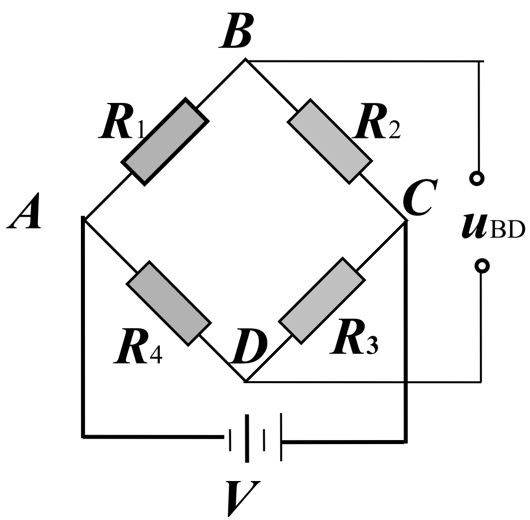
第三讲　测量电桥的特性及应用

§ 3-1　测量电桥的基本特性和温度补偿

一、　测量电桥的基本特性

$$\Delta u_{BD} = \frac{V}{4}K(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4)$$



1.

相邻桥臂的电阻有大小相等、符号一致的变化，

或相对桥臂的电阻有大小相等、符号相反的变化，

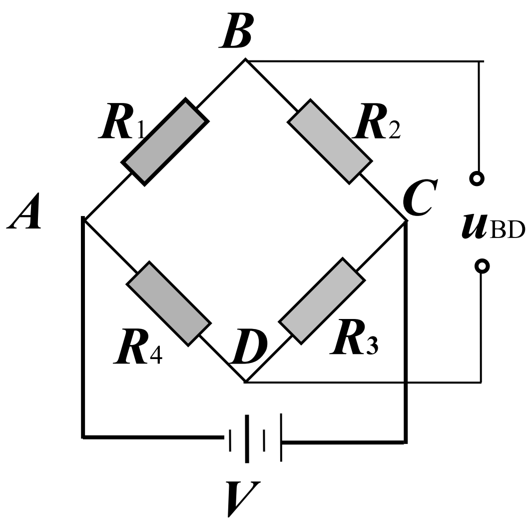
不影响电桥的输出。

第三讲　测量电桥的特性及应用

§ 3-1　测量电桥的基本特性和温度补偿

一、　测量电桥的基本特性

$$\Delta u_{BD} = \frac{V}{4} K(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4)$$



2.

相邻桥臂的电阻有大小相等、符号相反的变化，

或相对桥臂的电阻有大小相等、符号一致的变化，

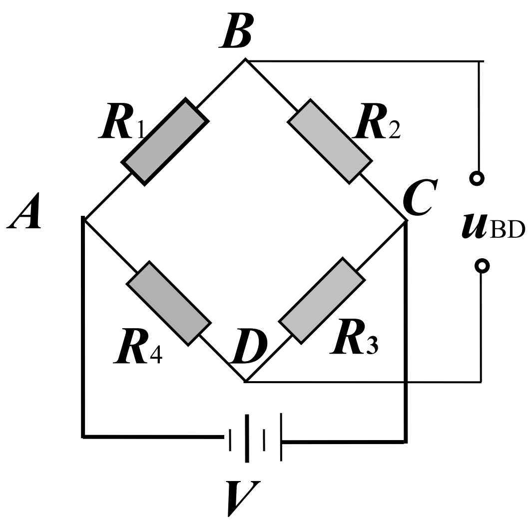
则电桥的输出加倍，即电桥的灵敏度提高为原来的两倍。

第三讲　测量电桥的特性及应用

§3-1　测量电桥的基本特性和温度补偿

一、　测量电桥的基本特性

$$\Delta u_{BD} = \frac{V}{4} K(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4)$$

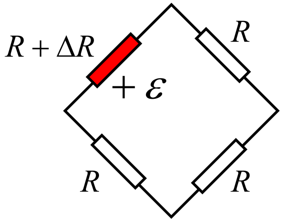


3.

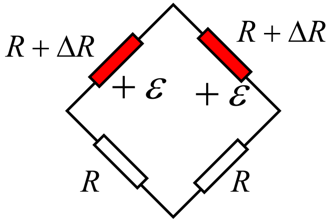
若相邻桥臂的电阻有大小相等、符号相反的变化，

而相对桥臂的电阻有大小相等、符号相同的变化，

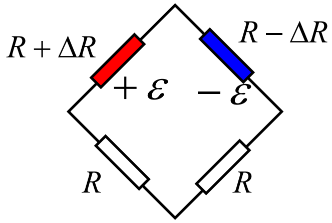
则电桥的输出将增加三倍，即电桥的灵敏度提高为原来的四倍。



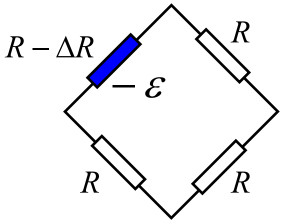
$(+\varepsilon)$



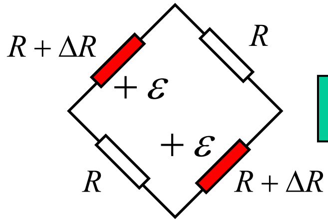
0



$(+2\varepsilon)$

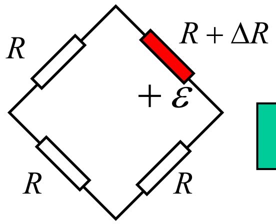


$(-\varepsilon)$

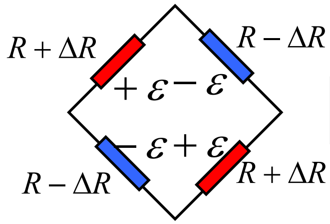


$(+2\varepsilon)$

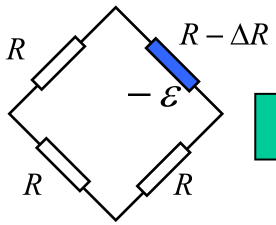
?



$(-\varepsilon)$



$(+4\varepsilon)$



$(+\varepsilon)$

二、 温度影响及补偿方法

（一）、温度影响

1．当环境温度变化$\Delta t\,^{0}C$时，由于敏感丝栅材料的电阻温度系数$\alpha_{\text{丝}}$而产生的电阻相对变化为

$$\frac{\Delta R_{1t}}{R}=\alpha_{\text{丝}}\Delta t$$

2．当环境温度变化$\Delta t\,^{0}C$时，由于敏感丝栅材料和被测构件材料的膨胀系数不同应变片被迫拉长或缩短，而产生一定的附加应变，其值为

$$\varepsilon_{\text{附}}=\beta_{\text{构}}\Delta t-\beta_{\text{丝}}\Delta t$$

式中：

$\beta_{\text{构}}$ ——构件材料的线膨胀系数

$\beta_{\text{丝}}$ ——敏感丝栅材料的线膨胀系数

$$\frac{\Delta R_{1t}}{R}=\alpha_{丝}\Delta t \qquad \varepsilon_{附}=\beta_{构}\Delta t-\beta_{丝}\Delta t$$

相应的电阻变化为

$$\frac{\Delta R_{2t}}{R}=K(\beta_{构}-\beta_{丝})\Delta t$$

温度变化产生的总相对电阻变化为

$$\frac{\Delta R_{t}}{R}=\alpha_{丝}\Delta t+K(\beta_{构}-\beta_{丝})\Delta t$$

对应的应变和应力为

$$\sigma_{t}=E\varepsilon_{t}=E\frac{\Delta R_{t}/R}{K}=\frac{E}{K}\alpha_{丝}\Delta t+E(\beta_{构}-\beta_{丝})\Delta t$$

$$\sigma_t = E\varepsilon_t = E\frac{\Delta R_t / R}{K} = \frac{E}{K}\alpha_{丝}\Delta t + E(\beta_{构} - \beta_{丝})\Delta t$$

例如：粘贴在钢试件上的康铜丝应变片，当温度变化1 ^{0}C 时的温度应力。

$E = 200\text{GPa}$ $\alpha_{丝} = 20\times10^{-6} / {}^{o}C$ $K = 2$

$\beta_{丝} = 15\times10^{-6} / {}^{o}C$ $\beta_{构} = 11\times10^{-6} / {}^{o}C$

$$\sigma_t = \frac{200\times10^3}{2}\times20\times10^{-6}\times1 + 200\times10^3\times(11-15)\times10^{-6}\times1$$

$$= 1.2\ (\text{MPa})$$

（二）、补偿方法

温度自补偿应变片法——

通过对应变片的敏感栅材料和制造工艺上采取各种措施，使 K、$\alpha_{丝}$、$\beta_{构}$、$\beta_{丝}$ 几个系数互相配合，当应变片在一定的温度范围内时，使 $\Delta R_t = 0$。 常用于中、高温下的应变测量。

桥路补偿法——

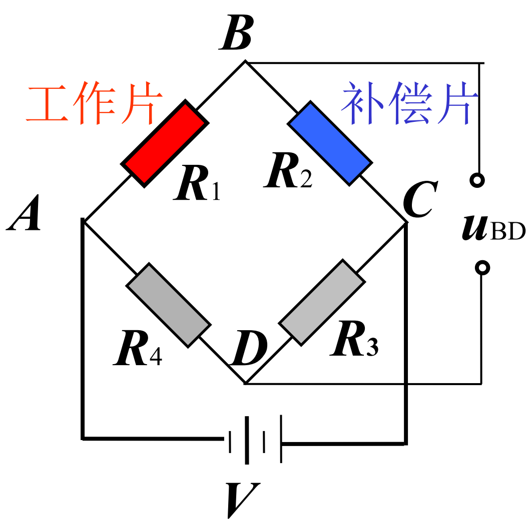
1．补偿块法

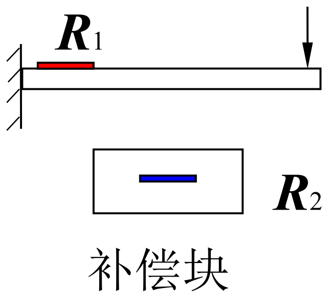
2．工作片法

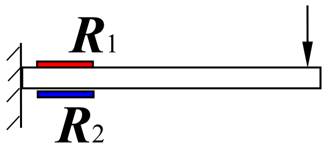
$$\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$$

