一. 考虑$\mathbb{Q}^4$中的向量

$$\alpha_1=(1,1,1,1),\qquad \alpha_2=(1,2,3,4),\qquad \alpha_3=(1,4,9,16),$$
$$\beta_1=(-1,-1,1,9),\qquad \beta_2=(-4,-5,-4,1).$$

求集合

$$\{c\in\mathbb{Q}\mid \beta_1+c\beta_2\in\operatorname{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}\}.$$

解. 对矩阵$A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix}$做初等行变换, 得到行简化阶梯矩阵$R=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-3\\0&0&1&3\end{bmatrix}$. 于是

$$\begin{aligned}\operatorname{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}&=\operatorname{row}(A)=\operatorname{row}(R)\\&=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{Q}^4\mid x_4=x_1-3x_2+3x_3\}.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}&\beta_1+c\beta_2=(-1-4c,-1-5c,1-4c,9+c)\in\operatorname{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}\\ \iff\ &9+c=(-1-4c)-3(-1-5c)+3(1-4c)\\ \iff\ &c=-2,\end{aligned}$$

即所求集合为$\{-2\}$. □

二. 考虑$\mathbb{R}^3$中的向量$\alpha=(1,1,0)$, $\beta=(0,1,1)$. 求集合

$$\{\gamma\in\mathbb{R}^3\mid \text{存在不可逆矩阵}A\in\mathbb{R}^{3\times3}\text{使得}\alpha A=\beta,\beta A=\gamma,\gamma A=\alpha\}.$$

解. 假设存在不可逆矩阵$A\in\mathbb{R}^{3\times3}$使得$\alpha A=\beta,\beta A=\gamma,\gamma A=\alpha$. 则$\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}\beta\\ \gamma\\ \alpha\end{bmatrix}$. 如果$\{\alpha,\beta,\gamma\}$线性无关, 则矩阵$\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix}\beta\\ \gamma\\ \alpha\end{bmatrix}$均可逆, 于是$A=\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\beta\\ \gamma\\ \alpha\end{bmatrix}$也可逆, 矛盾. 因此$\{\alpha,\beta,\gamma\}$线性相关. 由于$\alpha$与$\beta$线性无关, 所以$\gamma$可唯一表示为$\alpha$与$\beta$的线性组合

$$\gamma=a\alpha+b\beta.$$

在此式两边同时右乘A和A^2, 分别得到$\alpha=a\beta+b\gamma$和$\beta=a\gamma+b\alpha$. 这两个线性关系中γ的系数一定非零, 即$ab\neq0$. 于是

$$\gamma=b^{-1}\alpha-b^{-1}a\beta=-a^{-1}b\alpha+a^{-1}\beta.$$

由于γ表示为α与β的线性组合的方式唯一, 所以$a=b^{-1}=-a^{-1}b$. 由此易得$a=b=-1$, 即

$$\gamma=-\alpha-\beta=(-1,-2,-1).$$

另一方面, 对于$\gamma=(-1,-2,-1)$, 容易验证$A=\begin{bmatrix}\beta\\0\\\gamma\end{bmatrix}$满足$\alpha A=\beta,\beta A=\gamma,\gamma A=\alpha$. 因此所求集合为$\{(-1,-2,-1)\}$. $\square$

三. 证明对于$\mathbb{C}^9$的子空间V, 以下两个论断等价:
(1) $\dim V\geq 5$,
(2) 对$\mathbb{C}^9$的任意5维子空间W有$V\cap W\neq\{0\}$.

证明. "(1)$\Longrightarrow$(2)" 设$\dim W=5$, 则

$$\dim(V\cap W)=\dim V+\dim W-\dim(V+W)\geq 5+5-9=1.$$

因此$V\cap W\neq\{0\}$.

"(2)$\Longrightarrow$(1)" 假设$\dim V=k\leq 4$. 取V的基$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_k\}$, 并扩充为$\mathbb{C}^9$的基$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_9\}$. 取$W=\operatorname{span}\{\alpha_5,\ldots,\alpha_9\}$, 则$\dim W=5$并且$V\cap W=\{0\}$, 矛盾. $\square$

四. 设V是域F上的有限维线性空间, $\dim V=n\geq 1$, $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$是$V$的基. 对于$f_1,\ldots,f_n\in V^*$, 考虑矩阵$A\in F^{n\times n}$, 其$(i,j)$-元为$f_i(\alpha_j)$. 证明$\{f_1,\ldots,f_n\}$是$V^*$的基的充分必要条件是$A$可逆.

