题目　设 A, B 为同型矩阵且 $rank(A) = r$, $rank(B) = s$, 证明 $rank(A) + rank(B) = rank(A + B)$ 的充分必要条件是存在可逆矩阵 P 和 Q, 使得

$$A = P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q,\ \ B = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_s \end{pmatrix}Q,$$

其中 $r + s$ 不超过矩阵 A 的行数及列数.

证明　首先, 存在可逆阵 S, T, 使得

$$SAT = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

又设

$$SBT = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \tag{2}$$

则

$$S(A + B)T = \begin{pmatrix} E_r + B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \tag{3}$$

因为 $rank(A + B) = r + s$, 则删除 (3) 式右端前 r 行后得到的矩阵 (B_3, B_4) 的秩不小于 s, 但 $rank(B) = s$, 由 (1) 知矩阵 (B_3, B_4) 的秩不超过 s, 所以 $rank\,(B_3, B_4) = s$. 同理, 删除 (3) 式右端前 r 列后得到的矩阵 $\begin{pmatrix} B_2 \\ B_4 \end{pmatrix}$ 的秩也是 s. 该结论说明 (2) 中存在一个 s 阶子式位于子块 B_4 中 (原因可见后面的引理), 故 $rank(B_4) = s$. 故存在可逆矩阵 H, L, 使得

$$HB_4L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_s \end{pmatrix} \tag{4}$$

再根据 (1) (2) 的结果, 得

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}(SAT)\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

以及

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}(SBT)\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} B_1 & B_2L \\ HB_3 & HB_4L \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B_1 & B_2L \\ HB_3 & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_s \end{pmatrix} \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{6}$$

再根据 $rank(B) = s$ 及 (6) 式结果, (6) 式只可能是

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} (SBT) \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & E_s \end{pmatrix} \tag{7}$$

最后只需要对 (7) 式作一定的初等变换就可以化为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_s \end{pmatrix}$, 而且同样的初等变换作用于 (5) 式, 其结果还是 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 即有相同的可逆矩阵 P, Q, 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad PBQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_s \end{pmatrix}$$

附: 引理 设 $rank(A) = r$, 若 A 的第 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ 个行向量组线性无关, 及 A 的第 $j_1, j_2, \cdots, j_r$ 个列向量线性无关, 则由这 r 行与 r 列确定的一个 r 阶子式不等于零.