关启安数学分析大一下半期考试

1. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^2\ln^3(1+x)\sin nx\,\mathrm{d}x$

2. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^3(1-x)^6\sin^2 nx\,\mathrm{d}x$

3. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\sin x\sin^6 nx\,\mathrm{d}x$

4. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+\sin\dfrac{k}{n}\right)\int_{-1}^1 x^{2n}\sin x\,\mathrm{d}x$

5. 非负函数f在$[0,1]$上可积,且$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$.求所有的实数$A$,使得存在函数$g$满足$fg$在$[0,1]$上可积($g$不一定有界),且

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=A$$

6. 求所有的定义在$[0,1]$上的函数$f(x)$,使得对于某个分划,有f的Darboux上和等于Darboux下和.

7. 求所有的正实数p,使得对任意的函数$f,g\in C[0,1]$.都有

$$\left(\int_0^1 |f(x)+g(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\int_0^1 |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_0^1 |g(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

8. 设$f(x)\in R[0,1]$,且函数$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$可导.则其导数在$[\frac{1}{6},\frac{5}{6}]$上是否可积?

9. 若函数$f(x)$在$[0,1]$有界且间断点只有有限多个聚点(聚点不一定在间断点集中),则$f(x)$在$[0,1]$上是否Riemann可积?

10. 正函数f在$(0,1)$上存在原函数,则f在$[\frac{1}{6},\frac{5}{6}]$上是否可积?

11. f在$[0,1]$上严格单调,$g(x)\in R[0,1]$且值域包含在$[0,1]$中,则$f(g(x))$是否在$[0,1]$上可积?

12. f在$[0,1]$上可积且满足介值性,则f是否一定存在原函数?

13. f在$[0,1]$可积且满足介值性,$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$是否一定在$[0,1]$上可导?

14. 是否存在函数$f\in R[0,1]$在$[0,1]$上非负且$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$大于0,$\left(\int_0^1 |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$在$p$趋于正无穷时趋于0

15. 函数$f(x)$满足对任意$g(x)\in C[0,1]$都有$f(g(x))\in R[0,1]$,则f是否在$[0,1]$上连续?