第七章　空间解析几何与向量代数

教学目的：

1、理解空间直角坐标系，理解向量的概念及其表示。

2、掌握向量的运算（线性运算、数量积、向量积、混合积），掌握两个向量垂直和平行的条件。

3、　理解单位向量、方向数与方向余弦、向量的坐标表达式，熟练掌握用坐标表达式进行向量运算的方法。

4、掌握平面方程和直线方程及其求法。

5、　会求平面与平面、平面与直线、直线与直线之间的夹角，并会利用平面、直线的相互关系（平行、垂直、相交等）解决有关问题。

6、会求点到直线以及点到平面的距离。

7、　理解曲面方程的概念，了解常用二次曲面的方程及其图形，会求以坐标轴为旋转轴的旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程。

8、了解空间曲线的参数方程和一般方程。

9、了解空间曲线在坐标平面上的投影，并会求其方程。

教学重点：

1、向量的线性运算、数量积、向量积的概念、向量运算及坐标运算；

2、两个向量垂直和平行的条件；

3、平面方程和直线方程；

4、平面与平面、平面与直线、直线与直线之间的相互位置关系的判定条件；

5、点到直线以及点到平面的距离；

6、常用二次曲面的方程及其图形；

7、旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程；

8、空间曲线的参数方程和一般方程。

教学难点：

1、向量积的向量运算及坐标运算；

2、平面方程和直线方程及其求法；

3、点到直线的距离；

4、二次曲面图形；

5、旋转曲面的方程；

§7. 1　向量及其线性运算

一、向量概念

向量：在研究力学、物理学以及其他应用科学时，常会遇到这样一类量，它们既有大小，又有

方向. 例如力、力矩、位移、速度、加速度等, 这一类量叫做向量.

在数学上, 用一条有方向的线段(称为有向线段)来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小, 有向线段的方向表示向量的方向.

向量的符号:

以 A 为起点、B 为终点的有向线段所表示的向量记作 $\overrightarrow{AB}$. 向量可用粗体字母表示, 也可用上加箭头书写体字母表示, 例如, $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$、$\vec{r}$、$\vec{v}$、$\vec{F}$.

自由向量: 由于一切向量的共性是它们都有大小和方向, 所以在数学上我们只研究与起点无关的向量, 并称这种向量为自由向量, 简称向量. 因此, 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等, 且方向相同, 则说向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是相等的, 记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 相等的向量经过平移后可以完全重合.

向量的模: 向量的大小叫做向量的模.

向量 $\boldsymbol{a}$、$\vec{a}$、$\overrightarrow{AB}$ 的模分别记为 $|\boldsymbol{a}|$、$|\vec{a}|$、$|\overrightarrow{AB}|$.

单位向量: 模等于 1 的向量叫做单位向量.

零向量: 模等于 0 的向量叫做零向量, 记作 $\boldsymbol{0}$ 或 $\vec{0}$. 零向量的起点与终点重合, 它的方向可以看作是任意的.

向量的平行: 两个非零向量如果它们的方向相同或相反, 就称这两个向量平行. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行, 记作 $\boldsymbol{a}\,//\,\boldsymbol{b}$. 零向量认为是与任何向量都平行.

当两个平行向量的起点放在同一点时, 它们的终点和公共的起点在一条直线上. 因此, 两向量平行又称两向量共线.

类似还有共面的概念. 设有 $k(k\geq 3)$ 个向量, 当把它们的起点放在同一点时, 如果 k 个终点和公共起点在一个平面上, 就称这 k 个向量共面.

二、向量的线性运算

1. 向量的加法

向量的加法: 设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$, 平移向量使 $\boldsymbol{b}$ 的起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合, 此时从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和, 记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, 即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

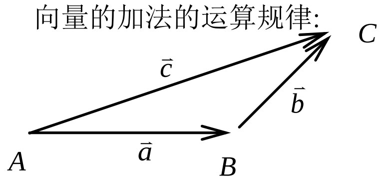
三角形法则:

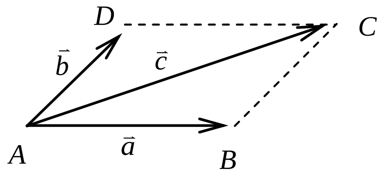
上述作出两向量之和的方法叫做向量加法的三角形法则.

平行四边形法则:

当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时, 平移向量使 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合, 以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边作一平行四边形, 从公共起点到对角的向量等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

向量的加法的运算规律:





(1)交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2)结合律$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

由于向量的加法符合交换律与结合律, 故 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n (n \geq 3)$相加可写成

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n,$$

并按向量相加的三角形法则, 可得 n 个向量相加的法则如下: 使前一向量的终点作为次一向量的起点, 相继作向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$, 再以第一向量的起点为起点, 最后一向量的终点为终点作一向量, 这个向量即为所求的和.

负向量:

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量, 与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的负向量, 记为$-\boldsymbol{a}$.

向量的减法:

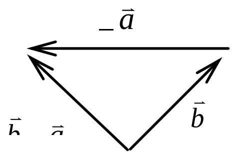
我们规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差为

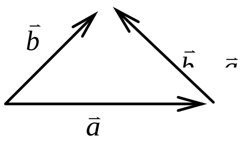
$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}).$$

即把向量$-\boldsymbol{a}$ 加到向量 $\boldsymbol{b}$ 上, 便得 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

特别地, 当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时, 有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$





显然, 任给向量 $\overrightarrow{AB}$ 及点 O, 有

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA},$$

因此, 若把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移到同一起点 O, 则从 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 向 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 所引向量 $\overrightarrow{AB}$ 便是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

三角不等式:

由三角形两边之和大于第三边的原理, 有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leq|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \text{及} |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leq|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

其中等号在 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向或反向时成立.

2．向量与数的乘法

向量与数的乘法的定义:

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数λ的乘积记作$\lambda\boldsymbol{a}$, 规定$\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量, 它的模$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$, 它的方向当$\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同, 当$\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反.

当$\lambda=0$ 时, $|\lambda\boldsymbol{a}|=0$, 即$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量, 这时它的方向可以是任意的.

特别地, 当$\lambda=\pm1$ 时, 有

$$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}, (-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}.$$

运算规律:

(1)结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

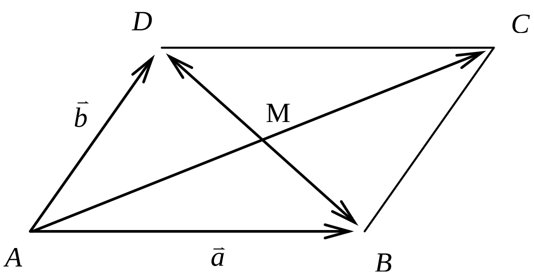
(2)分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

例 1. 在平行四边形 $ABCD$ 中, 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$.

试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$、$\overrightarrow{MD}$, 其中 M 是平行四边形对角线的交点.

解 由于平行四边形的对角线互相平分, 所以



$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$, 即 $-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\overrightarrow{MA}$,

于是 $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

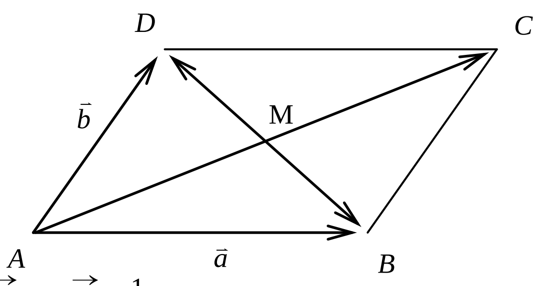
因为 $\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}$, 所以 $\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

又因$-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}$, 所以 $\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$.

由于 $\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}$, 所以 $\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

例 1 在平行四边形 $ABCD$ 中, 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$、$\overrightarrow{MD}$, 其中 M 是平行四边形对角线的交点.

解 由于平行四边形的对角线互相平分, 所以



$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}=-2\overrightarrow{MA}$,

于是 $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$; $\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

因为 $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}$, 所以 $\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$; $\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

向量的单位化:

设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, 则向量 $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量, 记为 $\boldsymbol{e}_a$.

于是 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$.

向量的单位化:

设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, 则向量 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量, 记为 $\boldsymbol{e}_a$.

于是 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{e}_a$.

定理 1 设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, 那么, 向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是: 存在唯一的实数λ, 使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证明: 条件的充分性是显然的, 下面证明条件的必要性.

设 $\boldsymbol{b}\,//\,\boldsymbol{a}$. 取$|\lambda|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$, 当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时λ取正值, 当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时λ取负值, 即 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 这是因为此时 $\boldsymbol{b}$ 与$\lambda\boldsymbol{a}$ 同向, 且

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|.$$

再证明数λ的唯一性. 设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$, 又设 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$, 两式相减, 便得

$$(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},\ 即|\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|=0.$$

因$|\boldsymbol{a}|\neq0$, 故$|\lambda-\mu|=0$, 即$\lambda=\mu$.

