \frac{\tau_y(t)}{I_y} \\ \frac{\tau_z(t)}{I_z}\end{bmatrix} \tag{3.6}$$

式(3.5)、式(3.6)便是欧拉公式（Euler Equations），它描述了角速度相对于时间的变化情况。

通常平移方程与旋转方程被一起写出，称为牛顿欧拉公式（Newton-Euler equations）：

$$\begin{aligned}\sum \mathbf{f}(t) &= m\mathbf{a}(t) \\ \sum \boldsymbol{\tau}(t) &= \mathbf{I}\boldsymbol{\alpha}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}(t)\end{aligned} \tag{3.7}$$

其中 $\mathbf{a}(t)$ 表示线加速度，$\boldsymbol{\alpha}(t)$ 表示角加速度（角速度的导数），等式左边的求和符号表示公式中应该使用合外力与合外力矩。

公式(3.7)即为最重要的刚体动力学公式，至此本文结束。在下一篇文章中，我将基于公式(3.7)叙述机器人动力学（Robot Dynamics），机器人将被视为相互连接的多刚体组合。

据网友 bearworks 的评论，于 2011 年 9 月 19 日补充：

公式(3.3)和公式(3.4)分别给出了力矩计算的两个公式，其中公式(3.3)仅在非旋转坐标系（如全局坐标系）下成立，而公式(3.4)在旋转坐标系（如物体局部坐标系）中成立而且也是实际中经常采用的公式。在此我引用《游戏开发物理学》(David M Bourg 著,)一书中的话解释公式(3.4)更实用的原因：“当以全局坐标来计算时，转动惯量的大小会因物体的位置与方位而改变，这表示在模拟的过程中，必须不断地重新计算惯性矩阵（与反矩阵），这在计算上是很没有效率的。较好的方式是改写运动方程，使其中的项目为局部坐标，这样就只需在模拟开始时，计算一次所需的惯性矩阵（与反矩阵）即可”。