一. 考虑实矩阵$A=\begin{bmatrix}3&0\\4&5\end{bmatrix}$.

(1) 求正交矩阵P和对角元为正数的上三角矩阵B满足$A=PB$.

(2) 求正交矩阵Q和正定对称矩阵C满足$A=QC$.

解.

$$P=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3&-4\\4&3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}5&4\\0&3\end{bmatrix},\quad Q=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2&-1\\1&2\end{bmatrix},\quad C=\sqrt{5}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}.$$

二. 设V是有限维复内积空间, $T\in L(V)$. 证明:

(1) 如果$T+T^*$正定, 则T可逆;

(2) 如果$T+T^*$半正定, 则$\mathrm{Ker}(T)=\mathrm{Ker}(T^*)$.

证明. 注意到对任意$\alpha\in\mathrm{Ker}(T)$有

$$\langle(T+T^*)\alpha,\alpha\rangle=\langle T\alpha,\alpha\rangle+\langle T^*\alpha,\alpha\rangle=\langle T\alpha,\alpha\rangle+\langle\alpha,T\alpha\rangle=0.$$

如果$T+T^*$正定, 这推出$\alpha=0$, 即在(1)的条件下有$\mathrm{Ker}(T)=\{0\}$, 从而T可逆. 如果$T+T^*$半正定, 则上式推出$(T+T^*)\alpha=0$, 从而$T^*\alpha=0$, 即$\alpha\in\mathrm{Ker}(T^*)$. 这说明在(2)的条件下有$\mathrm{Ker}(T)\subset\mathrm{Ker}(T^*)$. 用$T^*$替换$T$, 即得反向的包含关系. □

三. 考虑实线性空间$\mathbb{R}^{n\times n}$上的对称双线性函数$f(A,B)=\mathrm{tr}(AB)$. 对下列三个条件, 分别求满足该条件的子空间$W\subset\mathbb{R}^{n\times n}$的维数的最大值.

(1) $f|_W$正定;

(2) $f|_W$负定;

(3) $f|_W=0$.

解. 答案为: (1) $\frac{n(n+1)}{2}$; (2) $\frac{n(n-1)}{2}$; (3) $\frac{n(n-1)}{2}$. 下面证明. 设W_1和W_2分别为$\mathbb{R}^{n\times n}$中的对称和反对称矩阵构成的子空间. 则$\dim W_1=\frac{n(n+1)}{2}$, $\dim W_2=\frac{n(n-1)}{2}$. 注意到

- $f|_{W_1}$正定: 设$A\in W_1\setminus\{0\}$, 则A相似于某个非零实对角矩阵D, 从而
$$f(A,A)=\mathrm{tr}(A^2)=\mathrm{tr}(D^2)>0.$$
- $f|_{W_2}$负定: 设$A\in W_2\setminus\{0\}$, 则A(在$\mathbb{C}$上)相似于某个非零纯虚对角矩阵D, 从而
$$f(A,A)=\mathrm{tr}(A^2)=\mathrm{tr}(D^2)<0.$$

若子空间$W\subset\mathbb{R}^{n\times n}$的维数大于$\frac{n(n+1)}{2}$, 则$W\cap W_2\neq\{0\}$, 从而$f|_W$不正定. 这说明(1)的答案为$\frac{n(n+1)}{2}$. 类似的推导说明(2)的答案为$\frac{n(n-1)}{2}$. 为了讨论(3), 记$W_3$为$\mathbb{R}^{n\times n}$中的严格上三角矩阵构成的子空间. 则$\dim W_3=\frac{n(n-1)}{2}$, 并且$f|_{W_3}=0$. 若子空间$W\subset\mathbb{R}^{n\times n}$的维数大于$\frac{n(n-1)}{2}$, 则$W\cap W_1\neq\{0\}$, 从而$f|_W\neq 0$. 因此(3)的答案为$\frac{n(n-1)}{2}$. □

四. 设$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. 假设$A^{n+1}$相似于正交矩阵. 证明$A^n$相似于正交矩阵.

