3 线性变换的相似标准形

要研究向量空间V上的线性变换,核心思想即找一组基,使得线性变换在这组基下的矩阵表示尽量简单.而实现这个目的的核心方法是将全空间写成**不变子空间的直和**,这样将线性变换限制在每个小空间上的行为拼在一起即得到在大空间上的行为.而给定线性变换φ,将全空间写成$\varphi-$不变子空间的直和的过程叫做**直和分解**,直和分解有两种方式,准素分解和循环分解

3.1 准素分解

给定域F上的向量空间V,以及V上的线性变换φ.我们称φ是**准素**(primary)的,如果φ的特征多项式$f_\varphi \in F[x]$是K上的素多项式的幂.即$f_\varphi = p^r, p \in F[x]$不可约.给定任意一个线性变换$\varphi$之后(无论$\varphi$是否准素),取$\varphi$的某个不变子空间$W$,则$\varphi$限制在$W$上$\varphi|_W$, 是$W$ 上的一个线性变换.如果$\varphi|_W$是准素的(此时全空间是W),我们就将W称为V的$\varphi-$**准素子空间**.注意准素子空间的前提是不变子空间.下面的命题成立

命题1 $\varphi-$准素子空间的φ不变子空间仍为$\varphi-$准素子空间.

而下面的定理告诉我们,取定V,φ之后.V一定可以写成若干的准素子空间的直和,这样我们就成功的将V写成了若干个$\varphi-$不变子空间的直和,从而达到了我们的目标

从下面开始，设给定域F上线性空间V和V上线性变换φ设φ的特征多项式为$f_\varphi = p_1^{d_1}\cdots p_k^{d_k}$,设其最小多项式为$m_\varphi = p_1^{r_1}\cdots p_k^{r_k}$

定理1 (准素分解定理(primary decomposition theorem)) V能写成若干个$\varphi-$准素子空间的直和.事实上我们有

$$V = \mathrm{Ker}(p_1^{r_1}(\varphi)) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(p_k^{r_k}(\varphi))$$

其中容易证明$\mathrm{Ker}(p_i^{r_i}(\varphi))$为$\varphi-$不变子空间且为准素子空间.

记$W_i = \mathrm{Ker}(p_i^{r_i})$为$\varphi$的**根子空间**.而隐藏在准素分解定理之后的还有很多的其他性质,首先准素分解定理有某种“唯一性”

命题2 如果将V写成了若干个φ准素子空间的直和

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_l$$

且$\varphi|_{U_i}$上的特征多项式两两互素.则$l = k$,且$U_1, \cdots, U_k$是$\mathrm{Ker}(p_1^{r_1}(\varphi)), \cdots, \mathrm{Ker}(p_k^{r_k}(\varphi))$的某个排列.

除此之外,还有很多小性质,现列举如下

命题3 (1) 对于可对角化的线性变换,准素分解就是将全空间写成各个特征子空间的直和.

(2) $W_i = \{\alpha | \exists k \in \mathbb{Z}^+, p_i^k\alpha = 0\}$.

(3) $\mathrm{Ker}(p_i(\varphi)) \subsetneq \mathrm{Ker}(p_i^2(\varphi)) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{Ker}(p_i^{r_i}(\varphi)) = W_i = \mathrm{Ker}(p_i^{r_i+1}(\varphi)) = \cdots$,若$p_i$ 为一次,则上述式子第一项为p_i的根所对应的特征子空间.

(4) $\dim W_i = d_i \deg p_i$,特别地,若$F = \mathbb{C}$为复数域,则$\dim W_i = d_i$

(5) 对任意$\varphi-$不变子空间U,有$U = (U \cap W_1) \oplus \cdots \oplus (U \cap W_k)$.这是准素分解所独有的性质,对于其他的不变子空间的直和分解,这个性质不一定正确.

(6) 对$\forall i$,往W_i上投影的投影映射为φ的多项式.即考虑映射$f_i : V \to V, \alpha_1 + \cdots + \alpha_k \mapsto \alpha_i, \alpha_j \in W_j$为$V$上的线性变换,存在多项式$P_i \in F[x]$,使得$f_i = P_i(\varphi)$.这个命题可以直接推出Jordan分解.