灵敏度提高一倍

注：应变片灵敏系数相同、粘贴工艺相同、材料相同







§3-2　电阻应变计在电桥中的接线方法

目的：

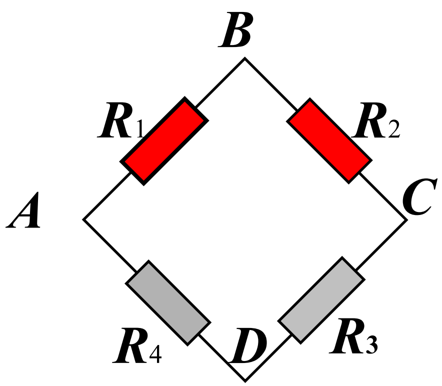
1、 实现温度补偿

2、从复杂变形量中测出所需求的某一应变分量

3、增大应变仪的读数，减少读数误差

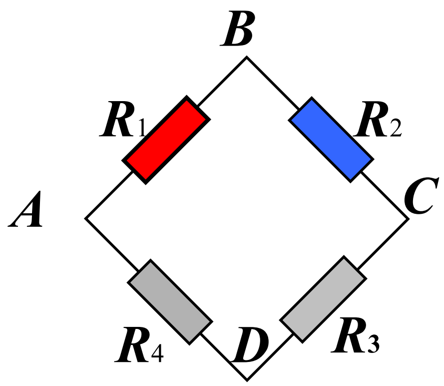
一、半桥接线法

对于等臂电桥



1、半桥测量

$$\varepsilon_{\mathrm{d}} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

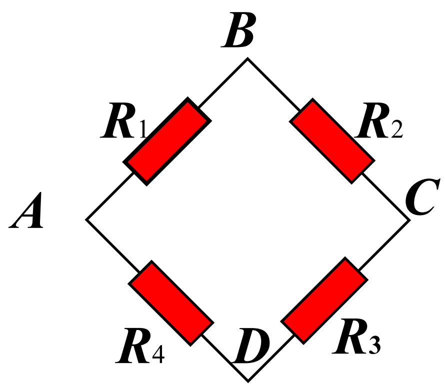


2、单臂测量

$$\varepsilon_{\mathrm{d}} = \varepsilon$$

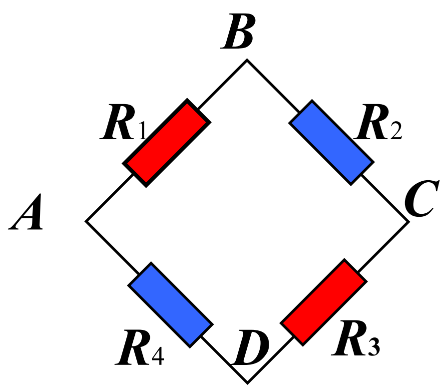
二、全桥接线法

对于等臂电桥



1、全桥测量

$$\varepsilon_{\mathrm{d}} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4$$

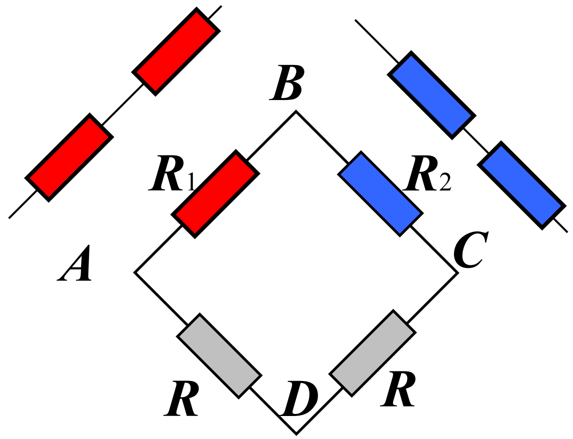


2、对臂测量

$$\varepsilon_{\mathrm{d}} = \varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(3)}$$

三、串联和并联式接线法

1、串联接线法



$$\varepsilon_1 = \frac{1}{K}\left(\frac{\Delta R_1}{R_1}\right)$$

$$= \frac{1}{K}\frac{\Delta R_1' + \cdots + \Delta R_n'}{nR} = \frac{1}{n}\left(\varepsilon_1' + \varepsilon_2' + \cdots + \varepsilon_n'\right)$$

结论：

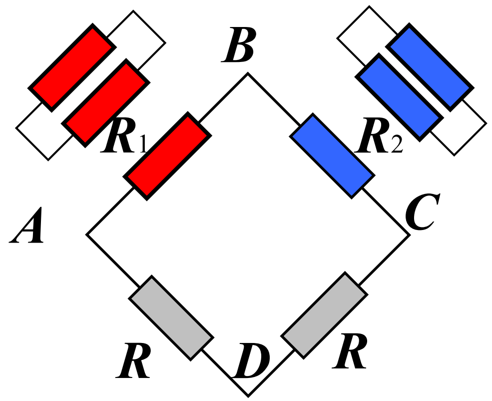
1、桥臂的应变为各个应变计应变值的算术平均值；

2、当桥臂中串联的各个应变计的应变值相同时，桥臂的应变就等于串联的单个应变计的应变值；

3、串联后的桥臂电阻增大，在限定电流下，可以提高供桥电压，相应地使读数应变增大；

2、并联接线法

$$R_1=\frac{R}{n} \qquad \Delta R_1=\frac{1}{\frac{1}{\Delta R_1'}+\cdots+\frac{1}{\Delta R_n'}}$$



$$\varepsilon_1=\frac{1}{K}\left(\frac{\Delta R_1}{R_1}\right)=\frac{1}{K}\frac{\frac{1}{\frac{1}{\Delta R_1'}+\cdots+\frac{1}{\Delta R_n'}}}{\frac{R}{n}}$$

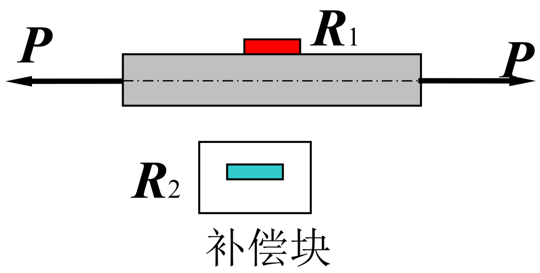
结论：

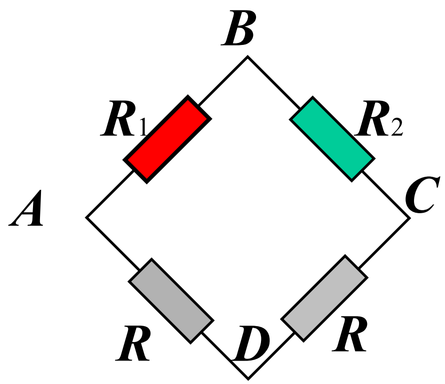
1、当同一桥臂中所有应变计的电阻改变量都相同时，桥臂应变为； $\varepsilon_1=\varepsilon'$