给定一个点及一个单位向量就确定了一条数轴. 设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{i}$ 确定了数轴 Ox, 对于轴上任一点 P, 对应一个向量$\overrightarrow{OP}$, 由$\overrightarrow{OP}\,//\boldsymbol{i}$, 根据定理 1, 必有唯一的实数 x, 使$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$(实数 x 叫做轴上有向线段$\overrightarrow{OP}$的值), 并知$\overrightarrow{OP}$与实数 x 一一对应. 于是

$$点\ P\leftrightarrow 向量\ \overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}\leftrightarrow 实数\ x\ ,$$

从而轴上的点 P 与实数 x 有一一对应的关系. 据此, 定义实数 x 为轴上点 P 的坐标.

由此可知, 轴上点 P 的坐标为 x 的充分必要条件是

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}\ .$$

三、空间直角坐标系

在空间取定一点 O 和三个两两垂直的单位向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$, 就确定了三条都以 O 为原点的两两垂直的数轴, 依次记为 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴), 统称为坐标轴. 它们构成一个空间直角坐标系, 称为 $Oxyz$ 坐标系.

注: (1)通常三个数轴应具有相同的长度单位;

(2)通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上, 而 z 轴则是铅垂线;

(3)数轴的的正向通常符合右手规则.

坐标面:

在空间直角坐标系中, 任意两个坐标轴可以确定一个平面, 这种平面称为坐标面.

x 轴及 y 轴所确定的坐标面叫做 xOy 面, 另两个坐标面是 yOz 面和 zOx 面.

卦限:

三个坐标面把空间分成八个部分, 每一部分叫做卦限, 含有三个正半轴的卦限叫做第一卦限,

它位于xOy面的上方. 在xOy面的上方, 按逆时针方向排列着第二卦限、第三卦限和第四卦限. 在xOy 面的下方, 与第一卦限对应的是第五卦限, 按逆时针方向还排列着第六卦限、第七卦限和第八卦限. 八个卦限分别用字母 I、II、III、IV、V、VI、VII、VIII 表示.

向量的坐标分解式:

任给向量$\boldsymbol{r}$, 对应有点M, 使$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$. 以$OM$为对角线、三条坐标轴为棱作长方体, 有

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR},$$

设 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$, $\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$, $\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$,

则 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.

上式称为向量$\boldsymbol{r}$的坐标分解式, $x\boldsymbol{i}$、$y\boldsymbol{j}$、$z\boldsymbol{k}$称为向量$\boldsymbol{r}$沿三个坐标轴方向的分向量.

显然, 给定向量$\boldsymbol{r}$, 就确定了点M及$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$, $\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$, $\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$三个分向量, 进而确定了$x$、$y$、$z$三个有序数; 反之, 给定三个有序数$x$、$y$、$z$也就确定了向量$\boldsymbol{r}$与点$M$. 于是点$M$、向量$\boldsymbol{r}$与三个有序$x$、$y$、$z$之间有一一对应的关系

$$M\leftrightarrow\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\leftrightarrow(x, y, z).$$

据此, 定义: 有序数x、y、z称为向量$\boldsymbol{r}$(在坐标系$Oxyz$)中的坐标, 记作$\boldsymbol{r}=(x, y, z)$; 有序数x、y、z也称为点M(在坐标系$Oxyz$)的坐标, 记为$M(x, y, z)$.

向量$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$称为点$M$关于原点$O$的向径. 上述定义表明, 一个点与该点的向径有相同的坐标. 记号(x, y, z)既表示点M, 又表示向量$\overrightarrow{OM}$.

坐标面上和坐标轴上的点, 其坐标各有一定的特征. 例如: 点M在yOz面上, 则x=0; 同相, 在zOx面上的点, y=0; 在xOy面上的点, z=0. 如果点M在x轴上, 则y=z=0; 同样在y轴上,有z=x=0; 在z轴上 的点, 有x=y=0. 如果点M为原点, 则x=y=z=0.

四、利用坐标作向量的线性运算

设 $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\boldsymbol{b}=(b_x, b_y, b_z)$

即 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$,

则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})+(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})$

$=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}$

$=(a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z)$.

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})-(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})$

$=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k}$

$=(a_x-b_x, a_y-b_y, a_z-b_z)$.

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})$$
$$=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}$$
$$=(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

利用向量的坐标判断两个向量的平行: 设 $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)\neq 0$, $\boldsymbol{b}=(b_x, b_y, b_z)$, 向量 $\boldsymbol{b}//\boldsymbol{a}\Leftrightarrow\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$, 即

$\boldsymbol{b}//\boldsymbol{a}\Leftrightarrow(b_x, b_y, b_z)=\lambda(a_x, a_y, a_z)$, 于是 $\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}$.

例 2 求解以向量为未知元的线性方程组 $\begin{cases}5\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}\\3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}\end{cases}$,

其中 $\boldsymbol{a}=(2, 1, 2)$, $\boldsymbol{b}=(-1, 1, -2)$.

解 如同解二元一次线性方程组, 可得

$$\boldsymbol{x}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{y}=3\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}\ .$$

以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的坐标表示式代入, 即得

$$\boldsymbol{x}=2(2, 1, 2)-3(-1, 1, -2)=(7, -1, 10),$$

$$\boldsymbol{y}=3(2, 1, 2)-5(-1, 1, -2)=(11, -2, 16).$$

例 3 已知两点 $A(x_1, y_1, z_1)$和 $B(x_2, y_2, z_2)$以及实数$\lambda\neq-1$,

在直线 AB 上求一点 M, 使 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$.

解 由于 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}$,

因此 $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})$,

从而 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB})$

$$=(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}),$$

这就是点 M 的坐标.

另解 设所求点为 $M(x, y, z)$, 则 $\overrightarrow{AM}=(x-x_1, y-y_1, z-z_1)$, $\overrightarrow{MB}=(x_2-x, y_2-y, z_2-z)$. 依题意有

$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$, 即

$$(x-x_1, y-y_1, z-z_1)=\lambda(x_2-x, y_2-y, z_2-z)$$

$$(x, y, z)-(x_1, y_1, z_1)=\lambda(x_2, y_2, z_2)-\lambda(x, y, z),$$

$$(x, y, z)=\frac{1}{1+\lambda}(x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2, z_1+\lambda z_2),$$

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

点 M 叫做有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的定比分点. 当$\lambda=1$, 点 M 的有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的中点, 其坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

五、向量的模、方向角、投影

1．向量的模与两点间的距离公式

设向量 $\boldsymbol{r}=(x, y, z)$, 作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$, 则

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR},$$

按勾股定理可得

$$|\boldsymbol{r}|=|OM|=\sqrt{|OP|^2+|OQ|^2+|OR|^2},$$

设 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$, $\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$, $\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$,

有 $|OP|=|x|, |OQ|=|y|, |OR|=|z|$,

于是得向量模的坐标表示式

$$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

设有点 $A(x_1, y_1, z_1)$、$B(x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2, y_2, z_2)-(x_1, y_1, z_1)=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1),$$

于是点 A 与点 B 间的距离为

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

例 4　求证以 $M_1(4, 3, 1)$、$M_2(7, 1, 2)$、$M_3(5, 2, 3)$三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

解　因为 $|M_1M_2|^2=(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2=14$,

$|M_2M_3|^2=(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6$,

$|M_1M_3|^2=(5-4)^2+(2-3)^2+(3-1)^2=6$,

所以$|M_2M_3|=|M_1M_3|$, 即$\Delta M_1M_2M_3$为等腰三角形.

例 5　在 z 轴上求与两点 $A(-4, 1, 7)$和 $B(3, 5, -2)$等距离的点.

解　设所求的点为 $M(0, 0, z)$, 依题意有$|MA|^2=|MB|^2$,

即 $$(0+4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2=(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2.$$

解之得 $z=\frac{14}{9}$, 所以, 所求的点为 $M(0,\ 0,\ \frac{14}{9})$.

例 6　已知两点 $A(4, 0, 5)$和 $B(7, 1, 3)$, 求与 $\overrightarrow{AB}$ 方向相同的单位向量 $\boldsymbol{e}$.

解 因为 $\overrightarrow{AB}=(7,\ 1,\ 3)-(4,\ 0,\ 5)=(3,\ 1,\ -2)$，

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{14},$$

所以 $$e=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{1}{\sqrt{14}}(3,\ 1,\ -2).$$

2．**方向角与方向余弦**

当把两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点放到同一点时，两个向量之间的不超过 π 的夹角称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$．如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量，规定它们的夹角可以在 0 与 π 之间任意取值.

