

一. 在 \mathbb{R} 内求行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \end{vmatrix}$.

解. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1. \quad \square$

二. (1) 设 M 和 N 是多项式代数 $\mathbb{Q}[x]$ 的理想. 证明 $M \cap N$ 也是 $\mathbb{Q}[x]$ 的理想.
 (2) 考虑 $\mathbb{Q}[x]$ 的理想

$$M_k = \{f \in \mathbb{Q}[x] \mid f(k) = f(k+1) = 0\}, \quad k = 1, 2, 3.$$

求理想 $(M_1 \cap M_2) + (M_2 \cap M_3)$ 的首项系数是1的生成元.

解. (1) 显然 $M \cap N$ 是 $\mathbb{Q}[x]$ 的子空间. 设 $f \in M \cap N, g \in \mathbb{Q}[x]$. 由于 M 和 N 是理想, 由 $f \in M$ 和 $f \in N$ 分别推出 $fg \in M$ 和 $fg \in N$, 从而 $fg \in M \cap N$. 因此 $M \cap N$ 是理想.

(2) 容易看出,

$$M_1 = ((x-1)(x-2)), \quad M_2 = ((x-2)(x-3)), \quad M_3 = ((x-3)(x-4)).$$

进而

$$M_1 \cap M_2 = ((x-1)(x-2)(x-3)), \quad M_2 \cap M_3 = ((x-2)(x-3)(x-4)).$$

因此

$$(M_1 \cap M_2) + (M_2 \cap M_3) = ((x-2)(x-3)),$$

即所求的生成元为 $(x-2)(x-3)$. □

三. 设 V 为所有从有限域 \mathbb{F}_7 到 \mathbb{R} 的映射构成的实线性空间. 定义 $T \in L(V)$ 为

$$T(f)(x) = 2f(x) - f(x+1), \quad \forall f \in V, x \in \mathbb{F}_7.$$

求 $\det(T)$.

解. 对 $i \in \{1, \dots, 7\}$, 取 $f_i \in V$ 为 $f_i(\bar{j}) = \delta_{ij}, j \in \{1, \dots, 7\}$. 容易验证, $\mathcal{B} = \{f_1, \dots, f_7\}$ 是 V 的有序基. 由于

$$T(f_i)(\bar{j}) = 2f_i(\bar{j}) - f_i(\overline{j+1}) = 2f_i(\bar{j}) - f_{i-1}(\bar{j}) = (2f_i - f_{i-1})(\bar{j}), \quad j \in \{1, \dots, 7\}$$

(这里约定 $f_0 = f_7$), 即

$$T(f_i) = 2f_i - f_{i-1},$$

所以

$$[T]_{\mathcal{B}} = A := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

因此

$$\det(T) = \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 32 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 64 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 127 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 127.$$

□

四. 设 V 是域 F 上的有限维线性空间, W 是 V 的子空间, $T \in L(V)$. 证明 $T(W) \subset W$ 的充分必要条件是 $T^t(W^0) \subset W^0$.

证明. 先证明:

引理1. 设 V 是域 F 上的有限维线性空间, W 是 V 的子空间, $T \in L(V)$. 则

$$(T^t)^{-1}(W^0) = T(W)^0.$$

引理1的证明. 只需注意到对 $f \in V^*$ 有

$$f \in (T^t)^{-1}(W^0) \iff f \circ T \in W^0 \iff f(T(W)) = \{0\} \iff f \in T(W)^0.$$

原题的证明:

$$T(W) \subset W \iff T(W)^0 \supset W^0 \iff (T^t)^{-1}(W^0) \supset W^0 \iff T^t(W^0) \subset W^0.$$

□

五. 设 V 是域 F 上的有限维线性空间, r 是正整数. 证明对于 $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in V$ 和 $f_1, \dots, f_r \in V^*$, 以下两个论断等价:

$$(1) \text{ 存在非零向量 } \beta \in V \text{ 使得 } \sum_{i=1}^r f_i(\beta)\alpha_i = 0.$$

$$(2) \text{ 存在非零函数 } g \in V^* \text{ 使得 } \sum_{i=1}^r g(\alpha_i)f_i = 0.$$

证明. 考虑映射 $T \in L(V)$, $T(\beta) := \sum_{i=1}^r f_i(\beta)\alpha_i$. 则对 $g \in V^*$ 有

$$(T^t g)(\beta) = g(T\beta) = \sum_{i=1}^r g(\alpha_i)f_i(\beta), \quad \forall \beta \in V,$$

即 $T^t g = \sum_{i=1}^r g(\alpha_i)f_i$. 因此

$$(1) \iff T \text{ 不单} \iff \text{rank}(T) < \dim V \iff \text{rank}(T^t) < \dim V^* \iff T^t \text{ 不单} \iff (2).$$

□

六. 考虑 3×3 复矩阵的集合

$$\mathcal{M} = \{A \in \mathbb{C}^{3 \times 3} \mid (A_{rs})^4 = 1, \forall r, s \in \{1, 2, 3\}\},$$

其中 A_{rs} 为 A 的 (r, s) -元. 求集合 $\mathbb{R} \cap \{\det(A) \mid A \in \mathcal{M}\}$.

解. 所求集合为 $\{0, \pm 2, \pm 4\}$. 先证明:

断言. 如果 $A \in \mathcal{M}$ 并且 $\det(A) \in \mathbb{R}$, 则 $\det(A)$ 是绝对值小于6的偶数.