桥臂的应变就等于单个应变计的应变值；

2、并联后的桥臂电阻减小，在通过应变计的电流不超过最大工作电流的条件下，电桥的输出电流可以相应地提高n倍。

§ 3-3 测量电桥的应用



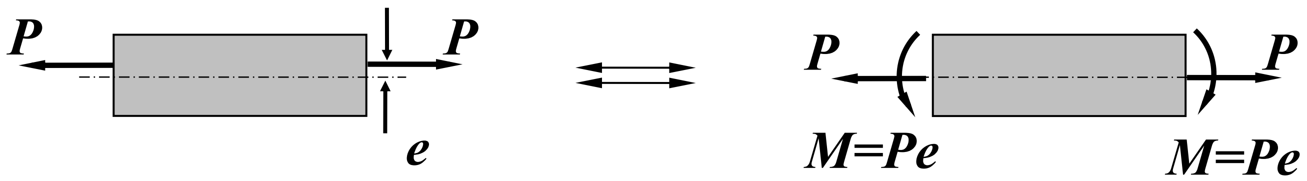


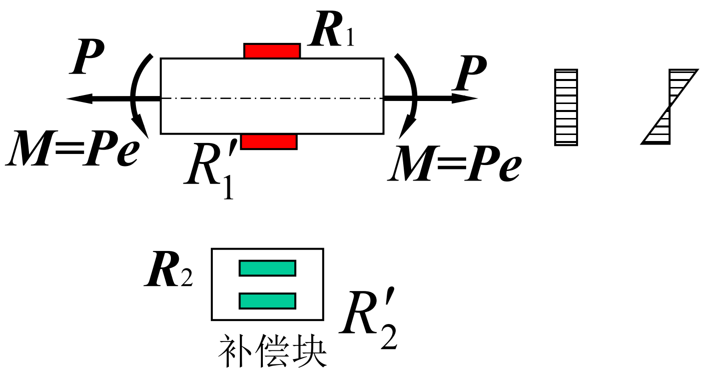
方法：最简单的方法是半桥补偿块补偿

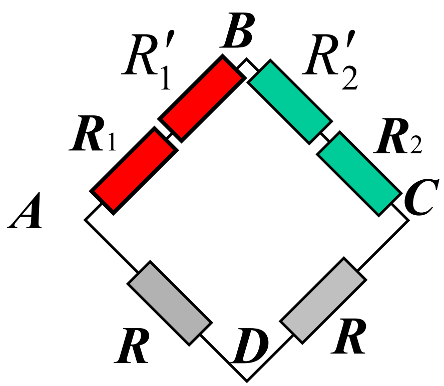
缺点：不能消除偏心弯矩引起的附加应变

以下介绍另两种方法：

一、半桥四片补偿块补偿法测拉（压）







工作片：

$$\Delta R_1 = \Delta R_P + \Delta R_W + \Delta R_{1t}$$

$$\Delta R_1' = \Delta R_P - \Delta R_W + \Delta R_{1t}'$$

补偿片：

$$\Delta R_2 = \Delta R_{2t}$$

$$\Delta R_2' = \Delta R_{2t}'$$

由于

$$\Delta R_{1t} = \Delta R_{1t}' = \Delta R_{2t} = \Delta R_{2t}'$$

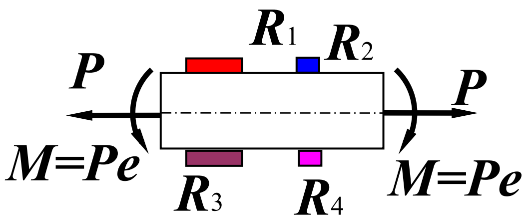
所以

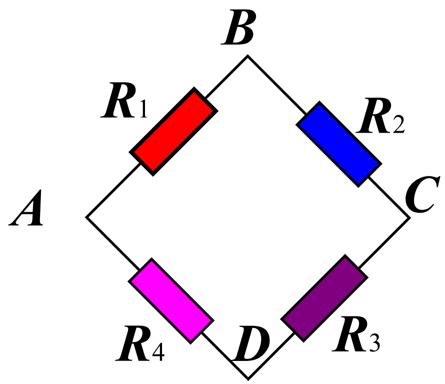
$$\Delta u_{BD} = \frac{V}{4}\frac{\Delta R_P + \Delta R_W + \Delta R_{1t} + \Delta R_P - \Delta R_W + \Delta R_{1t}' - \Delta R_{2t} - \Delta R_{2t}'}{2R} = \frac{V}{4}\frac{\Delta R_P}{R}$$

消除了偏心影响。

思考?：如何测偏心距e。

二、全桥四片测拉（压）





各桥臂应变片阻值变化为：

$$\Delta R_1=\Delta R_P+\Delta R_W+\Delta R_{1t}\qquad \Delta R_2=-\mu\Delta R_P-\mu\Delta R_W+\Delta R_{2t}$$

$$\Delta R_3=\Delta R_P-\Delta R_W+\Delta R_{3t}\qquad \Delta R_4=-\mu\Delta R_P+\mu\Delta R_W+\Delta R_{4t}$$

由于

$$\Delta R_{1t}=\Delta R_{2t}=\Delta R_{3t}=\Delta R_{4t}$$

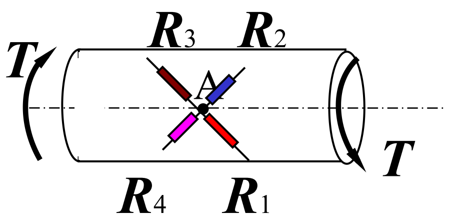
所以

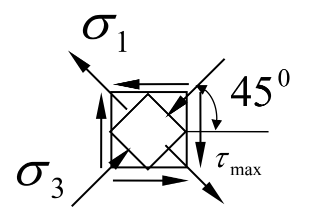
$$\Delta u_{BD}=\frac{V}{4}\Big(\frac{\Delta R_P+\Delta R_W+\Delta R_{1t}}{R}-\frac{-\mu\Delta R_P-\mu\Delta R_W+\Delta R_{2t}}{R}$$

$$+\frac{\Delta R_P-\Delta R_W+\Delta R_{31t}}{R}-\frac{-\mu\Delta R_P+\mu\Delta R_W+\Delta R_{4t}}{R}\Big)=\frac{V}{4}[2(1+\mu)]\frac{\Delta R_P}{R}$$

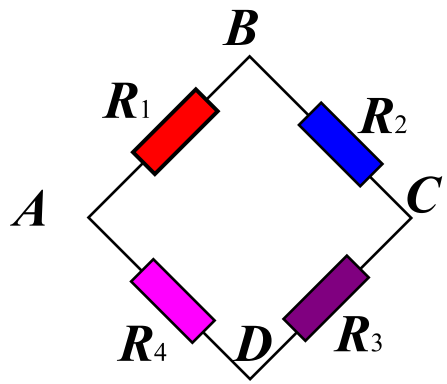
消除了偏心影响，读数应变为拉伸引起的真实应变的$2(1+\mu)$倍。

三、　平面应力状态下的测量（主应力方向已知）





$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_{\max}$$



各桥臂应变片阻值变化为：

$$\Delta R_1 = \Delta R_T + \Delta R_{1t} \qquad \Delta R_2 = -\Delta R_T + \Delta R_{2t}$$

$$\Delta R_3 = \Delta R_T + \Delta R_{3t} \qquad \Delta R_4 = -\Delta R_T + \Delta R_{4t}$$

由于 $\Delta R_{1t} = \Delta R_{2t} = \Delta R_{3t} = \Delta R_{4t}$

所以 $$\Delta u_{BD} = \frac{V}{4}\left(\frac{\Delta R_T + \Delta R_{1t}}{R} - \frac{-\Delta R_T + \Delta R_{2t}}{R} + \frac{\Delta R_T + \Delta R_{3t}}{R} - \frac{-\Delta R_T + \Delta R_{4t}}{R}\right) = \frac{V}{4}\left[4\frac{\Delta R_T}{R}\right]$$

$$\longrightarrow \quad \varepsilon_T = \frac{\varepsilon_{仪}}{4}$$

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 - \mu\varepsilon_1) = \frac{E}{1+\mu}\varepsilon_1$$