类似地，可以规定向量与一轴的夹角或空间两轴的夹角.

非零向量 $\boldsymbol{r}$ 与三条坐标轴的夹角 α、β、γ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向角.

向量的方向余弦:

设 $\boldsymbol{r}=(x, y, z)$，则

$$x=|\boldsymbol{r}|\cos\alpha,\ y=|\boldsymbol{r}|\cos\beta,\ z=|\boldsymbol{r}|\cos\gamma.$$

$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦.

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|},\ \cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\ \cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}.$$

从而 $$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)=\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_r.$$

上式表明，以向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦为坐标的向量就是与 $\boldsymbol{r}$ 同方向的单位向量 $\boldsymbol{e}_r$．因此

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

例 3 设已知两点 $A(2, 2, \sqrt{2})$)和 $B(1, 3, 0)$，计算向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模、方向余弦和方向角.

解 $\overrightarrow{AB}=(1-2, 3-2, 0-\sqrt{2})=(-1, 1, -\sqrt{2})$；

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2;$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\ \cos\beta=\frac{1}{2},\ \cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\ \beta=\frac{\pi}{3},\ \gamma=\frac{3\pi}{4}.$$

3．向量在轴上的投影

设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{e}$ 确定 u 轴.

任给向量 $\boldsymbol{r}$, 作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$, 再过点 M 作与 u 轴垂直的平面交 u 轴于点 M'(点 M'叫作点 M 在 u 轴上的投影), 则向量 $\overrightarrow{OM'}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的分向量. 设 $\overrightarrow{OM'}=\lambda\boldsymbol{e}$, 则数 λ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的投影, 记作 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}$ 或$(\boldsymbol{r})_u$.

按此定义, 向量 $\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标 a_x, a_y, a_z 就是 $\boldsymbol{a}$ 在三条坐标轴上的投影, 即

$$a_x=\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a},\ a_y=\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a},\ a_z=\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a}.$$

投影的性质:

性质 1 $(\boldsymbol{a})_u=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$ (即 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$), 其中 φ 为向量与 u 轴的夹角;

性质 2 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_u=(\boldsymbol{a})_u+(\boldsymbol{b})_u$ (即 $\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}$);

性质 3 $(\lambda\boldsymbol{a})_u=\lambda(\boldsymbol{a})_u$ (即 $\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$);

§7. 2 数量积 向量积

一、两向量的数量积

数量积的物理背景: 设一物体在常力 $\boldsymbol{F}$ 作用下沿直线从点 M_1 移动到点 M_2. 以 $\boldsymbol{s}$ 表示位移 $\overrightarrow{M_1M_2}$. 由物理学知道, 力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功为

$$W=|\boldsymbol{F}|\,|\boldsymbol{s}|\cos\theta,$$

其中θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角.

数量积: 对于两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 它们的模 $|\boldsymbol{a}|$、$|\boldsymbol{b}|$ 及它们的夹角θ 的余弦的乘积称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的数量积, 记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, 即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

数量积与投影:

由于$|\boldsymbol{b}|\cos\theta=|\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\hat{\ }\boldsymbol{b})$, 当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时, $|\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\hat{\ }\boldsymbol{b})$ 是向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向上的投影, 于是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$.

同理, 当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\,\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$.

数量积的性质:

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$.

(2) 对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$, 如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, 则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ □□
反之, 如果 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

如果认为零向量与任何向量都垂直, 则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

数量积的运算律:

(1)交换律: $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ □□

(2)分配律: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

(3) $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$,

$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$, λ、μ为数.

(2)的证明:

分配律$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 的证明:

因为当 $\boldsymbol{c}=0$ 时, 上式显然成立;

当 $\boldsymbol{c}\neq 0$ 时, 有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}&=|\boldsymbol{c}|\mathrm{Prj}_c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\\&=|\boldsymbol{c}|(\mathrm{Prj}_c\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_c\boldsymbol{b})\\&=|\boldsymbol{c}|\mathrm{Prj}_c\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{c}|\mathrm{Prj}_c\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\ .\end{aligned}$$

例 1 试用向量证明三角形的余弦定理.

证: 设在 ΔABC 中, $\angle BCA=\theta$ (图 7–24), $|BC|=a$, $|CA|=b$, $|AB|=c$, 要证

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta.$$

记 $\vec{CB}=\boldsymbol{a}$, $\vec{CA}=\boldsymbol{b}$, $\vec{AB}=\boldsymbol{c}$, 则有

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},$$

从而 $|\boldsymbol{c}|^2=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\hat{\ }\boldsymbol{b})$,

即 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$.

□□□□□□□□

数量积的坐标表示:

设 $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\boldsymbol{b}=(b_x, b_y, b_z)$, 则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\ .$$

提示: 按数量积的运算规律可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}\\&\quad+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}\\&\quad+a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\ .\end{aligned}$$

两向量夹角的余弦的坐标表示:

设$\theta=(\boldsymbol{a},\wedge\,\boldsymbol{b})$, 则当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$、$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时, 有

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}\ .$$

提示: $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$.

例 2　已知三点 M (1, 1, 1)、A (2, 2, 1)和 B (2, 1, 2), 求$\angle AMB$.

解　从 M 到 A 的向量记为 $\boldsymbol{a}$, 从 M 到 B 的向量记为 $\boldsymbol{b}$, 则$\angle AMB$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

$\boldsymbol{a}=\{1, 1, 0\}, \boldsymbol{b}=\{1, 0, 1\}$.

因为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times1+1\times0+0\times1=1,$$

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2},$$

$$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

所以　$$\cos\angle AMB=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}.$$

从而　$$\angle AMB=\frac{\pi}{3}.$$

例 3．设液体流过平面 S 上面积为 A 的一个区域, 液体在这区域上各点处的流速均为（常向量)$\boldsymbol{v}$. 设 $\boldsymbol{n}$ 为垂直于 S 的单位向量（图 7-25(a)）, 计算单位时间内经过这区域流向 $\boldsymbol{n}$ 所指一方的液体的质量 P(液体的密度为 ρ).

解　单位时间内流过这区域的液体组成一个底面积为 A、斜高为$|\boldsymbol{v}|$的斜柱体(图 7-25(b)). 这柱体的斜高与底面的垂线的夹角就是 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角θ, 所以这柱体的高为$|\boldsymbol{v}|\cos\theta$, 体积为

□□□□□□□□□□□□□□□ $A|\boldsymbol{v}|\cos\theta=A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$.

从而, 单位时间内经过这区域流向 $\boldsymbol{n}$ 所指一方的液体的质量为

$$P=\rho A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}.$$

二、两向量的向量积

在研究物体转动问题时, 不但要考虑这物体所受的力, 还要分析这些力所产生的力矩.

设 O 为一根杠杆 L 的支点.有一个力 $\boldsymbol{F}$ 作用于这杠杆上 P 点处. $\boldsymbol{F}$ 与$\overrightarrow{OP}$ 的夹角为θ.

由力学规定, 力 $\boldsymbol{F}$ 对支点 O 的力矩是一向量 $\boldsymbol{M}$, 它的模

$$|\boldsymbol{M}|=|\overrightarrow{OP}||\boldsymbol{F}|\sin\theta,$$

而 $\boldsymbol{M}$ 的方向垂直于$\overrightarrow{OP}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 所决定的平面, $\boldsymbol{M}$ 的指向是的按右手规则从$\overrightarrow{OP}$ 以不超过π的角转向 $\boldsymbol{F}$ 来确定的.

向量积: 设向量 $\boldsymbol{c}$ 是由两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 按下列方式定出:

$\boldsymbol{c}$ 的模 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$, 其中$\theta$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 间的夹角□□

$\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面, $\boldsymbol{c}$ 的指向按右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定.

那么, 向量 $\boldsymbol{c}$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积, 记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, 即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

根据向量积的定义, 力矩 $\boldsymbol{M}$ 等于$\overrightarrow{OP}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 的向量积, 即

$$\boldsymbol{M}=\overrightarrow{OP}\times\boldsymbol{F}\ .$$

向量积的性质:

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$;

(2) 对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$, 如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$; 反之, 如果 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$, 则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

如果认为零向量与任何向量都平行, 则 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

数量积的运算律:

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$;

(2) 分配律: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

(3) $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ (λ为数).