3.2 循环分解

定义1 对V上的线性变换φ,称φ是**循环**(cyclic)的,如果存在$\alpha \in V$,使得对于任意$\beta \in V$,存在多项式$f \in F[x]$,使得$\beta = f(\varphi)\alpha$

同样的,对于任意给定的线性变换φ,我们称φ的不变子空间W为$\varphi-$**循环子空间**,如果$f|_W$是(W上)循环的线性变换.换句话说,存在$\alpha \in W$,使得对于任意$\beta \in W$,存在多项式$f \in F[x]$,使得$\beta = f(\varphi)\alpha$.类似地,下面的命题成立

命题4 $\varphi-$循环子空间的φ不变子空间仍为$\varphi-$循环子空间.

对于研究循环的线性变换,有两个问题：怎么判断一个线性变换是否循环以及循环的线性变换有怎样的性质.

关于第一个问题,有如下完美的结论

命题5 φ是V上循环的线性变换当且仅当φ的特征多项式f_φ等于其最小多项式m_φ

而该结论的证明只需用到下面的引理

引理1 存在$\alpha \in V$,使得α的最小多项式$m_\alpha = m_\varphi$

对于第二个问题,也有一个完美的结论

命题6 若φ循环,则存在一组基使得φ的矩阵表示为有理型矩阵,即Frobenius块.事实上,该命题的逆命题也成立.

有了以上两个命题,结合下面的循环分解定理,便可推出线性变换的有理标准型.

定理2 (循环分解定理(cyclic decomposition theorem)) V一定可以分成φ的若干个循环子空间的直和

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$$

并且设$\varphi|_{W_i}$的最小多项式为m_i,可以使得$m_r|m_{r-1}|\cdots|m_1$.

而循环分解定理在某种意义下也有唯一性

命题7 $m_1, \cdots, m_r$被φ所唯一决定,称作φ的**不变因子组**.换句话说,如果用另一种方式将V写成了若干个循环子空间的直和

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_l$$

并且$\varphi|_{U_i}$的最小多项式q_i满足$q_l|q_{l-1}|\cdots|q_1$,则$l = r$,且$m_i = q_i$.

注意此处并没有说明W_i是唯一的,但每个$\varphi|_{W_i}$的最小多项式在满足整除关系的情况下唯一.由此便可推出矩阵的有理标准型及其唯一性.

还可以得到下述命题

命题8 φ循环当且仅当下面的命题成立:若ψ满足$\psi\varphi = \varphi\psi$,则一定存在多项式$f$,使得$\psi = f(\varphi)$

3.3 准素循环分解

考虑域F上向量空间V上的线性变换φ,若φ既是准素的又是循环的,则称φ**准素循环**,类似地可以定义$\varphi-$**准素循环子空间**.

下面的命题告诉我们,达到准素循环之后,直和分解便不能继续下去了.

命题9 V不能分解成两个非平凡φ不变子空间的直和当且仅当φ准素循环.

对于一个给定的线性变换φ,我们可以先将φ进行准素分解,再将每个小空间进行循环分解,这样就得到了一个直和分解,且每个部分均为准素循环子空间.这样便得到

命题10 V能够分成若干个φ准素循环子空间的直和

而准素循环分解也有某种唯一性.

定理3 设$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$是$V$的准素循环分解,则$\varphi|_{W_i}$上的最小多项式$m_i$在不计次序的意义下被$\varphi$唯一决定,称它们为$\varphi$的**初等因子组**.

特别地,考虑复数域上的准素循环分解便得到了线性变换的Jordan标准型.

3.4 other topics

3.4.1 可同时对角化与可同时三角化

下面的两个定理陈述了可同时对角化与可同时三角化的问题

定理4 一族线性变换构成的集合T可同时对角化,当且仅当两两可角化且每个线性变换均可对角化.

定理5 若存在一组基使得V上线性变换φ的矩阵表示为上三角矩阵,则称φ**可三角化**.φ可三角化当且仅当φ的特征多项式能够分解成一次因式的乘积.

定理6 若一组线性变换两两可交换且每个均可三角化,则它们可同时三角化.

3.4.2 半单线性变换

定义2 域F上的线性空间V上的线性变换称作是**半单**(semi-simple)的，如果对于每个$\varphi-$不变子空间W,$\varphi-$不变子空间U,使得$V = W \oplus U$

从下面的命题可以看出半单是可对角化的推广

命题11 φ半单当且仅当φ的最小多项式在F中的标准分解没有重因式.

由此可以看出,对于复数域的情况,线性变换是半单当且仅当可对角化.