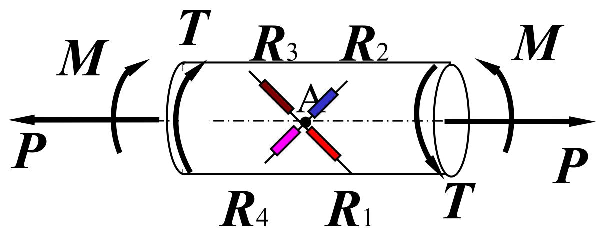
$$\tau_{\max} = \sigma_1$$

$$T = \tau_{\max} W_P = \frac{\pi E d^3}{16(1+\mu)}\varepsilon_1$$

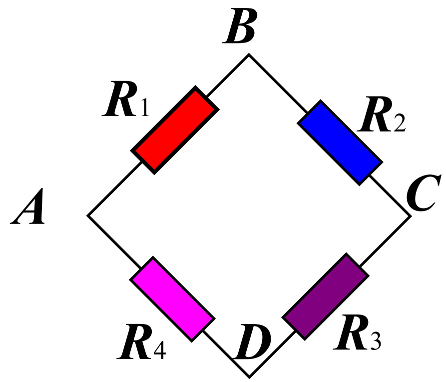
四、 组合变形时某种应变成份的测量

各桥臂应变片阻值变化为：

$$\Delta R_1 = \Delta R_P + \Delta R_W + \Delta R_T + \Delta R_{1t}$$



？ 利用此布片能否测量拉应变或弯曲应变，怎样接桥，应注意什么问题；

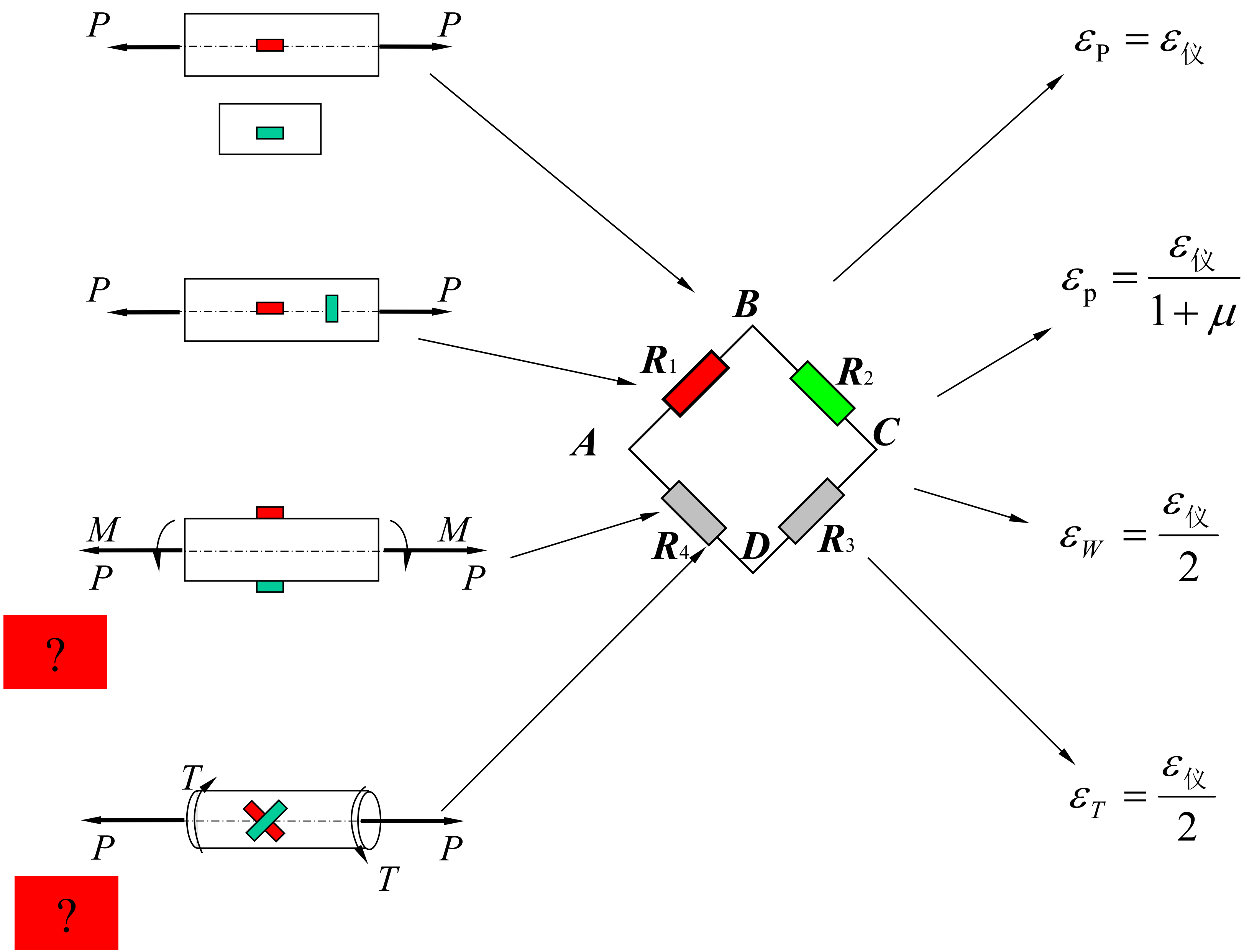


？设计测量拉应变或弯曲应变时最简单 的布片和接桥。

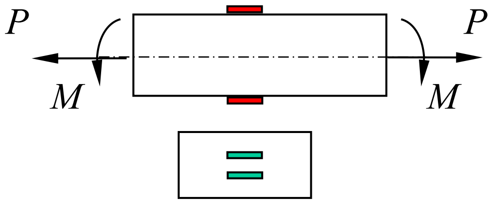
$$\Delta u_{BD} = \frac{V}{4}\left(\frac{\Delta R_P + \Delta R_W + \Delta R_K + \Delta R_{1t}}{R} - \frac{\Delta R_P - \Delta R_W - \Delta R_K + \Delta R_{2t}}{R}\right.$$

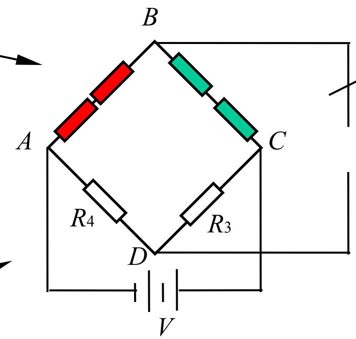
$$\left. + \frac{\Delta R_P - \Delta R_W + \Delta R_K + \Delta R_{3t}}{R} - \frac{\Delta R_P + \Delta R_W - \Delta R_K + \Delta R_{4t}}{R}\right) = \frac{V}{4}\left[4\frac{\Delta R_K}{R}\right]$$

仪器读数为扭转引起的真实应变数的四倍。


P
P
P
P
M
M
P
P
?
T
P
P
T
?
A
B
C
D
R1
R2
R3
R4
$\varepsilon_P = \varepsilon_{仪}$
$\varepsilon_p = \frac{\varepsilon_{仪}}{1+\mu}$
$\varepsilon_W = \frac{\varepsilon_{仪}}{2}$
$\varepsilon_T = \frac{\varepsilon_{仪}}{2}$

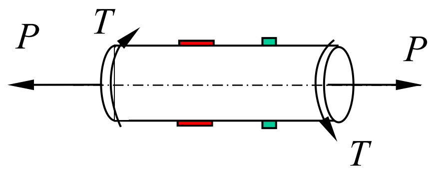
测拉应变





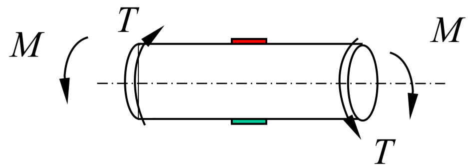
$$\varepsilon_{\mathrm{p}} = \varepsilon_{仪}$$

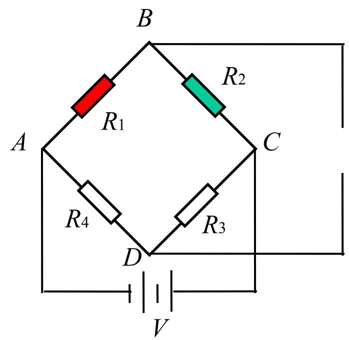
测拉应变



$$\varepsilon_{\mathrm{p}} = \frac{\varepsilon_{仪}}{1+\mu}$$

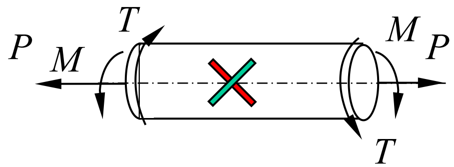
测弯曲应变





$$\varepsilon_{W} = \frac{\varepsilon_{仪}}{2}$$

讨论



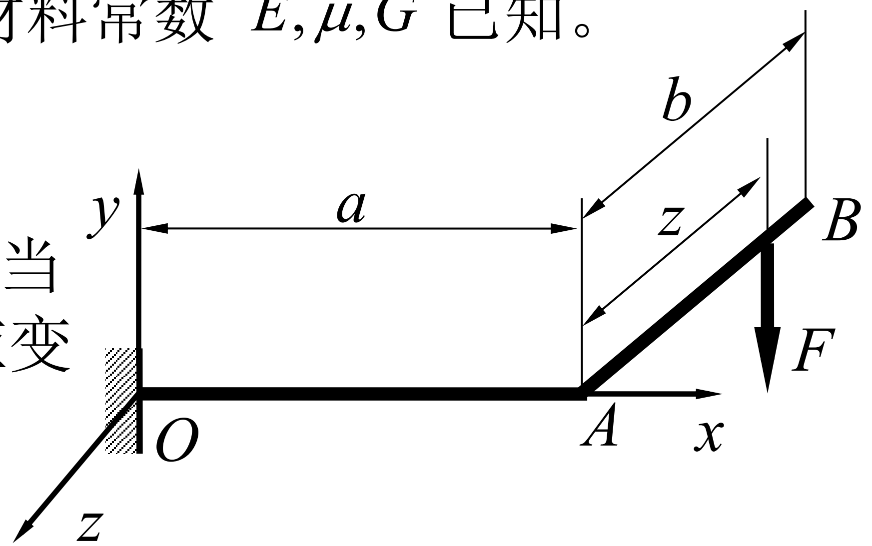
$$\varepsilon_{T} = \frac{\varepsilon_{仪}}{4}$$

$$\varepsilon_{p} = ?$$

$$\varepsilon_{W} = ?$$

图示直角曲拐，OA段直径d，材料常数 E,μ,G 已知。

设计一个应变测量方案，要求：



1、应变计必须布置在OA段的适当位置，可以使用多轴应变计（应变花），但不许设温度补偿片。

2、能够测出F的大小和位置。

3、画出应变计布片图和测量组桥图。

4、给出应变仪读数 ε_r 与待测数据的关系式及其分析推导过程。

1、布片、组桥

2、分析推导

$$\varepsilon_{R_a} = \varepsilon_M + \varepsilon_t$$

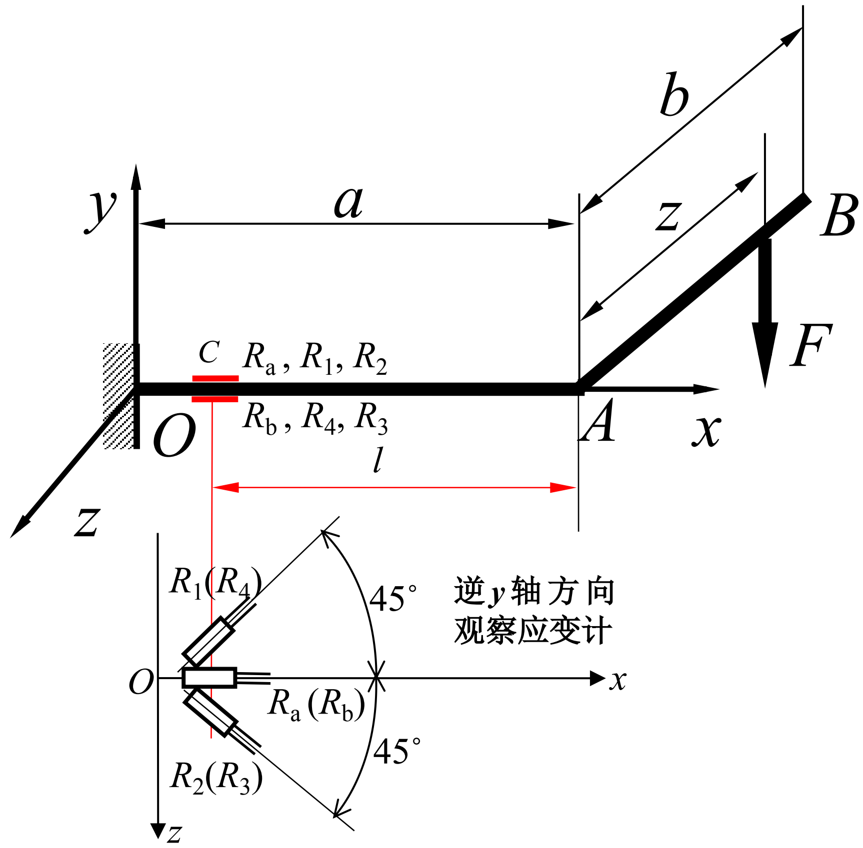
$$\varepsilon_{R_b} = -\varepsilon_M + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_{R_1} = \varepsilon_T + \varepsilon_M + \varepsilon_t$$