断言的证明. 对任意 $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$, $\det(A)$ 为下面6个数之和:

$$A_{11}A_{22}A_{33}, \quad A_{12}A_{23}A_{31}, \quad A_{13}A_{21}A_{32}, \quad -A_{11}A_{23}A_{32}, \quad -A_{13}A_{22}A_{31}, \quad -A_{12}A_{21}A_{33}.$$

依次记这6个数为 t_1, \dots, t_6 . 设 $A \in \mathcal{M}$. 则 $A_{rs} \in \{\pm 1, \pm i\}$, 从而 $t_k \in \{\pm 1, \pm i\}$. 因此

$$|\det(A)| = |t_1 + \dots + t_6| \leq |t_1| + \dots + |t_6| = 6.$$

如果等号成立, 则所有 t_k 相等, 即存在 $z \in \{\pm 1, \pm i\}$ 满足

$$A_{11}A_{22}A_{33} = A_{12}A_{23}A_{31} = A_{13}A_{21}A_{32} = z,$$

$$A_{11}A_{23}A_{32} = A_{13}A_{22}A_{31} = A_{12}A_{21}A_{33} = -z.$$

这推出 A 的所有矩阵元之积既等于 z^3 又等于 $-z^3$, 矛盾. 因此 $|\det(A)| < 6$. 如果 $\det(A) \in \mathbb{R}$, 则可以设 t_1, \dots, t_6 中有 p 个 i , p 个 $-i$, m 个 1 , n 个 -1 , 其中 $2p + m + n = 6$. 于是

$$\det(A) = m - n = m + (2p + m - 6) = 2m + 2p - 6$$

为偶数. 这就证明了断言.

这一断言推出

$$\mathbb{R} \cap \{\det(A) \mid A \in \mathcal{M}\} \subset \{0, \pm 2, \pm 4\}.$$

只需再说明 \mathcal{M} 中矩阵的行列式可以取到 $\{0, \pm 2, \pm 4\}$ 中的每个数. 我们举例如下:

— 对 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}$ 有 $\det(A) = 0$.

— 对 $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & 1 \\ 1 & 1 & -i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}$ 有 $\det(A_1) = 2$. 设 A'_1 为把 A_1 的第一行乘上 -1 得到的矩阵, 则 $A'_1 \in \mathcal{M}$ 并且 $\det(A'_1) = -2$.

— 对 $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}$ 有 $\det(A_2) = 4$. 设 A'_2 为把 A_2 的第一行乘上 -1 得到的矩阵, 则 $A'_2 \in \mathcal{M}$ 并且 $\det(A'_2) = -4$. □

七. 设整数 $n > k > m > 0$, V 是域 F 上的 n 维线性空间, W 是 V 的 m 维子空间, $T \in L(V)$ 满足

$$\dim(T(W) + W) = k.$$

求 $\dim(T^t(W^0) + W^0)$.

解. 我们用两种方法证明

$$\dim(T^t(W^0) + W^0) = n + k - 2m. \quad (1)$$

证明一. 先证明:

引理2. 设 V 是域 F 上的有限维线性空间, W 是 V 的子空间, $T \in L(V)$. 则

$$\dim(T(W) + W) + \dim(W \cap T^{-1}(W)) = 2 \dim W. \quad (2)$$

引理2的证明. 考虑满映射

$$W \rightarrow T(W), \quad \alpha \mapsto T(\alpha)$$

和

$$W \cap T^{-1}(W) \rightarrow T(W) \cap W, \quad \alpha \mapsto T(\alpha).$$

它们的核均为 $\text{Ker}(T) \cap W$. 因此

$$\begin{aligned} & \dim W - \dim T(W) \\ &= \dim(W \cap T^{-1}(W)) - \dim(T(W) \cap W) \\ &= \dim(W \cap T^{-1}(W)) + \dim(T(W) + W) - \dim T(W) - \dim W. \end{aligned}$$

整理即得(2)式.

(1)式的证明: 由引理2和第四题证明中的引理1, 有

$$\begin{aligned}\dim(T^t(W^0) + W^0) &= 2 \dim W^0 - \dim(W^0 \cap (T^t)^{-1}(W^0)) \\ &= 2 \dim W^0 - \dim(W^0 \cap T(W)^0) \\ &= 2 \dim W^0 - \dim(W + T(W))^0 \\ &= 2(n - m) - (n - k) = n + k - 2m.\end{aligned}$$

证明二. 考虑 $\Phi = QTJ \in L(W, V/W)$, 其中 $J: W \rightarrow V$ 为含入映射, $Q: V \rightarrow V/W$ 为商映射. 则

$$\text{Im}(\Phi) = Q(T(W)) = (T(W) + W)/W.$$

注意到

$$\text{Im}(Q^t) = \text{Ker}(Q)^0 = W^0, \quad \text{Ker}(J^t) = \text{Im}(J)^0 = W^0,$$

从而

$$\text{Im}(\Phi^t) = J^t(T^t(W^0)) = J^t(T^t(W^0) + W^0) \cong (T^t(W^0) + W^0)/W^0.$$

由 $\dim \text{Im}(\Phi) = \dim \text{Im}(\Phi^t)$ 得

$$\dim(T(W) + W) - \dim W = \dim(T^t(W^0) + W^0) - \dim W^0.$$

由此即得(1)式. □