数量积的坐标表示: 设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$. 按向量积的运算规律可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}\\&\quad+a_yb_x\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}+a_yb_z\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}\\&\quad+a_zb_x\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$, 所以

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}.$$

为了邦助记忆, 利用三阶行列式符号, 上式可写成

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=a_yb_z\boldsymbol{i}+a_zb_x\boldsymbol{j}+a_xb_y\boldsymbol{k}-a_yb_x\boldsymbol{k}-a_xb_z\boldsymbol{j}-a_zb_y\boldsymbol{i}$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}.\ .$$

例 4 设 $\boldsymbol{a}=(2, 1, -1)$, $\boldsymbol{b}=(1, -1, 2)$, 计算 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

解 $$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&1&-1\\1&-1&2\end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}-4\boldsymbol{j}-\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}.$$

例 5 已知三角形 ABC 的顶点分别是 A (1, 2, 3)、B (3, 4, 5)、C (2, 4, 7), 求三角形 ABC 的面积.

解 根据向量积的定义, 可知三角形 ABC 的面积

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle A=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|\ .$$

由于 $\overrightarrow{AB}=(2, 2, 2)$, $\overrightarrow{AC}=(1, 2, 4)$, 因此

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&2&2\\1&2&4\end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}.$$

于是 $$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}|=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{14}\ .$$

例 6　设刚体以等角速度$\boldsymbol{\omega}$ 绕 l 轴旋转, 计算刚体上一点 M 的线速度.

解　刚体绕l 轴旋转时, 我们可以用在l 轴上的一个向量$\boldsymbol{\omega}$表示角速度, 它的大小等于角速度的大小, 它的方向由右手规则定出: 即以右手握住 l 轴, 当右手的四个手指的转向与刚体的旋转方向一致时, 大姆指的指向就是$\boldsymbol{\omega}$的方向.

设点 M 到旋转轴 l 的距离为 a , 再在 l 轴上任取一点 O 作向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$, 并以θ 表示$\boldsymbol{\omega}$与 $\boldsymbol{r}$ 的夹角, 那么

$$a=|\boldsymbol{r}|\sin\theta.$$

设线速度为 $\boldsymbol{v}$, 那么由物理学上线速度与角速度间的关系可知, $\boldsymbol{v}$ 的大小为

$$|\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{\omega}|a=|\boldsymbol{\omega}|\,|\boldsymbol{r}|\sin\theta$$ □□

$\boldsymbol{v}$ 的方向垂直于通过 M 点与 l 轴的平面, 即 $\boldsymbol{v}$ 垂直于$\boldsymbol{\omega}$与 $\boldsymbol{r}$, 又 $\boldsymbol{v}$ 的指向是使$\boldsymbol{\omega}$、$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$ 符合右手规则. 因此有

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}.$$

□□

§7. 3　曲面及其方程

一、曲面方程的概念

在空间解析几何中, 任何曲面都可以看作点的几何轨迹. 在这样的意义下, 如果曲面 S 与三元方程

$$F(x, y, z)=0$$

有下述关系:

(1) 曲面 S 上任一点的坐标都满足方程 $F(x, y, z)=0$;

(2) 不在曲面 S 上的点的坐标都不满足方程 $F(x, y, z)=0$,

那么, 方程 $F(x, y, z)=0$ 就叫做曲面 S 的方程, 而曲面 S 就叫做方程 $F(x, y, z)=0$ 的图形.

常见的曲面的方程:

例 1　建立球心在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$、半径为 R 的球面的方程.

解　设 $M(x, y, z)$是球面上的任一点, 那么

$$|M_0M|=R.$$

即　$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R,$$

或　$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

这就是球面上的点的坐标所满足的方程. 而不在球面上的点的坐标都不满足这个方程. 所以

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

就是球心在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$、半径为 R 的球面的方程.

特殊地, 球心在原点 $O(0, 0, 0)$、半径为 R 的球面的方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

例 2　设有点 $A(1, 2, 3)$和 $B(2, -1, 4)$, 求线段 AB 的垂直平分面的方程.

解　由题意知道, 所求的平面就是与 A 和 B 等距离的点的几何轨迹. 设 $M(x, y, z)$为所求平面上的任一点, 则有

$$|AM|=|BM|,$$

即

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2}\ .$$

等式两边平方, 然后化简得

$$2x-6y+2z-7=0.$$

这就是所求平面上的点的坐标所满足的方程, 而不在此平面上的点的坐标都不满足这个方程, 所以这个方程就是所求平面的方程.

研究曲面的两个基本问题:

(1) 已知一曲面作为点的几何轨迹时, 建立这曲面的方程;

(2) 已知坐标 x、y 和 z 间的一个方程时, 研究这方程所表示的曲面的形状.

例 3　方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y=0$ 表示怎样的曲面?

解　通过配方, 原方程可以改写成

$$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=5.$$

这是一个球面方程, 球心在点 $M_0(1, -2, 0)$、半径为 $R=\sqrt{5}$.

一般地, 设有三元二次方程

$$Ax^2+Ay^2+Az^2+Dx+Ey+Fz+G=0,$$

这个方程的特点是缺 xy , yz , zx 各项, 而且平方项系数相同, 只要将方程经过配方就可以化成方程

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

的形式, 它的图形就是一个球面.

二、旋转曲面

以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面叫做旋转曲面, 这条定直线叫做旋转曲面的轴.

设在 yOz 坐标面上有一已知曲线 C, 它的方程为

$$f(y, z)=0,$$

把这曲线绕 z 轴旋转一周, 就得到一个以 z 轴为轴的旋转曲面. 它的方程可以求得如下:

设 $M(x, y, z)$为曲面上任一点, 它是曲线 C 上点 $M_1(0, y_1, z_1)$绕 z 轴旋转而得到的. 因此有如下关系等式

$$f(y_1,\ z_1)=0\,,\ \ z=z_1\,,\ \ |y_1|=\sqrt{x^2+y^2}\ ,$$

从而得　$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z)=0$,

这就是所求旋转曲面的方程.

在曲线 C 的方程 $f(y, z)=0$ 中将 y 改成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$, 便得曲线 C 绕 z 轴旋转所成的旋转曲面的

方程 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z)=0$.

同理, 曲线 C 绕 y 轴旋转所成的旋转曲面的方程为

$$f(y,\ \pm\sqrt{x^2+z^2})=0.$$

例 4　直线 L 绕另一条与 L 相交的直线旋转一周, 所得旋转曲面叫做圆锥面. 两直线的交点叫做圆锥面的顶点, 两直线的夹角 α ($0<\alpha<\frac{\pi}{2}$)叫做圆锥面的半顶角. 试建立顶点在坐标原点 O, 旋转轴为 z 轴, 半顶角为 α 的圆锥面的方程.

解　在 yOz 坐标面内, 直线 L 的方程为

$$z=y\cot\alpha,$$

将方程 $z=y\cot\alpha$ 中的 y 改成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$, 就得到所要求的圆锥面的方程

$$z=\pm\sqrt{x^2+y^2}\cot\alpha,$$

或

$$z^2=a^2(x^2+y^2),$$

其中 $a=\cot\alpha$.

例 5. 将 zOx 坐标面上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 分别绕 x 轴和 z 轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程.

解　绕 x 轴旋转所在的旋转曲面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1;$$

绕 z 轴旋转所在的旋转曲面的方程为

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

这两种曲面分别叫做双叶旋转双曲面和单叶旋转双曲面.

三、柱面

例 6　方程 $x^2+y^2=R^2$ 表示怎样的曲面?

解　方程 $x^2+y^2=R^2$ 在 xOy 面上表示圆心在原点 O、半径为 R 的圆. 在空间直角坐标系中, 这方程不含竖坐标 z, 即不论空间点的竖坐标 z 怎样, 只要它的横坐标 x 和纵坐标 y 能满足这方程, 那么这些点就在这曲面上. 也就是说, 过 xOy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$, 且平行于 z 轴的直线一定在 $x^2+y^2=R^2$ 表示的曲面上. 所以这个曲面可以看成是由平行于 z 轴的直线 l 沿 xOy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 移动而形成的. 这曲面叫做圆柱面, xOy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 叫做它的准线, 这平行于 z 轴的直线 l 叫做它的母线.

例 6　方程 $x^2+y^2=R^2$ 表示怎样的曲面?

解　在空间直角坐标系中, 过 xOy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 作平行于 z 轴的直线 l, 则直线 l 上的点都满足方程 $x^2+y^2=R^2$, 因此直线 l 一定在 $x^2+y^2=R^2$ 表示的曲面上. 所以这个曲面可以看成是由平行于 z 轴的直线 l 沿 xOy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 移动而形成的. 这曲面叫做圆柱面, xOy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 叫做它的准线, 这平行于 z 轴的直线 l 叫做它的母线.

柱面: 平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 形成的轨迹叫做柱面, 定曲线 C 叫做柱面的准线, 动直线 L 叫做柱面的母线.

上面我们看到, 不含 z 的方程 $x^2+y^2=R^2$ 在空间直角坐标系中表示圆柱面, 它的母线平行于 z 轴, 它的准线是 xOy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$.