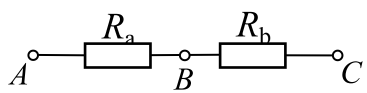
$$\varepsilon_{R_2} = -\varepsilon_T + \varepsilon_M + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_{R_3} = \varepsilon_T - \varepsilon_M + \varepsilon_t$$

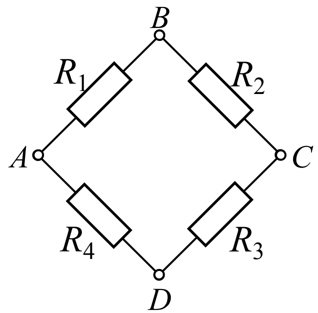
$$\varepsilon_{R_4} = -\varepsilon_T - \varepsilon_M + \varepsilon_t$$



布片方案



半桥



全桥

半桥

$$\varepsilon_{r_1} = \varepsilon_{R_a} - \varepsilon_{R_b} = 2\varepsilon_M$$

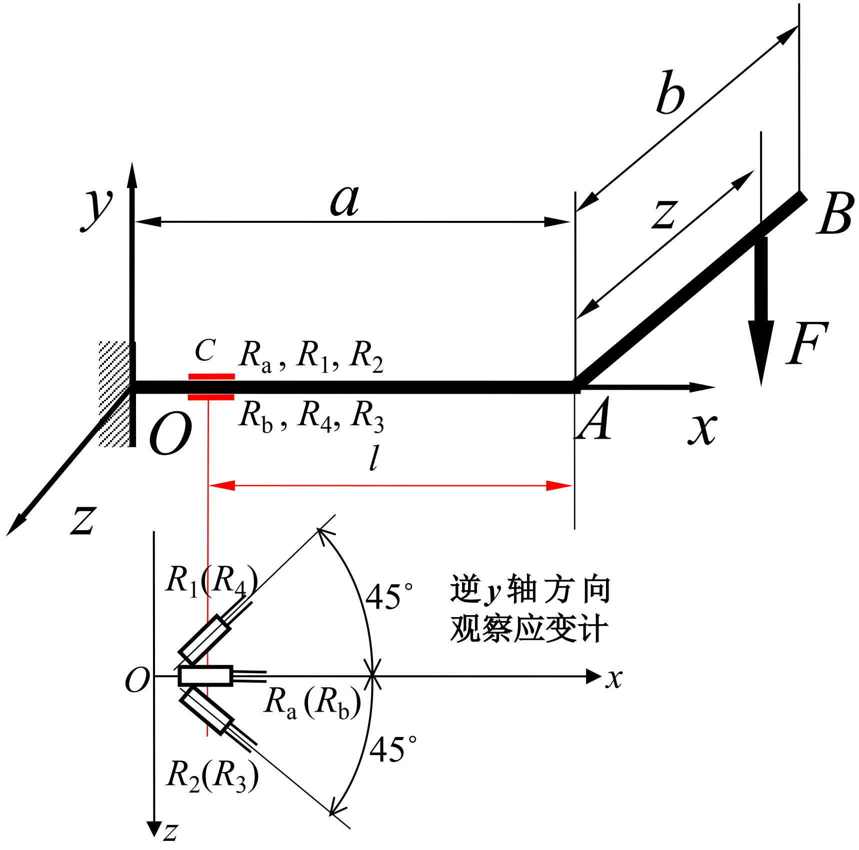
$$\varepsilon_{R_a} = \varepsilon_M + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_{R_b} = -\varepsilon_M + \varepsilon_t$$

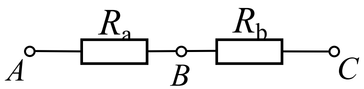
因为 $\varepsilon_M = \dfrac{\sigma_M}{E} = \dfrac{M}{EW}$

$$= \frac{Fl}{EW} = \frac{32Fl}{E\pi d^3}$$

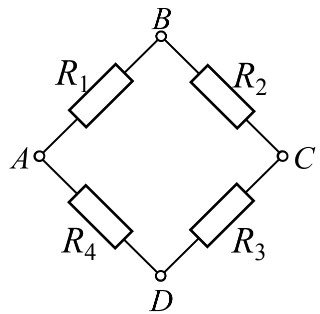
所以 $F = \dfrac{\pi d^3 E}{64l}\varepsilon_{r_1}$



布片方案



半桥



全桥

全桥

$$\varepsilon_{r_2} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4$$

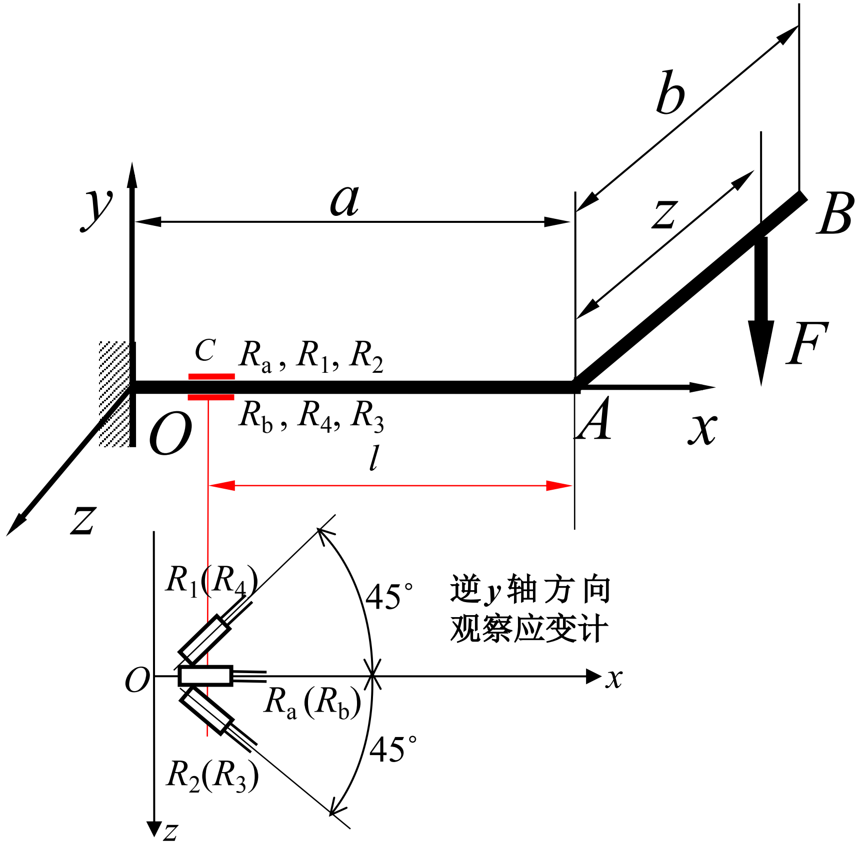
$$= 4\varepsilon_T$$

$$\varepsilon_{R_1} = \varepsilon_T + \varepsilon_M + \varepsilon_{\mathrm{t}}$$

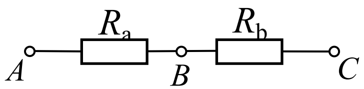
$$\varepsilon_{R_2} = -\varepsilon_T + \varepsilon_M + \varepsilon_{\mathrm{t}}$$

$$\varepsilon_{R_3} = \varepsilon_T - \varepsilon_M + \varepsilon_{\mathrm{t}}$$

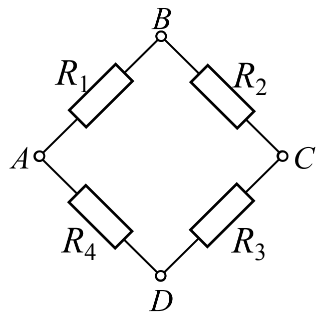
$$\varepsilon_{R_4} = -\varepsilon_T - \varepsilon_M + \varepsilon_{\mathrm{t}}$$



布片方案



半桥



全桥

全桥 $$F = \frac{\pi d^3 E}{64 l}\varepsilon_{r_1}$$

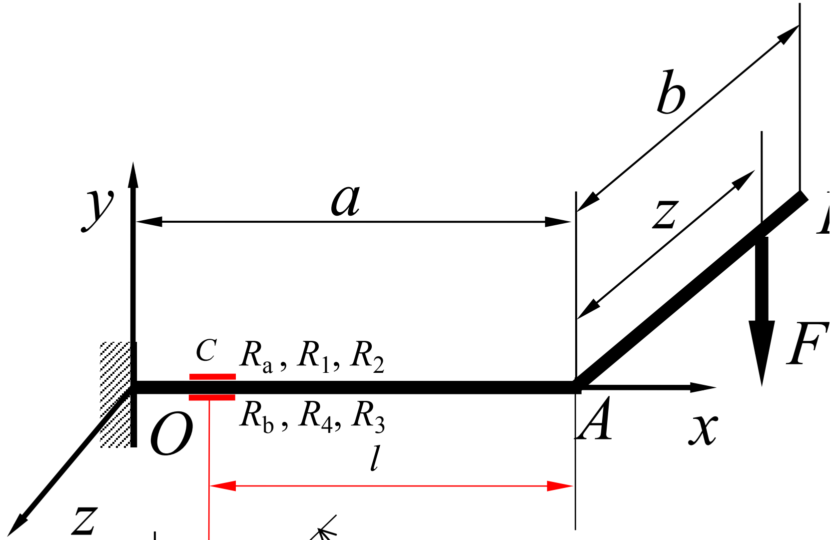
$$\varepsilon_{r_2} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4$$