证明. 设A的行向量分别为$\xi_1,\ldots,\xi_n$, 即$\xi_i=(f_i(\alpha_1),\ldots,f_i(\alpha_n))$. 由于$\dim V^*=n$, 所以

$\{f_1,\ldots,f_n\}$是基$\Longleftrightarrow\{f_1,\ldots,f_n\}$线性无关$\Longleftrightarrow\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$线性无关$\Longleftrightarrow A$可逆. $\square$

五. 设V是域F上的10维线性空间, $U\in\mathrm{L}(V)$. 考虑$\mathrm{L}(V)$的子集

$$M=\{T\in\mathrm{L}(V)\mid TU=0\}.$$

(1) 验证M是$\mathrm{L}(V)$的子空间.
(2) 假设存在V的有序基$\mathcal{B}$使得$[U]_{\mathcal{B}}$的(i,j)-元为$(i_F-j_F)^2$. 求$\dim M$.

解. (1) 显然$0\in M$. 因此$M\neq\varnothing$. 再注意到对任意$T_1,T_2\in M$和$c\in F$有

$$(cT_1+T_2)U=cT_1U+T_2U=0,$$

从而$cT_1+T_2\in M$. 因此M是子空间.

(2) 记$A=[U]_{\mathcal{B}}$, $k=\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(U)$. 取$\operatorname{Im}(U)$的有序基$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_k\}$, 并扩充为$V$的有序基$\mathcal{B}'=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{10}\}$. 则映射$\Phi:\mathrm{L}(V)\to F^{10\times 10}$, $T\mapsto[T]_{\mathcal{B}'}$是线性同构. 容易看出,

$$\begin{aligned}T\in M&\Longleftrightarrow T(\operatorname{Im}(U))=\{0\}\\&\Longleftrightarrow T(\alpha_1)=\cdots=T(\alpha_k)=0\\&\Longleftrightarrow[T]_{\mathcal{B}'}[\alpha_1]_{\mathcal{B}'}=\cdots=[T]_{\mathcal{B}'}[\alpha_k]_{\mathcal{B}'}=0\\&\Longleftrightarrow[T]_{\mathcal{B}'}\text{的前}k\text{列为}0.\end{aligned}$$

这说明

$$\Phi(M)=\{B\in F^{10\times 10}\mid B\text{的前}k\text{列为}0\}.$$

因此
$$\dim M=\dim\Phi(M)=10(10-k).$$
为了求$k=\mathrm{rank}(A)$, 记A的第i行为ξ_i. 容易验证, 对$1\le i\le 7$有
$$\xi_i-3\xi_{i+1}+3\xi_{i+2}-\xi_{i+3}=0.$$
因此$\mathrm{row}(A)=\mathrm{span}\{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}$. 当$\mathrm{char}F\neq 2$时, 容易验证$\{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}$线性无关, 所以$k=3$. 当$\mathrm{char}F=2$时, 有$\xi_1=\xi_3$ 但$\{\xi_1,\xi_2\}$线性无关, 所以$k=2$. 综上, 有
$$\dim M=10(10-k)=\begin{cases}70, & \mathrm{char}F\neq 2;\\ 80, & \mathrm{char}F=2.\end{cases}$$
□

六. 设V为由所有从有限域$\mathbb{F}_5$到有限域$\mathbb{F}_3$的映射构成的$\mathbb{F}_3$-线性空间, 其中的向量加法和纯量乘法定义为:
$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\quad (cf)(x)=cf(x),\qquad \forall f,g\in V,x\in\mathbb{F}_5,c\in\mathbb{F}_3.$$
求V的1维子空间的个数.

解. 容易看出$V\cong\mathbb{F}_3^5$. 因此V的1维子空间与矩阵元在$\mathbb{F}_3$中的非零1×5行简化阶梯矩阵一一对应. 对于$1\le j\le 5$, 主元在第j列的这种矩阵的个数为3^{5-j}个. 因此, 所有这种矩阵的个数为$81+27+9+3+1=121$个. □

七. 求最小的正整数k, 满足对任意$A\in\mathbb{R}^{9\times 9}$, 如果$A^4=0$, 则存在$B\in\mathbb{R}^{9\times k}$和$C\in\mathbb{R}^{k\times 9}$使得$A=BC$.