一般地, 只含 x、y 而缺 z 的方程 $F(x, y)=0$, 在空间直角坐标系中表示母线平行于 z 轴的柱面, 其准线是 xOy 面上的曲线 C: $F(x, y)=0$.

例如, 方程 $y^2=2x$ 表示母线平行于 z 轴的柱面, 它的准线是 xOy 面上的抛物线 $y^2=2x$, 该柱面叫做抛物柱面.

又如, 方程 $x-y=0$ 表示母线平行于 z 轴的柱面, 其准线是 xOy 面的直线 $x-y=0$, 所以它是过 z 轴的平面.

类似地, 只含 x、z 而缺 y 的方程 $G(x, z)=0$ 和只含 y、z 而缺 x 的方程 $H(y, z)=0$ 分别表示母线平行于 y 轴和 x 轴的柱面.

例如, 方程 $x-z=0$ 表示母线平行于 y 轴的柱面, 其准线是 zOx 面上的直线 $x-z=0$. 所以它是过 y 轴的平面.

四、二次曲面

与平面解析几何中规定的二次曲线相类似, 我们把三元二次方程所表示的曲面叫做二次曲面. 把平面叫做一次曲面.

怎样了解三元方程 $F(x, y, z)=0$ 所表示的曲面的形状呢? 方法之一是用坐标面和平行于坐标面的平面与曲面相截, 考察其交线的形状, 然后加以综合, 从而了解曲面的立体形状. 这种方法叫做截痕法.

研究曲面的另一种方程是伸缩变形法:

设 S 是一个曲面, 其方程为 $F(x, y, z)=0$, S' 是将曲面 S 沿 x 轴方向伸缩 λ 倍所得的曲面.

显然, 若$(x, y, z)\in S$, 则$(\lambda x, y, z)\in S'$; 若$(x, y, z)\in S'$, 则 $(\frac{1}{\lambda}x, y, z)\in S$.

因此, 对于任意的$(x, y, z)\in S'$, 有 $F(\frac{1}{\lambda}x, y, z)=0$, 即 $F(\frac{1}{\lambda}x, y, z)=0$ 是曲面 S'的方程.

例如，把圆锥面 $x^2+y^2=a^2z^2$ 沿 y 轴方向伸缩 $\frac{b}{a}$ 倍, 所得曲面的方程为

$$x^2+(\frac{a}{b}y)^2=a^2z^2\text{, 即 }\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2\text{ .}$$

(1)椭圆锥面

由方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$所表示的曲面称为椭圆锥面.

圆锥曲面在 y 轴方向伸缩而得的曲面.

把圆锥面$\frac{x^2+y^2}{a^2}=z^2$沿 y 轴方向伸缩$\frac{b}{a}$倍，所得曲面称为椭圆锥面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$.

以垂直于 z 轴的平面 $z=t$ 截此曲面，当 $t=0$ 时得一点$(0, 0, 0)$；当 $t\neq 0$ 时，得平面 $z=t$ 上的椭圆

$$\frac{x^2}{(at)^2}+\frac{y^2}{(bt)^2}=1.$$

当 t 变化时，上式表示一族长短轴比例不变的椭圆，当$|t|$从大到小并变为 0 时，这族椭圆从大到小并缩为一点. 综合上述讨论，可得椭圆锥面的形状如图.

(2)椭球面

由方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$所表示的曲面称为椭球面.

球面在 x 轴、y 轴或 z 轴方向伸缩而得的曲面.

把 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 沿 z 轴方向伸缩$\frac{c}{a}$倍，得旋转椭球面$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$；再沿 y 轴方向伸缩$\frac{b}{a}$倍，即得椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

(3)单叶双曲面

由方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$所表示的曲面称为单叶双曲面.

把 zOx 面上的双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$绕 z 轴旋转，得旋转单叶双曲面$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$；再沿 y 轴方向伸缩$\frac{b}{a}$倍，即得单叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

(4)双叶双曲面

由方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$所表示的曲面称为双叶双曲面.

把 zOx 面上的双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$绕 x 轴旋转，得旋转双叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2+y^2}{c^2}=1$；再沿 y 轴方向伸缩$\frac{b}{c}$倍，即得双叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

(5)椭圆抛物面

由方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$所表示的曲面称为椭圆抛物面.

把 zOx 面上的抛物线$\frac{x^2}{a^2}=z$绕 z 轴旋转，所得曲面叫做旋转抛物面$\frac{x^2+y^2}{a^2}=z$，再沿 y 轴方向伸缩$\frac{b}{a}$倍，所得曲面叫做椭圆抛物面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$

(6)双曲抛物面.

由方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$ 所表示的曲面称为双曲抛物面.

双曲抛物面又称马鞍面.

用平面 $x=t$ 截此曲面, 所得截痕 l 为平面 $x=t$ 上的抛物线

$$-\frac{y^2}{b^2}=z-\frac{t^2}{a^2},$$

此抛物线开口朝下, 其项点坐标为$(t,\ 0,\ \frac{t^2}{a^2})$. 当 t 变化时, l 的形状不变, 位置只作平移, 而 l 的项点的轨迹 L 为平面 $y=0$ 上的抛物线

$$z=\frac{x^2}{a^2}.$$

因此, 以 l 为母线, L 为准线, 母线 l 的项点在准线 L 上滑动, 且母线作平行移动, 这样得到的曲面便是双曲抛物面.

还有三种二次曲面是以三种二次曲线为准线的柱面:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad x^2=ay,$$

依次称为椭圆柱面、双曲柱面、抛物柱面.

§7. 4 空间曲线及其方程

一、空间曲线的一般方程

空间曲线可以看作两个曲面的交线. 设

$$F(x, y, z)=0 \text{ 和 } G(x, y, z)=0$$

是两个曲面方程, 它们的交线为 C. 因为曲线 C 上的任何点的坐标应同时满足这两个方程, 所以应满足方程组

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}.$$

反过来, 如果点 M 不在曲线 C 上, 那么它不可能同时在两个曲面上, 所以它的坐标不满足方程组.

因此, 曲线 C 可以用上述方程组来表示. 上述方程组叫做空间曲线 C 的一般方程.

例 1 方程组 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\2x+3z=6\end{cases}$ 表示怎样的曲线?

解 方程组中第一个方程表示母线平行于 z 轴的圆柱面, 其准线是 xOy 面上的圆, 圆心在原点 O, 半行为 1. 方程组中第二个方程表示一个母线平行于 y 轴的柱面, 由于它的准线是 zOx 面上的直线, 因此它是一个平面. 方程组就表示上述平面与圆柱面的交线.

例 2 方程组 $\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ (x-\frac{a}{2})^2+y^2=(\frac{a}{2})^2 \end{cases}$ 表示怎样的曲线?

解 方程组中第一个方程表示球心在坐标原点 O, 半行为 a 的上半球面. 第二个方程表示母线平行于 z 轴的圆柱面, 它的准线是 xOy 面上的圆, 这圆的圆心在点 $(\frac{a}{2}, 0)$, 半行为 $\frac{a}{2}$. 方程组就表示上述半球面与圆柱面的交线.

例 2′ 方程组 $\begin{cases} z=\sqrt{4a^2-x^2-y^2} \\ (x-a)^2+y^2=a^2 \end{cases}$ 表示怎样的曲线?

解 方程组中第一个方程表示球心在坐标原点 O, 半行为 $2a$ 的上半球面. 第二个方程表示母线平行于 z 轴的圆柱面, 它的准线是 xOy 面上的圆, 这圆的圆心在点 $(a, 0)$, 半行为 a. 方程组就表示上述半球面与圆柱面的交线.

二、空间曲线的参数方程

空间曲线 C 的方程除了一般方程之外, 也可以用参数形式表示, 只要将 C 上动点的坐标 x、y、z 表示为参数 t 的函数:

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}.$$

当给定 $t=t_1$ 时, 就得到 C 上的一个点(x_1, y_1, z_1); 随着 t 的变动便得曲线 C 上的全部点. 方程组(2)叫做空间曲线的参数方程.

例 3 如果空间一点 M 在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上以角速度 ω 绕 z 轴旋转, 同时又以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升(其中 ω、v 都是常数), 那么点 M 构成的图形叫做螺旋线. 试建立其参数方程.