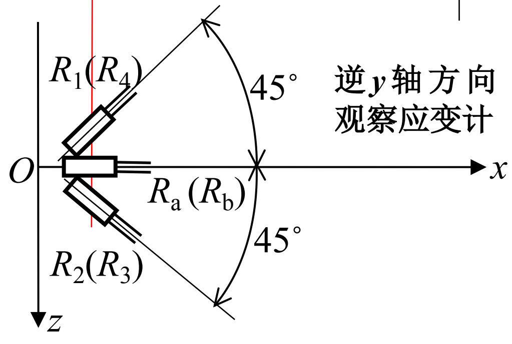
$$= 4\varepsilon_T$$

因为 $$\varepsilon_T = \frac{\gamma}{2} = \frac{\tau}{2G}$$

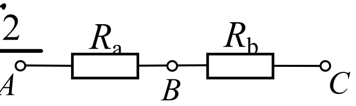
$$= \frac{T}{2GW_P} = \frac{16Fz}{2G\pi d^3}$$

所以 $$z = \frac{\pi d^3 G}{32F}\varepsilon_{r_2} = \frac{2Gl}{E}\frac{\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_1}}$$

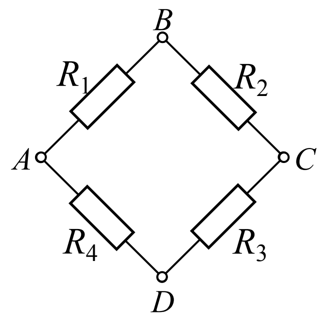




布片方案



半桥



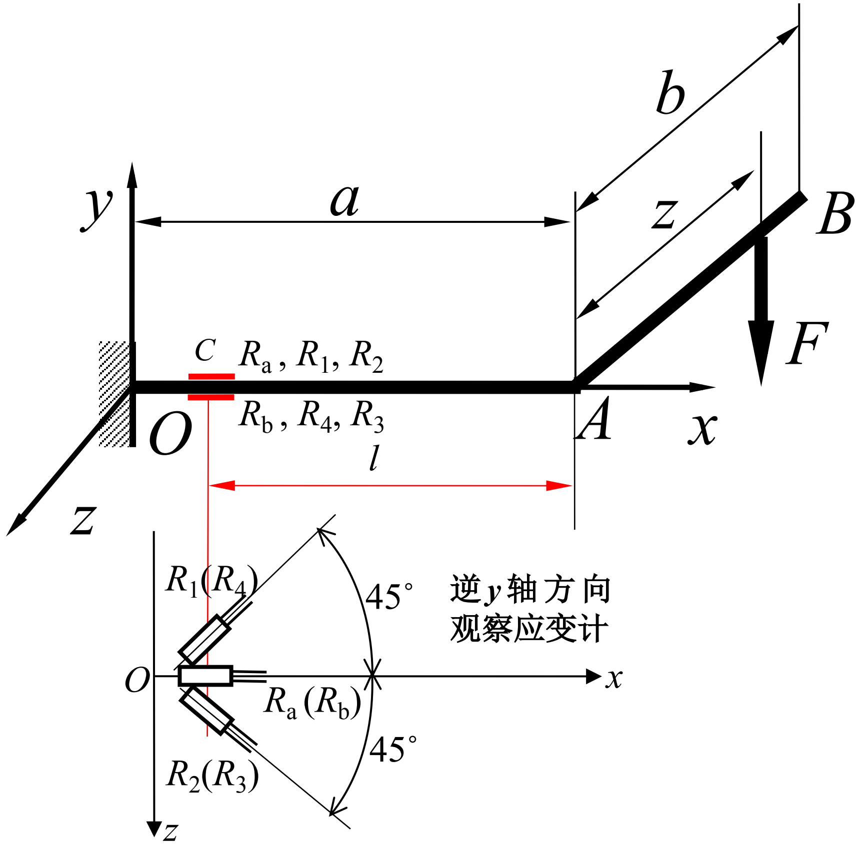
1、布片、组桥

2、分析推导

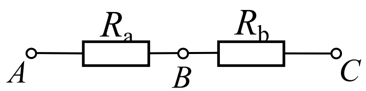
3、测量步骤

第一步：用Ra和Rb组成的半桥测得，并计算出F。

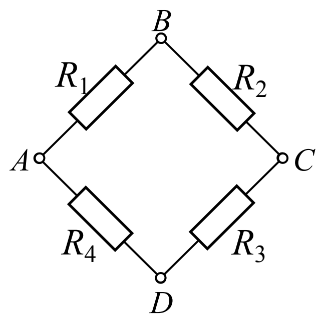
第二步： 用R1、R2 、R3和R4组成全桥测得，并计算出z 。



布片方案



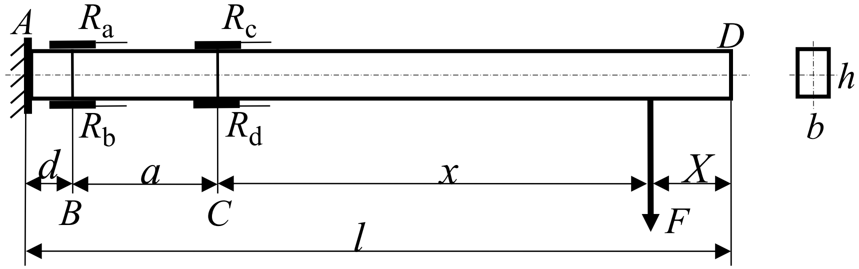
半桥



全桥

悬臂梁受力与贴片如图，

材料常数 E,μ,G 已知。



设计一个应变测量方案，要求：

1、测定F大小、方向、作用位置以及自由端D的挠度f。

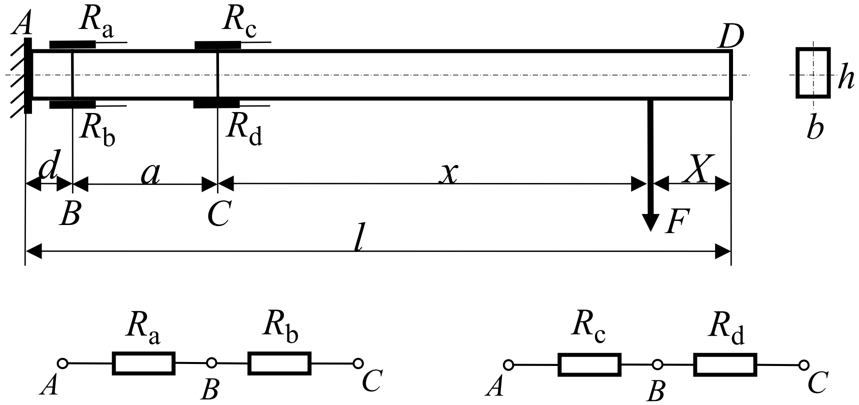
2、给出应变仪读数 ε_r 与待测数据的关系式及其分析推导过程，并画出组桥图。

3、对测量方法的灵敏度和精度作简要分析或说明。

提示：利用应变仪读数与F、x、a等相关参数的关系。

1、测量组桥方案

2、给出应变仪读数 ε_r 与待测数据的关系式及其分析推导



截面B

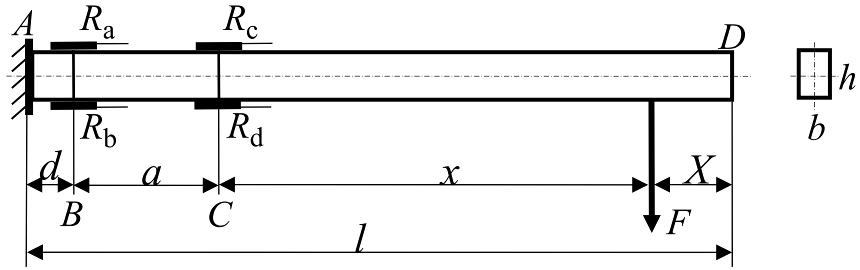
$$\varepsilon_{r1} = 2\varepsilon_M = 2\frac{\sigma_M}{E} = 2\frac{M}{WE} = 2\frac{F(x+a)}{WE}$$

或 $\varepsilon_{r1} = 2\frac{Fx}{WE} + 2\frac{Fa}{WE}$ 截面C $\varepsilon_{r2} = 2\frac{Fx}{WE}$ $F = \frac{\varepsilon_{r2}WE}{2x}$

$$\varepsilon_{r1} = 2\frac{F(x+a)}{WE} = 2\frac{\varepsilon_{r2}WE}{2x} \times \frac{(x+a)}{WE} = \varepsilon_{r2}\frac{x+a}{x} \qquad x = \frac{a\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2}}$$

$$F = \frac{\varepsilon_{r2}WE}{2\frac{a\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2}}} = \frac{WE(\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2})}{2a} = \frac{bh^2E(\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2})}{12a}$$

3、测量步骤



第一步，确定F的作用位置、大小及方向：

第二步，确定自由端挠度：

$$f_D = \frac{F(d+a+x)^2}{6EI}(3l-d-a-x)$$
$$= \frac{2F(d+a+x)^2}{Ebh^3}(3l-d-a-x)$$

