证明 若 $AGA=A$, 设 $rank(A)=r$, 可证

$$P^{-1}AQ^{-1}=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$QGP=\begin{pmatrix} E_r & Y_1 \\ Y_2 & Y_3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

其中 Y_1, Y_2, Y_3 为任意矩阵. 对 (2) 式右端分块矩阵作分块初等变换:

$$\begin{pmatrix} E_r & Y_1 \\ Y_2 & Y_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E_r & Y_1 \\ 0 & Y_3-Y_2Y_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & Y_3-Y_2Y_1 \end{pmatrix}$$

把这一变换过程用分块初等矩阵表示成矩阵:

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ -Y_2 & E_{n-r} \end{pmatrix} (QGP) \begin{pmatrix} E_r & -Y_1 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & Y_3-Y_2Y_1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

此时, 有

$$\begin{pmatrix} E_r & -Y_1 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}^{-1} (P^{-1}AQ^{-1}) \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ -Y_2 & E_{n-r} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

根据 (2) 知 A 的给定任一广义逆 G 的秩一定不小于 r, 设 $rank(G)=s$, 由 (3) 知 $Y_3-Y_2Y_1$ 的秩为 $s-r$, 存在 $n-r$ 阶可逆矩阵 H, L, 使得 $H(Y_3-Y_2Y_1)L=\begin{pmatrix} E_{s-r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 于是对 (3) 施行变换:

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ -Y_2 & E_{n-r} \end{pmatrix} (QGP) \begin{pmatrix} E_r & -Y_1 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

再对 (4) 分别以 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}^{-1}$ 左乘之, 以 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}^{-1}$ 右乘之, 右端结果还是 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.