解 取时间 t 为参数. 设当 $t=0$ 时, 动点位于 x 轴上的一点 $A(a, 0, 0)$处. 经过时间 t, 动点由 A 运动到 $M(x, y, z)$(图 7-44). 记 M 在 xOy 面上的投影为 M', M'的坐标为 $x, y, 0$. 由于动点在圆柱面上以角速度 ω 绕 z 轴旋转, 所以经过时间 t, $\angle AOM'=\omega t$. 从而

$$x=|OM'|\cos\angle AOM'=a\cos\omega t,$$

$$y=|OM'|\sin\angle AOM'=a\sin\omega t,$$

由于动点同时以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升, 所以

$$z=MM'=vt.$$

因此螺旋线的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\cos\omega t \\ y=a\sin\omega t \\ z=vt \end{cases},$$

也可以用其他变量作参数; 例如令 $\theta=\omega t$, 则螺旋线的参数方程可写为

$$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \\ z=b\theta \end{cases},$$

其中$b=\dfrac{v}{\omega}$, 而参数为θ.

***曲面的参数方程**

曲面的参数方程通常是含两个参数的方程, 形如

$$\begin{cases} x=x(s,t) \\ y=y(s,t) \\ z=z(s,t) \end{cases}.$$

例如空间曲线Γ

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases} \quad (\alpha\le t\le\beta),$$

绕 z 轴旋转, 所得旋转曲面的方程为

$$\begin{cases} x=\sqrt{[\varphi(t)]^2+[\psi(t)]^2}\cos\theta \\ y=\sqrt{[\varphi(t)]^2+[\psi(t)]^2}\sin\theta \\ z=\omega(t) \end{cases} \quad (\alpha\le t\le\beta,\ 0\le\theta\le 2\pi). \quad \cdots\cdots(4)$$

这是因为, 固定一个 t, 得Γ上一点 $M_1(\varphi(t), \psi(t), \omega(t))$, 点 M_1 绕 z 轴旋转, 得空间的一个圆, 该圆在平面 $z=\omega(t)$上, 其半径为点 M_1 到 z 轴的距离 $\sqrt{[\varphi(t)]^2+[\psi(t)]^2}$, 因此, 固定 t 的方程(4)就是该圆的参数方程. 再令 t 在$[\alpha, \beta]$内变动, 方程(4)便是旋转曲面的方程.

例如直线

$$\begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=2t \end{cases}$$

绕 z 轴旋转所得旋转曲面的方程为

$$\begin{cases} x=\sqrt{1+t^2}\cos\theta \\ y=\sqrt{1+t^2}\sin\theta \\ z=2t \end{cases}.$$

(上式消 t 和θ, 得曲面的直角坐标方程为 $x^2+y^2=1+\dfrac{z^2}{4}$)

又如球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 可看成 zOx 面上的半圆周

$$\begin{cases} x=a\sin\varphi \\ y=0 \\ z=a\cos\varphi \end{cases} \quad (0\le\varphi\le\pi)$$

绕 z 轴旋转所得, 故球面方程为

$$\begin{cases} x=a\sin\varphi\cos\theta \\ y=a\sin\varphi\sin\theta \quad (0\le\varphi\le\pi,\ 0\le\theta\le2\pi). \\ z=a\cos\varphi \end{cases}$$

三、空间曲线在坐标面上的投影

以曲线 C 为准线、母线平行于 z 轴的柱面叫做曲线 C 关于 xOy 面的投影柱面, 投影柱面与 xOy 面的交线叫做空间曲线 C 在 xOy 面上的投影曲线, 或简称投影(类似地可以定义曲线 C 在其它坐标面上的投影).

设空间曲线 C 的一般方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$.

设方程组消去变量 z 后所得的方程

$$H(x, y)=0\ ,$$

这就是曲线 C 关于 xOy 面的投影柱面.

这是因为: 一方面方程 $H(x,\ y)=0$ 表示一个母线平行于 z 轴的柱面, 另一方面方程 $H(x,\ y)=0$ 是由方程组消去变量 z 后所得的方程, 因此当 x、y、z 满足方程组时, 前两个数 x、y 必定满足方程 $H(x, y)=0$, 这就说明曲线 C 上的所有点都在方程 $H(x, y)=0$ 所表示的曲面上, 即曲线 C 在方程 $H(x, y)=0$ 表示的柱面上. 所以方程 $H(x, y)=0$ 表示的柱面就是曲线 C 关于 xOy 面的投影柱面.

曲线 C 在 xOy 面上的投影曲线的方程为:

$$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}.$$

讨论: 曲线 C 关于 yOz 面和 zOx 面的投影柱面的方程是什么? 曲线 C 在 yOz 面和 zOx 面上的投影曲线的方程是什么?

例 4 已知两球面的方程为

$$x^2+y^2+z^2=1,\ (5)$$

和

$$x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1,\ (6)$$

求它们的交线 C 在 xOy 面上的投影方程.

解 先将方程 $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ 化为

$$x^2+y^2+z^2-2y-2z=1,$$

然后与方程 $x^2+y^2+z^2=1$ 相减得

$$y+z=1.$$

将 $z=1-y$ 代入 $x^2+y^2+z^2=1$ 得

$$x^2+2y^2-2y=0.$$

这就是交线 C 关于 xOy 面的投影柱面方程. 两球面的交线 C 在 xOy 面上的投影方程为

$$\begin{cases} x^2+2y^2-2y=0 \\ z=0 \end{cases}.$$

例 5 求由上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围成立体在 xOy 面上的投影.

解 由方程 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 消去 z 得到 $x^2+y^2=1$. 这是一个母线平行于 z 轴的圆柱面, 容易看出, 这恰好是半球面与锥面的交线 C 关于 xOy 面的投影柱面, 因此交线 C 在 xOy 面上的投影曲线为

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}.$$

这是 xOy 面上的一个圆, 于是所求立体在 xOy 面上的投影, 就是该圆在 xOy 面上所围的部分:

$$x^2+y^2\leq 1.$$

:

§7. 5　平面及其方程

一、平面的点法式方程

法线向量: 如果一非零向量垂直于一平面, 这向量就叫做该平面的法线向量. 容易知道, 平面上的任一向量均与该平面的法线向量垂直.

唯一确定平面的条件: 当平面Π上一点 $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$和它的一个法线向量 $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$为已知时, 平面Π的位置就完全确定了.

平面方程的建立: 设 $M\,(x, y, z)$是平面Π上的任一点. 那么向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 必与平面Π的法线向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直, 即它们的数量积等于零:

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0\,.$$

由于

$$\boldsymbol{n}=(A, B, C),\ \ \overrightarrow{M_0M}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)\,,$$

所以

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

这就是平面Π上任一点 M 的坐标 x, y, z 所满足的方程.

反过来, 如果 $M\,(x, y, z)$不在平面Π上, 那么向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 与法线向量 $\boldsymbol{n}$ 不垂直, 从而

$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$. , 即不在平面$\Pi$上的点 M 的坐标 x, y, z 不满足此方程.

由此可知, 方程 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ 就是平面Π的方程. 而平面Π就是平面方程的图形. 由于方程 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ 是由平面Π上的一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$及它的一个法线向量 $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$确定的, 所以此方程叫做平面的点法式方程.

例 1 求过点(2, −3, 0)且以 $\boldsymbol{n}=(1, -2, 3)$为法线向量的平面的方程.

解 根据平面的点法式方程, 得所求平面的方程为

$$(x-2)-2(y+3)+3z=0,$$

即 $$x-2y+3z-8=0.$$

例 2 求过三点 $M_1(2, -1, 4)$、$M_2(-1, 3, -2)$和 $M_3(0, 2, 3)$的平面的方程.

解 我们可以用 $\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}$ 作为平面的法线向量 $\boldsymbol{n}$.

因为 $\overrightarrow{M_1M_2}=(-3, 4, -6)$, $\overrightarrow{M_1M_3}=(-2, 3, -1)$,

所以

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -3 & 4 & -6\\ -2 & 3 & -1\end{vmatrix}=14\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}.$$

根据平面的点法式方程, 得所求平面的方程为

$$14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0,$$

即 $$14x+9y-z-15=0.$$

二、平面的一般方程

由于平面的点法式方程是 x, y, z 的一次方程, 而任一平面都可以用它上面的一点及它的法线向量来确定, 所以任一平面都可以用三元一次方程来表示 .

反过来, 设有三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

我们任取满足该方程的一组数 x_0, y_0, z_0, 即

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0.$$

把上述两等式相减, 得

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

这正是通过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$且以 $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$为法线向量的平面方程. 由于方程

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

与方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

同解, 所以任一三元一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 的图形总是一个平面. 方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 称为平面的一般方程, 其中 x, y, z 的系数就是该平面的一个法线向量 $\boldsymbol{n}$ 的坐标, 即

$$\boldsymbol{n}=(A, B, C).$$

例如, 方程 $3x-4y+z-9=0$ 表示一个平面, $\boldsymbol{n}=(3, -4, 1)$是这平面的一个法线向量.