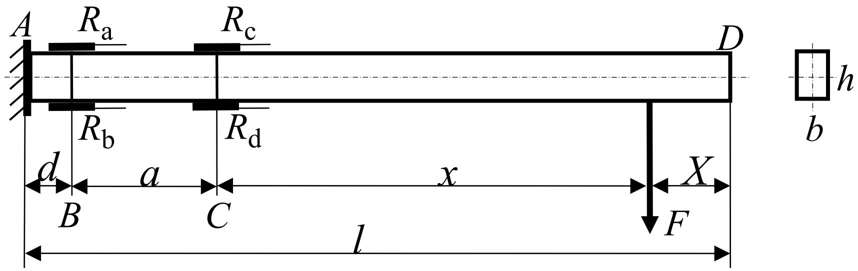
$$f_D = \frac{(d+a+x)^2(3l-d-a-x)}{6ha}(\varepsilon_{\mathrm{r1}}-\varepsilon_{\mathrm{r2}})$$

或

$$f_x = \frac{F(d+a+x)^3}{3EI} \qquad \theta_x = \frac{F(d+a+x)^2}{2EI}$$

$$f_D = f_x + X\theta_x$$

4、测量灵敏度和精度分析



(1) 由

$$\varepsilon_{r1}=2\frac{Fx}{WE}+2\frac{Fa}{WE} \qquad \varepsilon_{r2}=2\frac{Fx}{WE}$$

F、（$x+a$）的变化按正比关系影响 ε_{r1}的变化，从而响灵敏度；

F、x的变化按正比关系影响ε_{r2}的变化，从而响灵敏度；

W、E的变化按反比关系影响ε_{r1}和ε_{r2}的变化，从而响灵敏度。

(2) 由

$$\frac{\partial \varepsilon_{\mathrm{r1}}}{\partial F}=2\frac{(x+a)}{WE}\geq 2\frac{a}{WE} \qquad \frac{\partial \varepsilon_{\mathrm{r2}}}{\partial F}=2\frac{x}{WE}$$

$\frac{\partial \varepsilon_{\mathrm{r2}}}{\partial F}\propto x$ ，当x较小（接近于0）时，

$\varepsilon_{\mathrm{r2}}$ 反应F变化的灵敏度较低；

$\varepsilon_{\mathrm{r1}}$ 对F的灵敏度总是大于 $\varepsilon_{\mathrm{r2}}$ 对F的灵敏度。

(3) 由

$$\frac{\partial \varepsilon_{\mathrm{r1}}}{\partial x}=\frac{\partial \varepsilon_{\mathrm{r2}}}{\partial x}=2\frac{F}{WE}$$

$\frac{\partial \varepsilon_{\mathrm{r1}}}{\partial x}=\frac{\partial \varepsilon_{\mathrm{r2}}}{\partial x}\propto F$ ，当F较小（接近于0）时，

$\varepsilon_{\mathrm{r1}}$ 和 $\varepsilon_{\mathrm{r2}}$ 反应x变化的灵敏度较低。

(4) 由

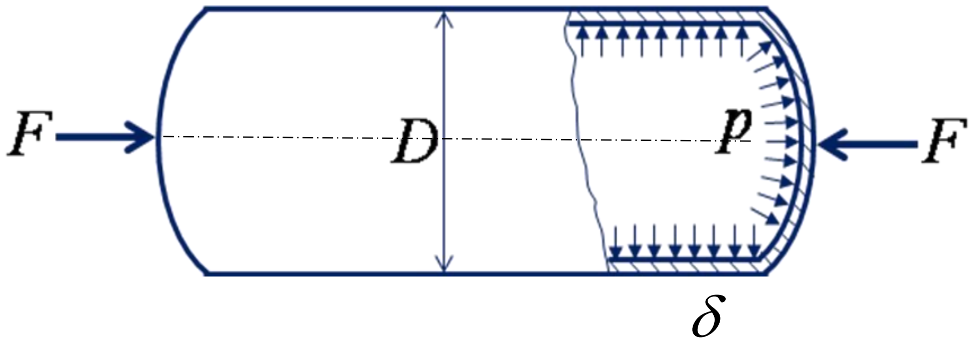
$\varepsilon_{\mathrm{r2}}$对$F$的灵敏度随$x$的减小而减小，

因此当F较小时，该方法测量x的精度较低。

$\varepsilon_{\mathrm{r1}}$和 $\varepsilon_{\mathrm{r2}}$对$x$的灵敏度随$F$的减小而减小，

因此当x较小时，该方法测量F的精度较低。

图示薄壁圆筒，当P保持恒定而F达到某一特定值时，可以实现纯剪切。



材料常数 E,μ,G 已知。

设计一个应变测量方案，要求：

1、能够实时柱体部分是否处于纯剪切应力状态 。

2、如果知道纯剪切应力状态下的轴向压力F，能够确定内压值P。

3、画出应变计布片图和测量组桥图。

4、给出应变仪读数 ε_r 与待测数据的关系式及其分析推导过程。

1、布片与组桥

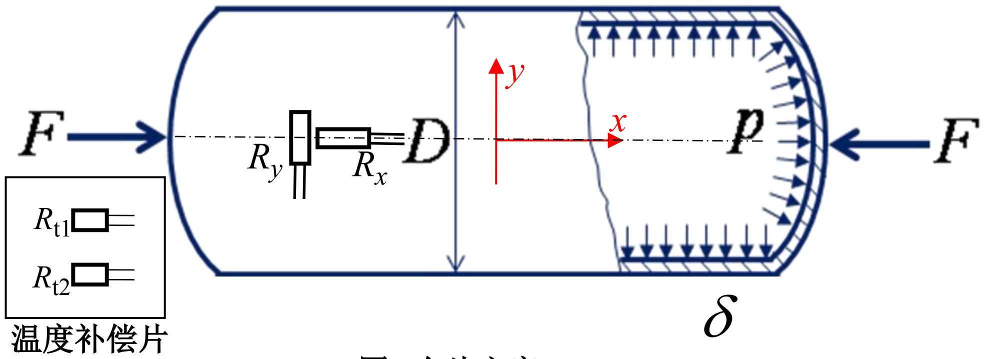


图1 布片方案

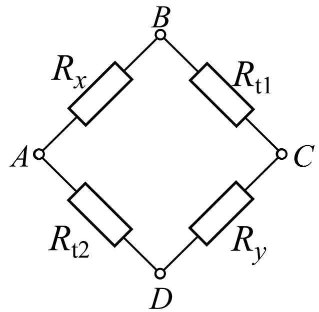


图2对臂全桥

2、关系推导

$$\varepsilon_{R_x} = \varepsilon_{p_x} - \varepsilon_F + \varepsilon_{\mathrm{t}}$$

$$\varepsilon_{R_y} = \varepsilon_{p_y} + \mu\varepsilon_F + \varepsilon_{\mathrm{t}}$$

$$\varepsilon_{R_{\mathrm{t}1}} = \varepsilon_{R_{\mathrm{t}2}} = \varepsilon_{\mathrm{t}}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\mathrm{r}} &= \varepsilon_{R_x} - \varepsilon_{R_{\mathrm{t}1}} + \varepsilon_{R_y} - \varepsilon_{R_{\mathrm{t}2}} \\ &= \varepsilon_{p_x} - \varepsilon_F + \varepsilon_{\mathrm{t}} - \varepsilon_{\mathrm{t}} + \varepsilon_{p_y} + \mu\varepsilon_F + \varepsilon_{\mathrm{t}} - \varepsilon_{\mathrm{t}} \\ &= \varepsilon_{p_x} - \varepsilon_F + \varepsilon_{p_y} + \mu\varepsilon_F\end{aligned}$$

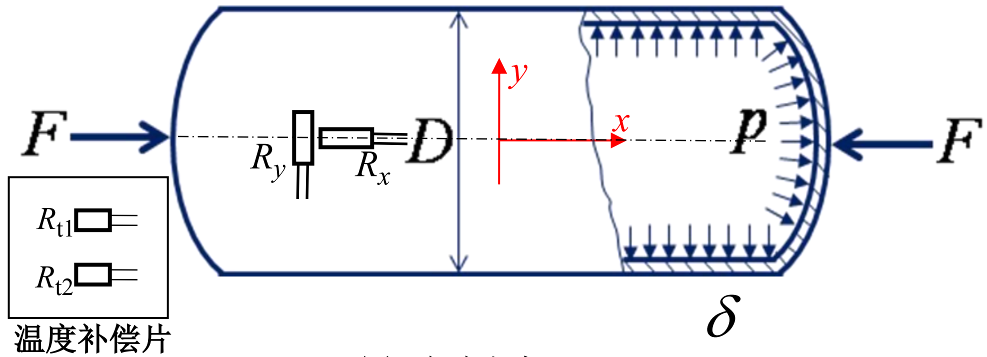


图1 布片方案

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{p_x} - \varepsilon_F + \varepsilon_{p_y} + \mu\varepsilon_F$$

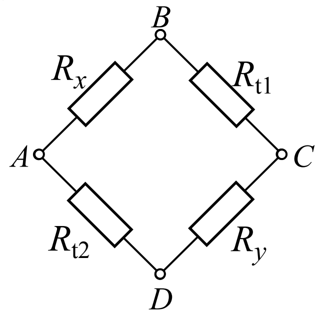


图2对臂全桥

在纯剪切应力状态下，恒有 $\varepsilon_3 = -\varepsilon_1$

对于本题，当薄壁圆筒达到纯剪切应力状态时，

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_{p_x} - \varepsilon_F \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_{p_y} - \mu\varepsilon_F$$

因此 $\varepsilon_r = \varepsilon_{p_x} - \varepsilon_F + \varepsilon_{p_y} + \mu\varepsilon_F = 0$

