已知椭圆方程

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = 1$$

令$\mathbf{a} = [a, b, c, d, e]^{\mathrm{T}}$,$\mathbf{x} = [x^2 \ \ xy \ \ \ y^2 \ \ x \ \ y]^{\mathbf{T}}$,于是方程可表示为$\mathbf{ax} = 1$。那么拟合椭圆的最优化问题可表示为：

$$\min \ \|\mathbf{Da}\|^2$$
$$s.t. \ \ \mathbf{a^{T}Ca} = 1$$

其中 **D** 表示数据样本集合 n x 6，6 表示维度，n 表示样本数。**a** 表示椭圆方程的参数，矩阵常数矩阵 **C** 为：

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

根据拉格朗日乘子法，引入拉格朗日因子λ，得到以下的两个等式方程：

$$\mathbf{2D^{T}Da - 2\lambda Ca = 0}$$
$$\mathbf{a^{T}Ca = 1}$$

令$\mathbf{S} = \mathbf{D^{T}D}$，那么上述方程可改写为：

$$\mathbf{Sa} = \lambda\mathbf{Ca}$$
$$\mathbf{a^{T}Ca} = 1$$

求解方程$\mathbf{Sa} = \lambda\mathbf{Ca}$的特征值和向量$(\lambda_i, \mathbf{u}_i)$，那么同样地$(\lambda_i, \mu\mathbf{u}_i)$也是方程$\mathbf{Sa} = \lambda\mathbf{Ca}$的特征解，其中μ是任意的实数。而根据方程$\mathbf{a^{T}Ca} = 1$，可以容易地找到一个μ，使得$\mu^2\mathbf{u}_i{}^{\mathbf{T}}\mathbf{Cu}_i = 1$，即：

$$\mu_i = \sqrt[2]{\frac{1}{\mathbf{u}_i{}^{\mathbf{T}}\mathbf{Cu}_i}} = \sqrt[2]{\frac{\lambda_i}{\mathbf{u}_i{}^{\mathbf{T}}\mathbf{Su}_i}}$$

最后令$\bar{\mathbf{a}}_i = \mu_i\mathbf{u}_i$，取$\lambda_i > 0$对应的特征向量$\mathbf{u}_i$，即可作为曲线拟合的方程解。

Matlab 实现的为代码只需要六行，如下所示：

```
% x,y are lists of coordinates
function a = fit_ellipse(x,y)
% Build design matrix
D = [ x.*x x.*y y.*y x y ones(size(x)) ];
% Build scatter matrix
S = D'*D;
% Build 6x6 constraint matrix
C(6,6) = 0; C(1,3) = 2; C(2,2) = -1; C(3,1) = 2;
% Solve eigensystem
[gevec, geval] = eig(inv(S)*C);
% Find the positive eigenvalue
[PosR, PosC] = find(geval > 0 & ~isinf(geval));
% Extract eigenvector corresponding to positive eigenvalue
a = gevec(:,PosC);
```