讨论: 考察下列特殊的平面方程, 指出法线向量与坐标面、坐标轴的关系, 平面通过的特殊点或线.

$$Ax+By+Cz=0;$$

$$By+Cz+D=0,\ \ Ax+Cz+D=0,\ \ Ax+By+D=0;$$

$$Cz+D=0,\ \ Ax+D=0,\ \ By+D=0.$$

提示:

D=0, 平面过原点.
$\boldsymbol{n}=(0, B, C)$, 法线向量垂直于 x 轴, 平面平行于 x 轴.
$\boldsymbol{n}=(A, 0, C)$, 法线向量垂直于 y 轴, 平面平行于 y 轴.
$\boldsymbol{n}=(A, B, 0)$, 法线向量垂直于 z 轴, 平面平行于 z 轴.
$\boldsymbol{n}=(0, 0, C)$, 法线向量垂直于 x 轴和 y 轴, 平面平行于 xOy 平面.
$\boldsymbol{n}=(A, 0, 0)$, 法线向量垂直于 y 轴和 z 轴, 平面平行于 yOz 平面.
$\boldsymbol{n}=(0, B, 0)$, 法线向量垂直于 x 轴和 z 轴, 平面平行于 zOx 平面.

例 3 求通过 x 轴和点$(4, -3, -1)$的平面的方程.

解 平面通过 x 轴, 一方面表明它的法线向量垂直于 x 轴, 即 A=0; 另一方面表明 它必通过原点, 即 D=0. 因此可设这平面的方程为

$$By+Cz=0.$$

又因为这平面通过点$(4, -3, -1)$, 所以有

$$-3B-C=0,$$

或 $$C=-3B.$$

将其代入所设方程并除以 B $(B\neq 0)$, 便得所求的平面方程为

$$y-3z=0.$$

例 4 设一平面与 x、y、z 轴的交点依次为 $P(a, 0, 0)$、$Q(0, b, 0)$、$R(0, 0, c)$三点, 求这平面的方程(其中 $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$).

解 设所求平面的方程为

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

因为点 $P(a, 0, 0)$、$Q(0, b, 0)$、$R(0, 0, c)$都在这平面上, 所以点 P、Q、R 的坐标都满足所设方程, 即有

$$\begin{cases} aA+D=0, \\ bB+D=0, \\ cC+D=0, \end{cases}$$

由此得 $$A=-\frac{D}{a},\ B=-\frac{D}{b},\ C=-\frac{D}{c}.$$

将其代入所设方程, 得

$$-\frac{D}{a}x-\frac{D}{b}y-\frac{D}{c}z+D=0,$$

即 $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

上述方程叫做平面的截距式方程, 而 a、b、c 依次叫做平面在 x、y、z 轴上的截距.

三、两平面的夹角

两平面的夹角: 两平面的法线向量的夹角(通常指锐角)称为两平面的夹角.

设平面 Π_1 和 Π_2 的法线向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(A_1, B_1, C_1)$和 $\boldsymbol{n}_2=(A_2, B_2, C_2)$, 那么平面 Π_1 和 Π_2 的夹角 θ 应是 $(\boldsymbol{n}_1\hat{,}\boldsymbol{n}_2)$ 和 $(-\boldsymbol{n}_1\hat{,}\boldsymbol{n}_2)=\pi-(\boldsymbol{n}_1\hat{,}\boldsymbol{n}_2)$ 两者中的锐角, 因此, $\cos\theta=|\cos(\boldsymbol{n}_1\hat{,}\boldsymbol{n}_2)|$. 按两向量夹角余弦

的坐标表示式, 平面Π_1和Π_2的夹角θ 可由

$$\cos\theta=|\cos(\boldsymbol{n}_1 \widehat{,} \boldsymbol{n}_2)|=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

来确定.

从两向量垂直、平行的充分必要条件立即推得下列结论:

平面Π_1和Π_2垂直相当于 $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$;

平面Π_1和Π_2平行或重合相当于 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$.

例 5 求两平面 $x-y+2z-6=0$ 和 $2x+y+z-5=0$ 的夹角.

解 $\boldsymbol{n}_1=(A_1, B_1, C_1)=(1, -1, 2)$, $\boldsymbol{n}_2=(A_2, B_2, C_2)=(2, 1, 1)$,

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}=\frac{|1\times2+(-1)\times1+2\times1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{2},$$

所以, 所求夹角为$\theta=\frac{\pi}{3}$.

例 6 一平面通过两点 $M_1(1, 1, 1)$和 $M_2(0, 1, -1)$且垂直于平面 $x+y+z=0$, 求它的方程.

解 方法一: 已知从点 M_1 到点 M_2 的向量为 $\boldsymbol{n}_1=(-1, 0, -2)$, 平面 $x+y+z=0$ 的法线向量为 $\boldsymbol{n}_2=(1, 1, 1)$.

设所求平面的法线向量为 $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$.

因为点 $M_1(1, 1, 1)$和 $M_2(0, 1, -1)$在所求平面上, 所以 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{n}_1$, 即$-A-2C=0, A=-2C$.

又因为所求平面垂直于平面 $x+y+z=0$, 所以 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{n}_1$, 即 $A+B+C=0, B=C$.

于是由点法式方程, 所求平面为

$-2C(x-1)+C(y-1)+C(z-1)=0$, 即 $2x-y-z=0$.

方法二: 从点 M_1 到点 M_2 的向量为 $\boldsymbol{n}_1=(-1, 0, -2)$, 平面 $x+y+z=0$ 的法线向量为 $\boldsymbol{n}_2=(1, 1, 1)$. 设所求平面的法线向量 $\boldsymbol{n}$ 可取为 $\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$.

因为

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},$$

所以所求平面方程为

$2(x-1)-(y-1)-(z-1)=0$,

即 $2x-y-z=0$.

例 7 设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$是平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 外一点, 求 P_0 到这平面的距离.

解 设 $\boldsymbol{e}_n$ 是平面上的单位法线向量. 在平面上任取一点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, 则 P_0 到这平面的距离为

$$d=|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\boldsymbol{e}_n|=\frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

提示: $\boldsymbol{e}_n=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(A,\ B,\ C)$, $\overrightarrow{P_1P_0}=(x_0-x_1, y_0-y_1, z_0-z_1)$,

例 8 求点(2, 1, 1)到平面 $x+y-z+1=0$ 的距离.

解 $d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|1\times2+1\times1-(-1)\times1+1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$.

§7. 6 空间直线及其方程

一、空间直线的一般方程

空间直线 L 可以看作是两个平面Π_1和Π_2的交线.

如果两个相交平面Π_1和Π_2的方程分别为$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$和$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, 那么直线 L 上的任一点的坐标应同时满足这两个平面的方程, 即应满足方程组

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}. \qquad (1)$$

反过来, 如果点 M 不在直线 L 上, 那么它不可能同时在平面Π_1和Π_2上, 所以它的坐标不满足方程组(1). 因此, 直线 L 可以用方程组(1)来表示. 方程组(1)叫做空间直线的一般方程.

设直线 L 是平面Π_1与平面Π_2的交线, 平面的方程分别为 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, 那么点 M 在直线 L 上当且仅当它同时在这两个平面上, 当且仅当它的坐标同时满足这两个平面方程, 即满足方程组

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}.$$

因此, 直线 L 可以用上述方程组来表示. 上述方程组叫做空间直线的一般方程.

通过空间一直线 L 的平面有无限多个, 只要在这无限多个平面中任意选取两个, 把它们的方程联立起来, 所得的方程组就表示空间直线 L.

二、空间直线的对称式方程与参数方程

方向向量: 如果一个非零向量平行于一条已知直线, 这个向量就叫做这条直线的方向向量. 容易知道, 直线上任一向量都平行于该直线的方向向量.

确定直线的条件: 当直线 L 上一点 $M_0(x_0, y_0, x_0)$和它的一方向向量 $\boldsymbol{s}=(m, n, p)$为已知时, 直线 L 的位置就完全确定了.

直线方程的确定: 已知直线 L 通过点 $M_0(x_0, y_0, x_0)$, 且直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(m, n, p)$, 求直线

L 的方程.

设 $M(x, y, z)$在直线 L 上的任一点, 那么

$(x-x_0, y-y_0, z-z_0)//\boldsymbol{s}$,

从而有

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

这就是直线 L 的方程, 叫做直线的对称式方程或点向式方程.

注: 当 m, n, p 中有一个为零, 例如 $m=0$, 而 $n, p\neq 0$ 时, 这方程组应理解为

$$\begin{cases}x=x_0\\ \dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}\end{cases};$$

当 m, n, p 中有两个为零, 例如 $m=n=0$, 而 $p\neq 0$ 时, 这方程组应理解为

$$\begin{cases}x-x_0=0\\ y-y_0=0\end{cases}.$$

直线的任一方向向量 $\boldsymbol{s}$ 的坐标 m、n、p 叫做这直线的一组方向数, 而向量 $\boldsymbol{s}$ 的方向余弦叫做该直线的方向余弦.