即应变仪读数为0（确定纯剪切应力状态的原理）。

由纯剪切应力状态的轴向压力F求取内压的方法：

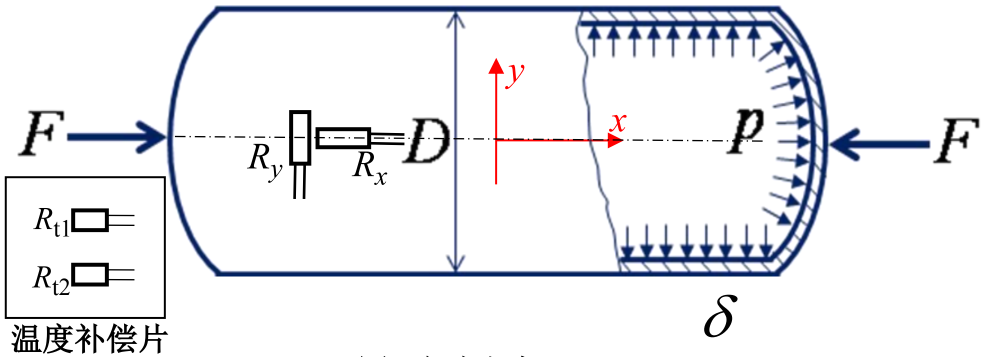


图1 布片方案

解法1：

在p和F的联合作用下，

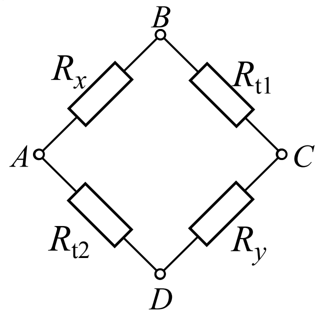


图2对臂全桥

$$\sigma_x = \sigma_{px} + \sigma_{Fx} = \frac{pD}{4\delta} - \frac{F}{A}$$

$$\sigma_y = \sigma_{py} = \frac{pD}{2\delta}$$

在纯剪切状态下，有 $\sigma_x = -\sigma_y$

即 $$\frac{pD}{4\delta} - \frac{F}{A} = -\frac{pD}{2\delta}$$

故可解得 $$p = \frac{4\delta F}{3DA} = \frac{4\delta F}{3D\pi D\delta} = \frac{4F}{3\pi D^2}$$

解法2：

利用广义胡克定律

$$\varepsilon_{p_x} = \frac{1}{E}(\sigma_{px} - \mu\sigma_{py})$$

$$= \frac{1}{E}(\sigma_{px} - 2\mu\sigma_{px})$$

$$= \frac{1-2\mu}{E}\sigma_{px}$$

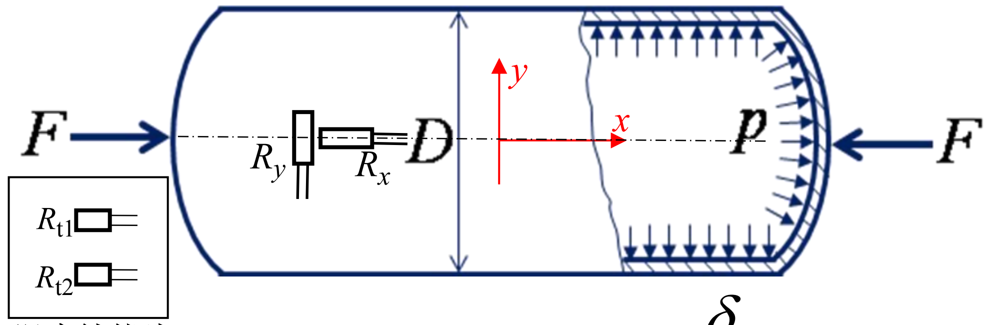


图1 布片方案

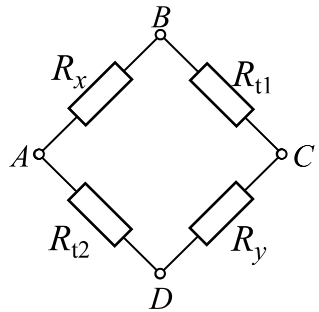


图2对臂全桥

$$\varepsilon_{p_y} = \frac{1}{E}(\sigma_{py} - \mu\sigma_{px}) = \frac{1}{E}(2\sigma_{px} - \mu\sigma_{px}) = \frac{2-\mu}{E}\sigma_{px}$$

可以得到以下关系

$$\frac{\varepsilon_{p_x}}{\varepsilon_{p_y}} = \frac{1-2\mu}{2-\mu} \qquad \varepsilon_{p_x} = \frac{1-2\mu}{2-\mu}\varepsilon_{p_y}$$

$$\varepsilon_{R_x} = \frac{1-2\mu}{2-\mu}\varepsilon_{p_y} - \varepsilon_F + \varepsilon_t$$

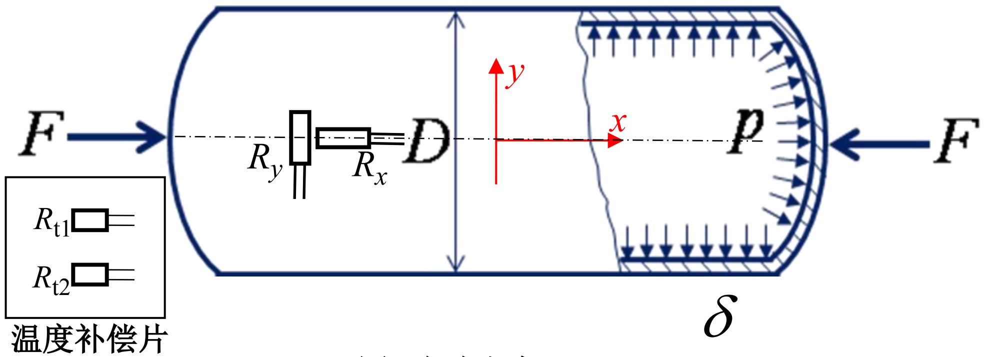


图1 布片方案

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{R_x} - \varepsilon_{R_{t1}} + \varepsilon_{R_y} - \varepsilon_{R_{t2}}$$

$$= \frac{1-2\mu}{2-\mu}\varepsilon_{p_y} - \varepsilon_F + \varepsilon_t - \varepsilon_t + \varepsilon_{p_y} + \mu\varepsilon_F + \varepsilon_t - \varepsilon_t$$

$$= \frac{1-2\mu}{2-\mu}\varepsilon_{p_y} - \varepsilon_F + \varepsilon_{p_y} + \mu\varepsilon_F$$

$$= \left(\frac{3-3\mu}{2-\mu}\right)\varepsilon_{p_y} + (\mu-1)\varepsilon_F$$

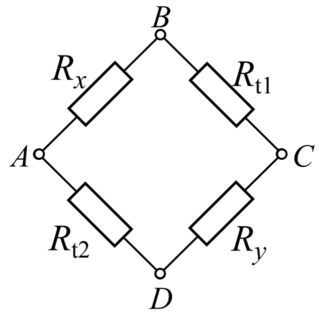


图2对臂全桥

$$\frac{\varepsilon_{p_x}}{\varepsilon_{p_y}} = \frac{1-2\mu}{2-\mu} \qquad \varepsilon_{p_x} = \frac{1-2\mu}{2-\mu}\varepsilon_{p_y}$$

$$\varepsilon_{\mathrm{r}}=\left(\frac{3-3\mu}{2-\mu}\right)\varepsilon_{p_y}+(\mu-1)\varepsilon_F$$

当薄壁圆筒达到纯剪切应力状态时， $\varepsilon_{\mathrm{r}}=0$

$$\left(\frac{3-3\mu}{2-\mu}\right)\varepsilon_{p_y}+(\mu-1)\varepsilon_F=0$$

$$\varepsilon_{p_y}=\frac{2-\mu}{E}\sigma_{px}=\frac{2-\mu}{E}\times\frac{pD}{4\delta}=\frac{(2-\mu)Dp}{4E\delta}$$

$$\varepsilon_F=\frac{\sigma_F}{E}=\frac{F}{AE}=\frac{F}{\pi D\delta E}$$

$$\left(\frac{3-3\mu}{2-\mu}\right)\frac{(2-\mu)Dp}{4E\delta}+(\mu-1)\frac{F}{\pi D\delta E}=0$$

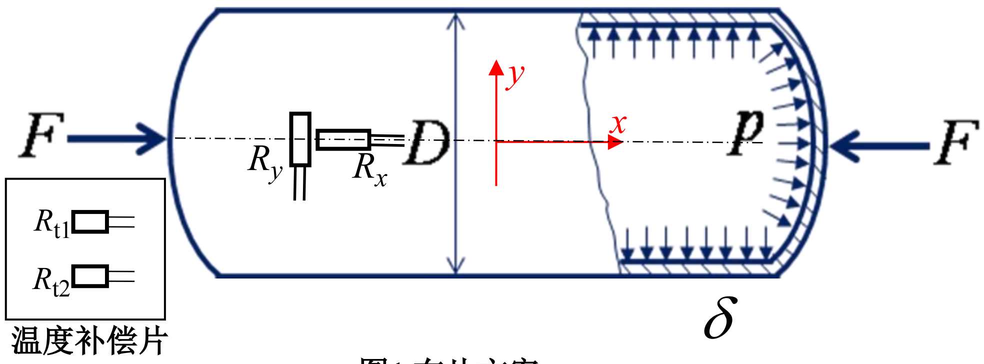


图1 布片方案

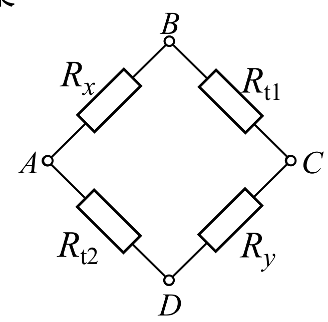


图2对臂全桥

解出内压p：

$$p=\frac{4F}{3\pi D^2}$$