解. 所求$k=6$. 先证明$k=6$满足要求, 即对任意$A\in\mathbb{R}^{9\times 9}$, 如果$A^4=0$, 则存在$B\in\mathbb{R}^{9\times 6}$和$C\in\mathbb{R}^{6\times 9}$使得$A=BC$. 为此先证明:

引理. 设$A\in F^{n\times n}$. (1) 若$A^k=0$, 则$\dim\mathrm{Ker}(A)\ge n/k$. (2) 若正整数$m<n$, 并且$\mathrm{rank}(A)\le m$, 则存在$B\in\mathbb{R}^{n\times m}$和$C\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 使得$A=BC$.

引理的证明. (1) 对$P,Q\in F^{n\times n}$, 考虑L_Q在$\mathrm{Ker}(PQ)$上的限制$L_Q|_{\mathrm{Ker}(PQ)}\in\mathrm{L}(\mathrm{Ker}(PQ),F^{n\times 1})$. 则
$$\mathrm{Ker}(L_Q|_{\mathrm{Ker}(PQ)})=\mathrm{Ker}(Q),\qquad \mathrm{Im}(L_Q|_{\mathrm{Ker}(PQ)})\subset\mathrm{Ker}(P).$$
从而
$$\begin{aligned}\dim\mathrm{Ker}(PQ)&=\dim\mathrm{Ker}(L_Q|_{\mathrm{Ker}(PQ)})+\dim\mathrm{Im}(L_Q|_{\mathrm{Ker}(PQ)})\\&\le\dim\mathrm{Ker}(Q)+\dim\mathrm{Ker}(P).\end{aligned}$$
由此归纳得$\dim\mathrm{Ker}(A^k)\le k\dim\mathrm{Ker}(A)$. 从而(1)成立.

(2) 由于$\dim\mathrm{Im}(L_A)=\mathrm{rank}(A)\le m$, 所以可以取$F^{n\times 1}$的包含$\mathrm{Im}(L_A)$的$m$维子空间$V$. 设$\mathcal{E}$是$F^{n\times 1}$的标准基, 并取定$V$的有序基$\mathcal{B}$. 定义$T\in\mathrm{L}(F^{n\times 1},V)$和$U\in\mathrm{L}(V,F^{n\times 1})$为
$$T(X)=AX,\qquad U(Y)=Y.$$
则$L_A=U\circ T$. 设$B=[U]_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$, $C=[T]_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$. 则
$$A=[L_A]_{\mathcal{E}}=[U\circ T]_{\mathcal{E}}=[U]_{\mathcal{B},\mathcal{E}}[T]_{\mathcal{E},\mathcal{B}}=BC.$$
这就证明了引理.

对于原题中的矩阵A, 由引理得$\dim\mathrm{Ker}(A)\geq 3$. 因此$\mathrm{rank}(A)\leq 6$. 再由引理即知存在$B\in\mathbb{R}^{9\times 6}$和$C\in\mathbb{R}^{6\times 9}$使得$A=BC$.

接下来证明: 如果$k\leq 5$, 则存在$A\in\mathbb{R}^{9\times 9}$, 满足$A^4=0$, 但不存在$B\in\mathbb{R}^{9\times k}$和$C\in\mathbb{R}^{k\times 9}$使得$A=BC$. 取$A$使得其$(1,2),(2,3),(3,4),(5,6),(6,7),(7,8)$-矩阵元为1, 其他矩阵元为0. 则$A^4=0$, 并且$\mathrm{rank}(A)=6$. 但是对于$B\in\mathbb{R}^{9\times k}$和$C\in\mathbb{R}^{k\times 9}$总有

$$\mathrm{rank}(BC)=\dim\mathrm{Im}(L_B\circ L_C)\leq\dim\mathrm{Im}(L_B)=\mathrm{rank}(B)\leq k\leq 5.$$

因此不存在$B\in\mathbb{R}^{9\times k}$和$C\in\mathbb{R}^{k\times 9}$使得$A=BC$. □