由直线的对称式方程容易导出直线的参数方程.

设 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}=t$, 得方程组

$$\begin{cases}x=x_0+mt\\ y=y_0+nt\\ z=z_0+pt\end{cases}.$$

此方程组就是直线的参数方程.

例 1 用对称式方程及参数方程表示直线 $\begin{cases}x+y+z=1\\ 2x-y+3z=4\end{cases}$.

解 先求直线上的一点. 取 $x=1$, 有

$$\begin{cases}y+z=-2\\ -y+3z=2\end{cases}.$$

解此方程组, 得 $y=-2$, $z=0$, 即$(1, -2, 0)$就是直线上的一点.

再求这直线的方向向量 $\boldsymbol{s}$. 以平面 $x+y+z=-1$ 和 $2x-y+3z=4$ 的法线向量的向量积作为直线的方向向量 $\boldsymbol{s}$:

$$\boldsymbol{s}=(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\times(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}.$$

因此, 所给直线的对称式方程为

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{-3}.$$

令 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{-3}=t$, 得所给直线的参数方程为

$$\begin{cases} x=1+4t \\ y=-2-t \\ z=-3t \end{cases}.$$

提示: 当 x=1 时, 有 $\begin{cases} y+z=-2 \\ -y+3z=2 \end{cases}$, 此方程组的解为 y=−2, z=0.

$$\boldsymbol{s}=(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\times(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}.$$

令 $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{-3}=t$, 有 $x=1+4t, y=-2-t, z=-3t$.

三、两直线的夹角

两直线的方向向量的夹角(通常指锐角)叫做两直线的夹角.

设直线 L_1 和 L_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=(m_1, n_1, p_1)$和 $\boldsymbol{s}_2=(m_2, n_2, p_2)$, 那么 L_1 和 L_2 的夹角φ就是 $(\boldsymbol{s}_1\hat{,}\boldsymbol{s}_2)$ 和 $(-\boldsymbol{s}_1\hat{,}\boldsymbol{s}_2)=\pi-(\boldsymbol{s}_1\hat{,}\boldsymbol{s}_2)$ 两者中的锐角, 因此 $\cos\varphi=|\cos(\boldsymbol{s}_1\hat{,}\boldsymbol{s}_2)|$. 根据两向量的夹角的余弦公式, 直线 L_1 和 L_2 的夹角φ可由

$$\cos\varphi=|\cos(\boldsymbol{s}_1\hat{,}\boldsymbol{s}_2)|=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

来确定.

从两向量垂直、平行的充分必要条件立即推得下列结论:

设有两直线 L_1: $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$, L_2: $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$, 则

$L_1\perp L_2 \Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$;

$L_1 /\!/ L_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$.

例 2 求直线 L_1: $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{1}$ 和 L_2: $\frac{x}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{-1}$ 的夹角.

解 两直线的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=(1, -4, 1)$和 $\boldsymbol{s}_2=(2, -2, -1)$. 设两直线的夹角为$\varphi$, 则

$$\cos\varphi=\frac{|1\times2+(-4)\times(-2)+1\times(-1)|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

四、直线与平面的夹角

当直线与平面不垂直时, 直线和它在平面上的投影直线的夹角φ称为直线与平面的夹角, 当直线与平面垂直时, 规定直线与平面的夹角为 $\frac{\pi}{2}$.

设直线的方向向量 $\boldsymbol{s}=(m, n, p)$, 平面的法线向量为 $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$, 直线与平面的夹角为φ, 那么 $\varphi=|\frac{\pi}{2}-(\boldsymbol{s}\hat{,}\boldsymbol{n})|$, 因此 $\sin\varphi=|\cos(\boldsymbol{s}\hat{,}\boldsymbol{n})|$. 按两向量夹角余弦的坐标表示式, 有

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

因为直线与平面垂直相当于直线的方向向量与平面的法线向量平行, 所以, 直线与平面垂直相当于

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

因为直线与平面平行或直线在平面上相当于直线的方向向量与平面的法线向量垂直, 所以, 直线与平面平行或直线在平面上相当于

$$Am+Bn+Cp=0.$$

设直线 L 的方向向量为(m, n, p), 平面Π的法线向量为(A, B, C), 则

$$L\perp\Pi\Leftrightarrow\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p};$$

$$L//\Pi\Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0.$$

例 3 求过点$(1, -2, 4)$且与平面 $2x-3y+z-4=0$ 垂直的直线的方程.

解 平面的法线向量$(2, -3, 1)$可以作为所求直线的方向向量. 由此可得所求直线的方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-4}{1}.$$

五、杂例

例 4 求与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行且过点$(-3, 2, 5)$的直线的方程.

解 平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线的方向向量就是所求直线的方向向量 $\boldsymbol{s}$,

因为 $$\boldsymbol{s}=(\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{k})\times(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 0 & -4\\ 2 & -1 & -5\end{vmatrix}=-(4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}),$$

所以所求直线的方程为

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{1}.$$

例 5 求直线 $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$ 与平面 $2x+y+z-6=0$ 的交点.

解 所给直线的参数方程为

$$x=2+t,\ y=3+t,\quad z=4+2t,$$

代入平面方程中, 得

$$2(2+t)+(3+t)+(4+2t)-6=0.$$

解上列方程, 得 $t=-1$. 将 $t=-1$ 代入直线的参数方程, 得所求交点的坐标为

$x=1,\quad y=2,\quad z=2.$

例 6 求过点(2, 1, 3)且与直线 $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程.

解 过点(2, 1, 3)与直线 $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$ 垂直的平面为

$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$, 即 $3x+2y-z=5$.

直线 $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$ 与平面 $3x+2y-z=5$ 的交点坐标为 $(\frac{2}{7},\ \frac{13}{7},\ -\frac{3}{7})$.

以点(2, 1, 3)为起点, 以点 $(\frac{2}{7},\ \frac{13}{7},\ -\frac{3}{7})$ 为终点的向量为

$$(\frac{2}{7}-2,\ \frac{13}{7}-1,\ -\frac{3}{7}-3)=-\frac{6}{7}(2,\ -1,\ 4).$$

所求直线的方程为

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}.$$

例 6′ 求过点(2, 1, 2)且与直线 $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$ 垂直相交的直线的方程.

解 过已知点与已知直线相垂直的平面的方程为

$(x-2)+(y-1)+2(z-2)=0$, 即 $x+y+2z=7$.

此平面与已知直线的交点为(1, 2, 2).

所求直线的方向向量为

$\boldsymbol{s}=(1, 2, 2)-(2, 1, 2)=(-1, 1, 0)$,

所求直线的方程为

$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{0},\ 即 \begin{cases}\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{1}\\ z-2=0\end{cases}.$$

提示: 求平面 $x+y+2z=7$ 与直线 $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$ 的交点:

直线的参数方程为 $x=2+t, y=3+t, z=4+2t$, 代入平面方程得

$(2+t)+(3+t)+2(4+2t)=7$,

解得 $t=-1$, 代入直线的参数方程得 $x=1, y=2, z=2$.

平面束: 设直线 L 的一般方程为

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases},$$

其中系数 A_1、B_1、C_1 与 A_2、B_2、C_2 不成比例. 考虑三元一次方程:

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$,

即 $(A_1+\lambda A_2)x+(B_1+\lambda B_2)y+(C_1+\lambda C_1)z+D_1+\lambda D_2=0$,

其中λ为任意常数. 因为系数 A_1、B_1、C_1 与 A_2、B_2、C_2 不成比例, 所以对于任何一个λ值, 上述方程的系数不全为零, 从而它表示一个平面. 对于不同的λ值, 所对应的平面也不同, 而且这些平面

都通过直线 L ，也就是说, 这个方程表示通过直线 L 的一族平面. 另一方面, 任何通过直线 L 的平面也一定包含在上述通过 L 的平面族中.

通过定直线的所有平面的全体称为平面束.

方程 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$ 就是通过直线 L 的平面束方程.

例 7 求直线 $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$ 上的投影直线的方程.

解 设过直线 $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 的平面束的方程为

$$(x+y-z-1)+\lambda(x-y+z+1)=0,$$

即

$$(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+\lambda)z+(-1+\lambda)=0,$$

其中λ为待定的常数. 这平面与平面 $x+y+z=0$ 垂直的条件是

$$(1+\lambda)\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 1+(-1+\lambda)\cdot 1=0,$$

即

$$\lambda=-1.$$

将$\lambda=-1$ 代入平面束方程得投影平面的方程为 $2y-2z-2=0$,

即

$$y-z-1=0.$$

所以投影直线的方程为

$$\begin{cases} y-z-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}.$$