证明. *方法一.* 不妨设A^{n+1}正交. 记$B = \sum_{k=0}^{n}(A^k)^t A^k$. 则$A^t BA = B$. 注意到$B$正定, 从而存在可逆矩阵$P$使得$B = P^t P$. 结合起来得$(PAP^{-1})^t(PAP^{-1}) = I_n$, 即$PAP^{-1}$正交, 因此$PA^nP^{-1}$正交. □

方法二. 条件推出A可逆, 并且A^{n+1}在$\mathbb{C}$上可对角化. 通过考虑Jordan标准型, 可知A在$\mathbb{C}$上可对角化, 并且特征值均为模等于1的复数. 通过考虑A的特征多项式的实因式分解, 可知A相似于$\mathrm{diag}(I_p, -I_q, D_1, \ldots, D_r)$, 其中$D_k = \mathrm{diag}(e^{i\theta_k}, e^{-i\theta_k})$. 注意到$D_k$相似于$R_k := \begin{bmatrix}\cos\theta_k & -\sin\theta_k \\ \sin\theta_k & \cos\theta_k\end{bmatrix}$. 因此$A$在$\mathbb{C}$上相似于正交矩阵$\mathrm{diag}(I_p, -I_q, R_1, \ldots, R_r)$, 从而在$\mathbb{R}$上也相似于该正交矩阵. □

五. 设V是n维实线性空间, f是V上的双线性函数. 证明存在V的有序基$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$满足

$$i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i - j \geq 2 \qquad \Longrightarrow \qquad f(\alpha_i, \alpha_j) = 0.$$

证明. *引理.* 设$T \in L(V)$. 则存在T的不变子空间序列$\{0\} = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_k = V$满足$1 \leq \dim W_j/W_{j-1} \leq 2$. □

引理的证明. 对$n = \dim V$归纳. 当$n \leq 2$时显然. 设$n \geq 3$. 我们断言存在V的1维或2维T-不变子空间W. 取V的有序基$\mathcal{B}$, 并记$A = [T]_{\mathcal{B}}$. 视A为复矩阵, 它存在特征值和特征向量, 即存在$a, b \in \mathbb{R}$和不全为零的$X, Y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$满足$A(X + iY) = (a + ib)(X + iY)$, 也就是

$$AX = aX - bY, \qquad AY = bX + aY.$$

取$\alpha, \beta \in V$满足$[\alpha]_{\mathcal{B}} = X$, $[\beta]_{\mathcal{B}} = Y$. 则$\alpha, \beta$不全为零, 并且

$$T\alpha = a\alpha - b\beta, \qquad T\beta = b\alpha + a\beta.$$

这推出$W := \mathrm{span}\{\alpha, \beta\}$是1维或2维$T$-不变子空间, 从而证明了断言. 对$T_{V/W}$应用归纳假设即得引理.

注意到引理推出: 如果V是n维实内积空间, $T \in L(V)$, 则存在有序标准正交基$\mathcal{B}$使得

$$i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i - j \geq 2 \qquad \Longrightarrow \qquad [T]_{\mathcal{B}}\text{的}(i, j)\text{-元等于}0.$$

事实上, 取$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$使得$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{\dim W_j}\}$是$W_j$的基即满足要求. 这进一步推出: 任意$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$正交相似于某个当$i - j \geq 2$时$(i, j)$-元为0的矩阵, 从而合同于这样的矩阵. 对于原题, 约定f在有序基$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$下的矩阵的$(i, j)$-元为$f(\alpha_i, \alpha_j)$, 则$f$在所有有序基下的矩阵构成一个合同等价类, 因此存在有序基使f的矩阵的(i, j)-元当$i - j \geq 2$时等于0. □

六. 设$A, B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$是正定Hermite矩阵. 假设$ABC$是Hermite矩阵. 证明$ABC$正定.

证明. 记$D = ABC$, $A_1 = \sqrt{B}A\sqrt{B}$, $C_1 = \sqrt{B}C\sqrt{B}$, $D_1 = \sqrt{B}D\sqrt{B}$. 则A_1, C_1, D_1是Hermite矩阵, A_1, C_1正定, 并且$D_1 = A_1C_1$. 这推出$(\sqrt{A_1})^{-1}D_1(\sqrt{A_1})^{-1} = \sqrt{A_1}C_1(\sqrt{A_1})^{-1}$是Hermite矩阵并且特征值为正数, 从而正定. 这进一步推出D_1正定, 从而D正定. □