最小割 **Stoer-Wagner** 算法

Etrnls 2007-4-15

Stoer-Wagner 算法用来求无向图 G=(V, E)的全局最小割。

算法基于这样一个定理：对于任意 s, t ∈ V，全局最小割或者等于原图的 s-t 最小割，或者等于将原图进行 Contract(s, t)操作所得的图的全局最小割。

算法框架：

1. 设当前找到的最小割 MinCut 为+∞
2. 在 G 中求出任意 s-t 最小割 c，MinCut = min(MinCut, c)
3. 对 G 作 Contract(s, t)操作，得到 G'=(V', E')，若|V'| > 1，则 G=G'并转 2，否则 MinCut 为原图的全局最小割

Contract 操作定义：
若不存在边(p, q)，则定义边(p, q)权值 w(p, q) = 0
Contract(a, b)：删掉点 a, b 及边(a, b)，加入新节点 c，对于任意 v ∈ V，w(v, c) = w(c, v) = w(a, v) + w(b, v)

求 G=(V, E)中任意 s-t 最小割的算法：
定义 w(A, x) = ∑w(v[i], x)，v[i] ∈ A
定义 A_x 为在 x 前加入 A 的所有点的集合（不包括 x）

1. 令集合 A={a}，a 为 V 中任意点
2. 选取 V - A 中的 w(A, x)最大的点 x 加入集合 A
3. 若|A|=|V|，结束

令倒数第二个加入 A 的点为 s，最后一个加入 A 的点为 t，则 s-t 最小割为 w(A_t, t)

任意 s-t 最小割的算法正确性证明：
令 C 为任意一个 s-t 割
定义一个点 v 是活跃的当且仅当(u, v) ∈ C，其中 u 为在 v 前一个加入 A 中的点
定义 C_v = {(a, b) | a, b ∈ (A_v ∪ v) 且 (a, b) ∈ C}

需要证明 w(A_t, t) <= w(C_t) = w(C)

由于 t 显然为活跃点，下面应用数学归纳法证明对于任意活跃点 x 有 w(A_x, x) <= w(C_x)

- 设第一个活跃点为 v[0]，有 w($A_{v[0]}$, v[0]) <= w($C_{v[0]}$)
  由于 v[0]为第一个活跃点，所以 $A_{v[0]}$中的点到 v[0]的边是仅有的跨越 $C_{v[0]}$的边，故上式等号成立
- 令 v[i-1]为任意活跃点，v[i]为 v[i-1]之后第一个活跃点，设 w($A_{v[i-1]}$, v[i-1]) <= w($C_{v[i-1]}$) 成立
  由 w(A, x)定义可得：w($A_{v[i]}$, v[i]) = w($A_{v[i-1]}$, v[i]) + w($A_{v[i]}$ - $A_{v[i-1]}$, v[i])
  - 由于 v[i-1]在 v[i]前加入 A，w($A_{v[i-1]}$, v[i]) <= w($A_{v[i-1]}$, v[i-1])
  - 由归纳假设 w($A_{v[i-1]}$, v[i-1]) <= w($C_{v[i-1]}$)

  故 w($A_{v[i]}$, v[i]) <= w($C_{v[i-1]}$) + w($A_{v[i]}$ - $A_{v[i-1]}$, v[i])
  - w($A_{v[i]}$ - $A_{v[i-1]}$, v[i])对 w($C_{v[i]}$)有贡献而对 w($C_{v[i-1]}$)没有。故 w($C_{v[i-1]}$) + w($A_{v[i]}$ - $A_{v[i-1]}$, v[i]) <= w($C_{v[i]}$)

  所以 w($A_{v[i]}$, v[i]) <= w($C_{v[i]}$)，故 w(A_x, x) <= w(C_x)对于任意活跃点 x 都成立。

所以 w(A_t, t) <= w(C_t) = w(C)成立，即算法所求得的 s-t 割为任意 s-t 割中最小的。