汝当更求古之哲王以为师, 如吾, 不足法也. 夫取法于上,
仅得其中; 取法于中, 不免为下.

唐太宗《帝范》

《基础偏微分方程》[1]习题 1.1.20: 证明二阶齐次线性方程的通解可以表示成任意两个线性无关解的线性组合

叶卢庆
杭州师范大学理学院, 学号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 11. 7

通过完成下列步骤, 证明二阶齐次线性方程 $ay''+by'+cy=0$ [其中 a,b,c 为常数且 $a\neq 0$.] 的通解具有 $\phi(x,c_1,c_2)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ 的形式, 其中 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是任意两个线性无关的解. 这里假设所考虑的函数处处具连续的二阶导数 (这是为了让隐函数定理发挥作用).

根据通解的定义, 我们只用证明 c_1 和 c_2 是函数独立的, 也就是证明 $\forall x\in I$,

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial\phi}{\partial c_1}(x) & \frac{\partial\phi}{\partial c_2}(x)\\ \frac{\partial\phi'}{\partial c_1}(x) & \frac{\partial\phi'}{\partial c_2}(x)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}\neq 0.$$

结合如下两个引理: (b) 和 (a), 我们可以直接得到上述结论. 注意, 引理 (a) 的意思是, 两个函数线性无关, 表明存在 $x_0\in I$, 使得 Wronskian 不为 0. 这一点结合引理 (b), 得到 Wronskian 在整个 I 上不为 0.

习题 (1.1.20,(b)). ***Abel* 公式**: 证明如 $y(x),z(x)$ 是 $ay''+by'+cy=0$ 的任意解, 则 $W[y,z](x)$ 是 $aW'(x)+bW(x)=0$ 的解. 于是存在依赖于 y

[1]David Bleecker,George Csordas 著, 李俊杰译. 高等教育出版社, 丘成桐主编数学翻译丛书.

和 z 的常数 C, 有 $W[y,z](x) = C\exp(-bx/a)$.

探索与证明. 我们有

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{1}$$

$$az'' + bz' + cz = 0. \tag{2}$$

把 a,b,c 看作未知数,(1) 和 (2) 是两个方程, 显然不能解出 a,b,c. 但是要寻找它们之间的关系应该还是可以做到的. 将方程(1) 的两边同时乘以 z, 得到

$$azy'' + bzy' = -czy. \tag{3}$$

将方程 (2) 的两边同时乘以 y, 得到

$$ayz'' + byz' = -czy. \tag{4}$$

方程 (3) 和方程 (4) 相减, 可得

$$azy'' - ayz'' + bzy' - byz' = 0. \tag{5}$$

(5) 即

$$a\begin{vmatrix} z & y \\ z'' & y'' \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} z & y \\ z' & y' \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

于是 $aW'(x) + bW(x) = 0$ 成立. □

习题 (1.1.20,(a)). 证明两函数 $f(x), g(x)$($\frac{f(x)}{g(x)}$ 或 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 是可微的) 在某个区间 I 上线性相关的充要条件是它们的 *Wronskian*

$$W[f,g](x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}$$

对所有的 $x \in I$ 为零.

证明. 当 $f(x), g(x)$ 在 I 上线性相关, 说明存在不全为 0 的实数 λ_1, λ_2, 使得

$$\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x) = 0. \tag{7}$$

因此

$$\lambda_1 f'(x) + \lambda_2 g'(x) = 0. \tag{8}$$

把上面的两个方程联立, 把 λ_1, λ_2 看作未知量. 由于

$$\begin{vmatrix} f(x) & 0 \\ f'(x) & 0 \end{vmatrix}$$

和

$$\begin{vmatrix} 0 & g(x) \\ 0 & g'(x) \end{vmatrix}$$

都为 0, 因此根据 Cramer 法则, 为了使得 λ_1, λ_2 存在且不全为 0, 必须使

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = 0.$$

反之, 如果

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = 0,$$

则根据 Cramer 法则,(7) 和 (8) 中的 λ_1, λ_2 也存在不全为 0 的解. $\square$